

# MODELO DE OBTENCION DE DISTRIBUCIONES DE TEMPERATURAS Y DE TENSIONES LONGITUDINALES AUTOEQUILIBRADAS EN PUENTES DE HORMIGON

ENRIQUE MIRAMBELL

y

ANTONIO AGUADO

*Escuela Técnica Superior de Ingenieros  
de Caminos, Canales y Puertos  
Universitat Politècnica de Catalunya*

## RESUMEN

El interés por la problemática de los efectos térmicos en las estructuras de hormigón y, en particular, en los puentes de hormigón ha ido aumentando notablemente en los últimos años. En este artículo se presenta un modelo de obtención de distribuciones de temperaturas y de tensiones longitudinales autoequilibradas en puentes de hormigón basado en un esquema bidimensional en diferencias finitas correspondiente al método explícito de resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Los resultados obtenidos mediante la aplicación del presente modelo se comparan con resultados experimentales y analíticos obtenidos por otros autores apreciándose una gran bondad en el ajuste. El programa numérico desarrollado se muestra como una útil herramienta de cara a su aplicación al análisis y diseño de puentes de hormigón —puentes losa, puentes cajón y puentes de vigas— frente a los efectos térmicos ambientales.

## SUMMARY

During the last years, the interest in the study of thermal effects on concrete bridges has increased considerably. In this paper, an analytical model based on two-dimensional finite difference method is described to determine the time-dependent temperature distributions and the self-equilibrated longitudinal stresses distributions within the cross section of concrete bridges. The results derived from the present method are compared with experimental and analytical results obtained by other authors, exhibiting a general good agreement. The numerical program developed has shown to be an useful tool for the analysis and design of concrete bridges in front of environmental thermal effects.

## INTRODUCCION

Los puentes de hormigón se ven sometidos a estados tensionales inducidos por la acción térmica ambiental, a nivel sección y nivel estructura, siendo el perfil y magnitud de las tensiones dependiente de la distribución de temperaturas existentes a través de las diferentes secciones transversales que conforman la estructura del puente y de las condiciones de vinculación de éste.

Recientes análisis experimentales han mostrado que, en algunos casos, las condiciones ambientales y climatológicas en las que se encontraban inmersos los puentes de

Recibido: Marzo 1987

hormigón eran más severas que las previamente consideradas en diseño. Ello, lógicamente, se traduce en una subestimación de las tensiones térmicas inducidas y, por consiguiente, en un dimensionamiento de la sección y de la armadura no idóneo para hacer frente a tales tensiones. Asimismo, estudios relativos a patologías observadas en algunos puentes de hormigón y a su puesta fuera de servicio, en determinados casos, confirmaron que la razón desencadenante de ello fue un inadecuado diseño de la estructura frente a la acción térmica ambiental y la no consideración de determinadas sollicitaciones térmicas que pueden presentarse con notable frecuencia en la vida de proyecto de los puentes de hormigón (Leonhardt et al<sup>1</sup>, Priestley<sup>2</sup>, Imbsen et al<sup>3</sup>, Zichner<sup>4</sup>).

Así pues, una cuantificación realista de los estados tensionales térmicos inducidos en puentes de hormigón pasa necesariamente por la obtención de unas distribuciones de temperaturas acordes con la realidad física del fenómeno de la transmisión de calor.

Diversos modelos analíticos de obtención de distribución de temperaturas en puentes de hormigón han sido desarrollados por diferentes investigadores. Dichos modelos se han basado fundamentalmente en la aplicación de técnicas numéricas como son los elementos finitos (Elbadry y Ghali<sup>5</sup>) y las diferencias finitas (Emerson<sup>6</sup>, Priestley<sup>2</sup>, Zichner<sup>4</sup>, CEB<sup>7</sup>). En este artículo se expone un modelo de análisis basado en un método bidimensional en diferencias finitas que permite obtener las distribuciones de temperaturas a través de las secciones transversales de puentes de hormigón de geometría arbitraria y su variación en el tiempo en función de las condiciones ambientales y climatológicas existentes en el lugar de emplazamiento. Los resultados obtenidos mediante la aplicación del presente modelo han sido corroborados con mediciones experimentales de temperatura in situ en diferentes puentes de hormigón y con resultados de otros estudios teóricos basados en el método unidimensional de diferencias finitas y en el método de los elementos finitos.

En lo referente a las condiciones de contorno a aplicar, conviene que éstas sean modeladas de forma adecuada para asegurar así una respuesta térmica y tensional fidedigna. En particular, son de suma importancia la ganancia de calor debida a la intensidad de radiación solar incidente sobre cualquier superficie del tablero y las pérdidas o ganancias de calor inducidas por los fenómenos de convección e irradiación térmica a través del contorno del tablero de los puentes de hormigón. Asimismo, en el caso de presencia de capa asfáltica de rodadura, ésta debe ser considerada. Por último, en la tipología de puentes cajón, se hace necesario el establecer la condición de contorno relativa a la pérdida o ganancia de calor a través del contorno interior de las células, hecho éste que se traduce en una variación en el tiempo de la temperatura del aire ocluido en el interior de las células.

## MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN PUENTES DE HORMIGÓN

Las estructuras expuestas a la intemperie y, en particular, los puentes de hormigón se encuentran sometidos a un intercambio de energía calorífica a través de las superficies de su contorno, hacia o desde el entorno que los rodea. Tal intercambio de energía calorífica entre ambos medios —puente de hormigón y medio ambiente— depende de numerosos factores aunque el proceso mediante el cual tiene lugar la transferencia de calor puede atribuirse a tres mecanismos principalmente, ya conocidos, y que, en general, aparecen de forma simultánea (White<sup>8</sup>):

- Radiación solar e irradiación térmica del entorno y de la estructura

- Convección calorífica
- Conducción calorífica

De entre éstos es el calor transferido por radiación el de mayor importancia.

### Transferencia de calor por radiación

Durante las horas diurnas existe una ganancia neta de energía calorífica en la estructura del puente. Ello es resultado de la radiación solar incidente sobre las superficies exteriores del tablero y que ha sido absorbida por éste. Contrariamente, durante la noche, tiene lugar una pérdida de la energía calorífica almacenada por la estructura debida, en parte, a la radiación térmica emitida por ésta hacia los alrededores.

Así pues, la resolución del problema térmico en puentes de hormigón necesita del conocimiento de la radiación solar absorbida y del intercambio de energía calorífica existente entre el puente y el entorno ambiental que lo rodea debido a la irradiación térmica emitida por ambos medios.

Existen métodos analíticos simplificados y experimentales de obtención de la intensidad de radiación solar incidente (Coronas et al<sup>9</sup>). En lo que se refiere al valor del factor de absorción solar de los puentes de hormigón ( $0 < a < 1$ ), éstos se comportan como cuerpos grises siendo el color de las superficies externas del tablero la característica que presenta un efecto más significativo sobre el valor de dicho factor de absorción.

En cuanto al intercambio de energía calorífica entre las superficies del puente y el medio ambiente que lo circunda, éste puede evaluarse mediante la ley de la radiación de Stefan-Boltzmann.

$$E = e C_{SB} T_{abs}^4 \quad (1)$$

siendo  $E$  el poder emisivo total,  $C_{SB}$  la constante de Stefan-Boltzmann,  $e$  la emisividad total ( $0 < e < 1$ ) y  $T_{abs}$  la temperatura absoluta.

### Transferencia de calor por convección

El intercambio de calor entre las superficies externas del tablero del puente y el medio ambiente se lleva a cabo en una película de espesor indefinido. No obstante, dicho intercambio puede suponerse concentrado en una capa de un cierto espesor el cual puede aproximarse extrapolando la distribución prácticamente lineal de temperaturas junto al contorno hasta alcanzar la temperatura ambiente del aire  $T_a$  (capa límite).

Así, aplicando la fórmula de Fourier y operando sobre ella se llega a la conocida ley de enfriamiento de Newton

$$\Phi_c = h_c S (T_s - T_a) \quad (2)$$

El coeficiente de transferencia de calor por convección  $h_c$  es función de numerosas variables tales como la velocidad del viento, rugosidad de la superficie, . . . En general, su valor se determina mediante fórmulas empíricas en función de la velocidad del viento, la cual se encuentra relacionada con la temperatura del aire.

### Transferencia de calor por conducción

Mediante dicho mecanismo la energía calorífica se transmite de las moléculas con mayor energía cinética a las moléculas con menor energía cinética sin que se produzca transferencia de masa. Sin embargo, y tal como indica White<sup>8</sup>, el calor transferido por conducción entre las superficies de los puentes de hormigón y el entorno en el que se encuentran sumergidos es muy pequeño y difícil de cuantificar. Es por ello por lo que es bastante usual el admitir que la transferencia de calor por convección y conducción sea evaluada conjuntamente adoptando un coeficiente de transferencia de calor combinado el cual dependerá, fundamentalmente, de las variables que intervienen en el fenómeno de la convección calorífica.

### ECUACION DIFERENCIAL DE LA CONDUCCION DEL CALOR EN PUENTES DE HORMIGON Y CONDICIONES DE CONTORNO

La ecuación general de conducción del calor en medio anisótropo y régimen transitorio es

$$\text{div}(-\kappa \text{ grad } T) - \dot{q} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

El analizar teóricamente el comportamiento de los puentes de hormigón frente a los efectos térmicos ambientales y el estudiar el fenómeno de la conducción de calor a través de la masa de hormigón conlleva el adoptar un conjunto de hipótesis relativas al material hormigón y que éste, en general, y dado el régimen de temperaturas en el que nos movemos, verifica de forma más o menos precisa (González<sup>10</sup>):

- Hipótesis de medio continuo
- Hipótesis de isotropía térmica
- Hipótesis de homogeneidad térmica
- Hipótesis de permanencia térmica

En base al cumplimiento de dichas hipótesis y suponiendo que ha finalizado el proceso de fraguado se llega a la ecuación diferencial que gobierna el fenómeno de la conducción de calor en puentes de hormigón en régimen transitorio

$$\nabla^2 T = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4)$$

Los valores asignados a las propiedades térmicas del hormigón —difusividad térmica  $K=k/\rho c$ , conductividad térmica  $k$ , calor específico  $c$ — pueden encontrarse en diferentes referencias bibliográficas (Neville<sup>11</sup>).

Asimismo, cabe señalar que en el estudio del flujo térmico en puentes de hormigón parece obvio el extender la resolución de la ecuación diferencial de transmisión de calor a dominios bidimensionales —secciones transversales— asumiendo que existe equilibrio

térmico a lo largo del eje longitudinal del puente (Priestley<sup>2</sup>, Elbadry y Ghali<sup>5</sup>, Emerson<sup>6</sup>). Esta hipótesis se aproxima a la realidad ya que, por una parte, la sección transversal de un puente de hormigón, si varía, lo hace, en general, de forma muy gradual según la directriz y, por otra, las condiciones de contorno se suponen constantes a lo largo de la longitud del puente. Ello ha sido corroborado en recientes estudios experimentales y analíticos (Hoffman et al.<sup>12</sup>, Mirambell<sup>13</sup>).

La condición inicial viene definida por el conocimiento de la temperatura en todo el dominio de integración de la ecuación diferencial para un instante determinado, instante éste que se adopta como origen de tiempos.

La condición de contorno a imponer es la condición de Neumann de flujo prescrito en las superficies del dominio. Dicho flujo viene definido por la existencia simultánea de los mecanismos de transferencia de calor citados anteriormente.

$$k \left( \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) + q = 0 \quad (5)$$

En esta expresión  $T$  y  $q$  son funciones del punto y del tiempo.

El calor ganado debido a radiación solar (radiación de onda corta) puede expresarse mediante la relación

$$q_s(x, y, t) = a I(x, y, t) \quad (6)$$

en la cual  $I(x, y, t)$  es la radiación solar total incidente sobre cualquier punto de la superficie en el instante  $t$  y  $a$  es el factor de absorción solar.

El calor perdido o ganado en las superficies por convección como resultado de la diferencia de temperaturas existente entre la superficie expuesta y el aire viene determinado por la ley de enfriamiento de Newton

$$q_c(x, y, t) = h_c [T(x, y, t) - T_a(t)] \quad (7)$$

El calor transferido entre las superficies expuestas del tablero del puente y el entorno ambiental que lo rodea, debido a irradiación térmica (radiación de onda larga), se determina a través de la ley de Stefan-Boltzmann que escrita en una forma cuasi-lineal presenta la siguiente expresión

$$q_r(x, y, t) = h_r(x, y, t) [T(x, y, t) - T_a(t)] \quad (8)$$

En dicha expresión  $h_r$  es el coeficiente de transferencia de calor por radiación, dependiente de la temperatura, y que puede obtenerse a partir de la siguiente ecuación

$$h_r(x, y, t) = e C_{SB} [(T(x, y, t) + T^*)^2 + (T_a(t) + T^*)^2] \\ (T(x, y, t) + T_a(t) + 2T^*) \quad (9)$$

En resumen, la condición de contorno a imponer en las superficies externas de los tableros de los puentes de hormigón puede expresarse como

$$k \left( \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) + aI + h_c (T - T_a) + h_r (T - T_a) = 0 \quad (10)$$

en donde  $T$ ,  $I$  y  $h_r$  son funciones del punto y del tiempo.

En general, sobre el hormigón estructural de los puentes suele disponerse una capa asfáltica de rodadura de pocos centímetros de espesor. El hecho de que el asfalto posea un elevado factor de absorción solar y una baja conductividad térmica, con valores claramente distintos a los que presenta el hormigón, hace necesario considerar en el modelo la existencia de tal capa asfáltica. La suposición de que ambos medios —hormigón y asfalto— se encuentran íntimamente ligados implica el imponer la condición de contorno de continuidad de flujo calorífico en la interfase

$$k_a \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{interfase} = k_h \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{interfase} \quad (11)$$

Para la modelización numérica de esta condición se ha adoptado la hipótesis realista de que en la capa asfáltica el flujo calorífico es unidireccional según la dirección de la normal a la interfase —el espesor de asfalto es pequeño en comparación con las dimensiones de cantos y espesores de las secciones más usuales en las tipologías transversales de los puentes de hormigón—.

En el caso de secciones celulares —puentes cajón, puentes losa aligerada—, para determinar de forma precisa la distribución de temperaturas es necesario considerar la presencia de aire ocluido en las células o aligeramientos. La condición de contorno a imponer es que el flujo de calor emitido a través del contorno de las células por mecanismos de convección y radiación térmica se invierta en incrementar la temperatura del aire ocluido en dichas células

$$\int_0^s (h_c + h_r) [T(s, t) - T_{cel}(t)] ds = \rho_{aire} c_{aire} V_{cel} \frac{dT_{cel}}{dt} \quad (12)$$

La figura 1 muestra, a modo de resumen, los principales mecanismos de transferencia de calor en puentes de hormigón y las pertinentes condiciones de contorno contempladas en el desarrollo del presente modelo.

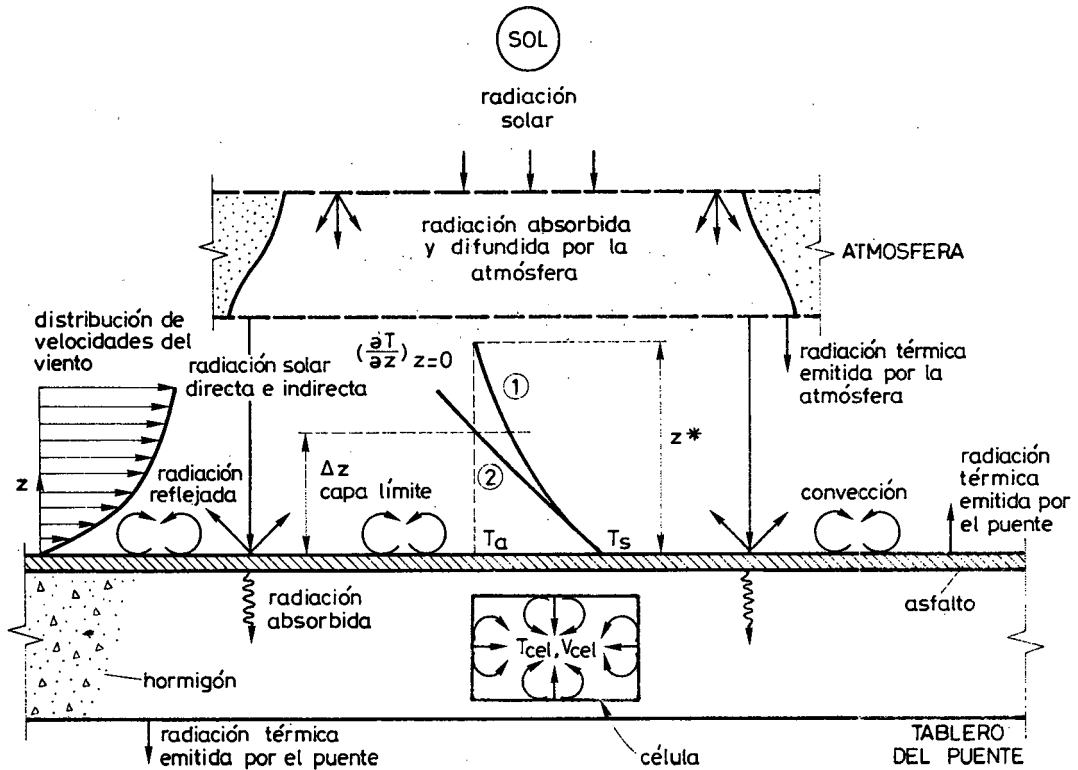


Figura 1. Mecanismos principales de transferencia de calor en puentes de hormigón. Condiciones de contorno particulares.

METODO DE RESOLUCION DE LA ECUACION DE FLUJO DE CALOR

Las soluciones exactas disponibles de la ecuación diferencial del calor se encuentran limitadas a la resolución de problemas lineales sobre dominios de formas muy simples (Carslaw y Jaeger<sup>14</sup>). La complejidad del contorno de las secciones transversales de los tableros de puentes de hormigón y la dificultad de manejar analíticamente condiciones de contorno debidas a fenómenos físicos complejos como son la convección y la radiación –variables en el tiempo– hacen que la forma idónea de abordar el problema sea la de emplear técnicas numéricas que conduzcan a soluciones aproximadas con un suficiente grado de precisión.

En particular, para este estudio, se ha utilizado un esquema bidimensional en diferencias finitas correspondiente al método explícito de resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La ecuación en diferencias resulta ser

$$T_{i,j,\Delta t} = T_{i,j} + \frac{k}{\rho c} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} [T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j} + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} (T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1})] \tag{13}$$

siendo la condición necesaria y suficiente para que la solución sea convergente y numéricamente estable el que

$$\frac{k}{\rho c} \frac{\Delta t}{\frac{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq \frac{1}{2} \quad (14)$$

Es importante destacar que dicha condición no asegura la estabilidad en los nodos exteriores en donde deben imponerse las condiciones de contorno relativas a absorción y radiación solar y pérdidas o ganancias de calor debidas a convección y radiación térmica. Planteando el balance energético en un nodo esquina se llega a la siguiente condición de estabilidad numérica de la solución (Mirambell<sup>13</sup>):

$$\Delta t \leq \frac{\rho c}{k} \frac{1}{2 \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) + \frac{1}{k} \left( \frac{h_1}{\Delta y} + \frac{h_2}{\Delta x} \right)} \quad (15)$$

Aunque dicha condición de estabilidad no suele citarse en las referencias bibliográficas se hace necesario el considerarla puesto que para altas velocidades de viento, lo cual implica elevados coeficientes de transferencia de calor por convección, la solución del problema térmico mediante un esquema explícito en diferencias finitas puede hacerse inestable.

La condición anterior impone una clara restricción al valor del incremento de tiempo a adoptar. Ello puede obviarse mediante la utilización de métodos implícitos incondicionalmente convergentes y estables. No obstante, tales métodos requieren de la solución de un sistema de tantas ecuaciones como nodos aparecen en la discretización del dominio considerado. En el caso particular de los puentes de hormigón, dicha discretización debe contemplar un número elevado de nodos para poder reflejar de forma adecuada el fenómeno de la transmisión de calor y las distribuciones de tensiones longitudinales autoequilibradas, haciéndose necesario invertir una matriz de orden relativamente elevado para cada escalón de tiempo. La utilización de tales métodos implícitos lleva consigo un aumento excesivo de las operaciones de cálculo de ordenador y de ahí, que, en algunos casos, se opte por el empleo de métodos explícitos (Zienkiewicz<sup>15</sup>).

En el caso que nos ocupa, la adopción de una malla suficientemente tupida (ver figura 7) no supone valores del incremento de tiempo excesivamente pequeños —en general, se encuentran comprendidos entre 0.20 horas y 0.50 horas—.

Por otra parte, es casi obligado el utilizar incrementos de tiempo de este orden de magnitud para poder seguir con detalle la evolución de las distribuciones de temperaturas, de las acciones térmicas y de las distribuciones de tensiones longitudinales asociadas. Dicho seguimiento permitirá obtener los valores máximo y mínimo de las acciones térmicas y las distribuciones tensionales correspondientes al instante en el que se genera la máxima tensión de tracción en el hormigón. Hay que señalar que los instantes para los cuales tienen lugar las situaciones más desfavorables son distintos en cada caso particular y dependen de los valores adoptados por los parámetros físicos, ambientales, geométricos y de emplazamiento que influyen en la respuesta térmica y tensional de



los puentes de hormigón. El entender el modelo y el programa numérico desarrollado como una útil herramienta de diseño a utilizar en amplios estudios paramétricos refuerza más, si cabe, la elección de un método de resolución que no arrastre consigo un excesivo tiempo de cálculo de ordenador (Mirambell<sup>13</sup>).

### TENSIONES LONGITUDINALES ASOCIADAS A LA DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS

Cara a la obtención de las tensiones longitudinales autoequilibradas se ha adoptado la hipótesis de Navier-Bernoulli —secciones planas permanecen planas después de deformarse—, hipótesis ésta presente en todos los trabajos de investigación que versan sobre la problemática de los efectos térmicos ambientales en puentes de hormigón.

Sea una sección genérica sometida a un campo no plano de temperaturas. Cada uno de los filamentos diferenciales en los que se podría discretizar idealmente dicha sección se deformaría proporcionalmente al cambio de temperatura experimentado (ver figura 2).

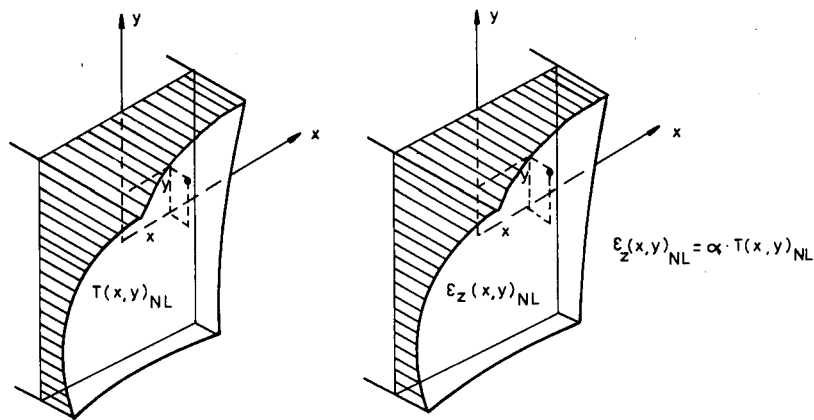


Figura 2. Distribución genérica de temperaturas. Estado asociado de deformaciones

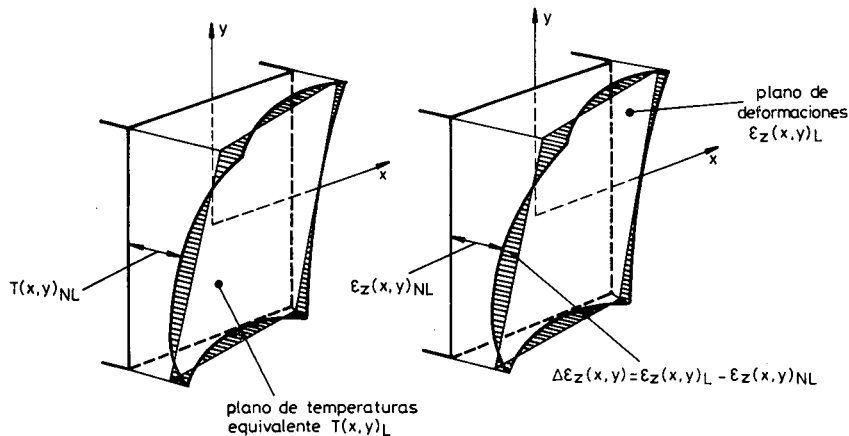


Figura 3. Plano equivalente de temperaturas y plano de deformaciones térmicas impuestas. Estado tensional longitudinal autoequilibrado.

El hecho de que deba verificarse la hipótesis de deformación plana implica la existencia de una interacción física entre cada uno de los filamentos longitudinales que impedirá la deformación térmica impuesta a nivel filamento. La diferencia entre las deformaciones originadas por temperatura al no tener en cuenta la interacción existente entre filamentos y las deformaciones térmicas impuestas inducidas por un campo plano equivalente de temperaturas da lugar a un estado tensional longitudinal autoequilibrado (ver figura 3).

El valor de dichas tensiones puede obtenerse a través de la siguiente expresión

$$\sigma_z(x,y) = E [\epsilon_z(x,y)_L - \alpha T(x,y)_{NL}] \quad (16)$$

El plano de deformaciones finales térmicas impuestas puede expresarse como

$$\epsilon_z(x,y)_L = \epsilon_o + \psi_x y + \psi_y x \quad (17)$$

en donde  $\epsilon_o$  es la deformación térmica impuesta a nivel de la fibra baricéntrica de la sección y  $\psi_x$  y  $\psi_y$  son las curvaturas térmicas impuestas alrededor de los ejes principales de inercia de la sección

$$\begin{aligned} \epsilon_o &= \frac{\alpha}{A} \iint_S T(x,y)_{NL} \, dx dy \\ \psi_x &= \frac{\alpha}{I_x} \iint_S T(x,y)_{NL} y \, dx dy \\ \psi_y &= \frac{\alpha}{I_y} \iint_S T(x,y)_{NL} x \, dx dy \end{aligned} \quad (18)$$

$A$  = área de la sección

$I_x, I_y$  = momentos de inercia principales de la sección

En resumen, la magnitud de las tensiones longitudinales autoequilibradas se obtiene a través de la siguiente expresión

$$\sigma_z(x,y) = E [\epsilon_o + \psi_x y + \psi_y x - \alpha T(x,y)_{NL}] \quad (19)$$

Es interesante señalar que dicho estado tensional autoequilibrado es independiente de las condiciones de apoyo y de vinculación de la estructura del puente y que, por consiguiente, aparecerá siempre que la distribución de temperaturas a través de la sección transversal a analizar sea no plana.

Las características generales del programa numérico desarrollado así como los aspectos relacionados con el esquema global y con las diferentes subrutinas de que consta pueden encontrarse en Mirambell<sup>13</sup>.

### IMPLEMENTACION NUMERICA DE LOS PARAMETROS AMBIENTALES

En este apartado se incide en la evaluación e implementación numérica de los parámetros ambientales cuya influencia sobre la respuesta térmica y tensional de los puentes de hormigón es más acusada. Estos son:

- La temperatura ambiente
- La velocidad del viento
- La radiación solar

#### La temperatura ambiente

Este parámetro climatológico interviene en las condiciones de contorno a imponer en las superficies exteriores del contorno de la sección transversal del tablero del puente. La pérdida o ganancia de calor por convección e irradiación térmica es proporcional a la diferencia de temperaturas existente entre los nodos situados en el perímetro externo y el medio ambiente exterior.

Las funciones empleadas con mayor asiduidad para modelizar matemáticamente la variación de la temperatura ambiente a lo largo del día son:

- Funciones bilineales
- Funciones biparabólicas
- Funciones sinusoidales

En cualquiera de los tres casos es necesario introducir como datos de partida las temperaturas ambiente máxima y mínima diaria así como los instantes del día para los cuales aparecen dichos máximo y mínimo.

#### La velocidad del viento

La velocidad del viento en el lugar de emplazamiento del puente afecta, fundamentalmente, al coeficiente de convección a adoptar en cada una de las superficies expuestas del tablero del puente. Las diferencias existentes entre los valores obtenidos para dicho coeficiente mediante la aplicación de diferentes fórmulas empíricas no son significativas, adoptándose en el modelo los coeficientes de convección propuestos por Kehlbeck<sup>16</sup>.

$$\begin{aligned}
 h_c &= 3.83 \ v + 4.67 && \text{superficie superior del tablero} \\
 h_c &= 3.83 \ v + 2.17 && \text{superficie inferior del tablero} \\
 h_c &= 3.83 \ v + 3.67 && \text{superficies laterales del tablero} \\
 h_c &= 3.5 && \text{superficies interiores} \\
 v &= \text{velocidad del viento (m/seg)}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

### La radiación solar

La radiación solar global diaria es uno de los parámetros climatológicos que muestra una mayor influencia sobre la respuesta térmica y tensional de los puentes de hormigón. Para su implementación numérica se consideran dos opciones.

La primera de ellas atiende a aquellos casos en los que se dispone de mediciones de radiación solar global diaria en función del día del año. La intensidad de radiación solar incidente sobre el tablero del puente como función del tiempo suele aproximarse mediante expresiones de tipo sinusoidal siendo la comúnmente utilizada la propuesta por Emerson<sup>6</sup>:

$$I(t) = \frac{2W}{T_o} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{T_o}\right) \quad (21)$$

En dicha expresión  $W$  representa la radiación solar global diaria sobre superficie horizontal y  $T_o$  representa la duración del día solar.

La segunda opción es más genérica y permite conocer en cualquier instante la intensidad de radiación solar incidente sobre cualquier superficie externa del tablero en base a datos objetivos relativos al lugar de emplazamiento del puente.

La cantidad de energía solar incidente sobre una superficie normal a los rayos solares, situada en la superficie terrestre, viene definida por la expresión

$$I_n = k_T I_{SC} \quad (22)$$

La intensidad de radiación solar extraterrestre  $I_{SC}$ , constante solar, varía ligeramente a lo largo del año debido a que la tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del sol. No obstante, en general, suele adoptarse un valor medio de  $1353 \text{ W/m}^2$  (Coronas et al<sup>9</sup>).

El factor de transmitancia  $k_T$  expresa la atenuación de la radiación solar debido a la presencia de la atmósfera terrestre. Dicho factor, adimensional, depende de las condiciones atmosféricas y de la longitud de las trayectorias que los rayos solares deben recorrer a través de la masa de aire existente. Según estudios realizados por Kehlbeck<sup>16</sup>, el factor  $k_T$  puede aproximarse mediante la siguiente relación:

$$k_T = 0.9^m t_u \quad (23)$$

En ella  $m$  depende de la altitud solar  $\beta$  y de la presión atmosférica relativa existente a la altitud del lugar de emplazamiento del puente y  $t_u$ , factor de turbidez, representa la atenuación de la radiación solar debido a la existencia de nubosidad y polución ambiental. Los valores que adopta dicho factor de turbidez pueden encontrarse en Dilger et al<sup>17</sup>.

En el caso de que los rayos solares formen un ángulo  $\theta$  con la normal a la superficie expuesta a radiación, el valor de la intensidad de radiación solar incidente normal a dicha superficie puede determinarse mediante la expresión

$$I = I_n \cos \theta \quad (24)$$

en donde al ángulo  $\theta$  viene definido por una ecuación trigonométrica que relaciona diferentes coordenadas angulares y horarias (Coronas et al<sup>9</sup>).

$$\begin{aligned} \cos \theta = & \text{sen } \delta \text{ sen } \phi \text{ cos } s - \text{sen } \delta \text{ cos } \phi \text{ sen } s \text{ cos } \gamma + \\ & + \text{cos } \delta \text{ cos } \phi \text{ cos } s \text{ cos } h + \text{cos } \delta \text{ sen } \phi \text{ sen } s \text{ cos } \gamma \text{ cos } h + \\ & + \text{cos } \delta \text{ sen } s \text{ sen } \gamma \text{ sen } h \end{aligned} \quad (25)$$

En dicha ecuación  $\delta$  es la declinación solar,  $\phi$  es la latitud del lugar de emplazamiento,  $s$  es la inclinación de la superficie,  $h$  es el ángulo horario y  $\gamma$  el azimut de la superficie.

En resumen, introduciendo como datos el día del año para el cual se analiza el puente, la latitud y altitud del lugar de emplazamiento del puente y el factor de turbidez existente puede obtenerse la intensidad de radiación solar incidente sobre el tablero para cualquier instante del día. Conociendo además el azimut del eje longitudinal del puente, el cual puede suponerse constante a lo largo de toda la directriz —los radios de curvatura de los puentes curvos son elevados—, es posible obtener la intensidad de radiación solar incidente sobre cualquier superficie externa del tablero.

En el caso de estar en presencia de puentes con tipologías transversales en las que los voladizos tengan una longitud considerable, fundamentalmente en puentes cajón, no todo el paramento lateral se ve expuesto a radiación solar directa puesto que el voladizo arroja sombra sobre él (ver figura 4).

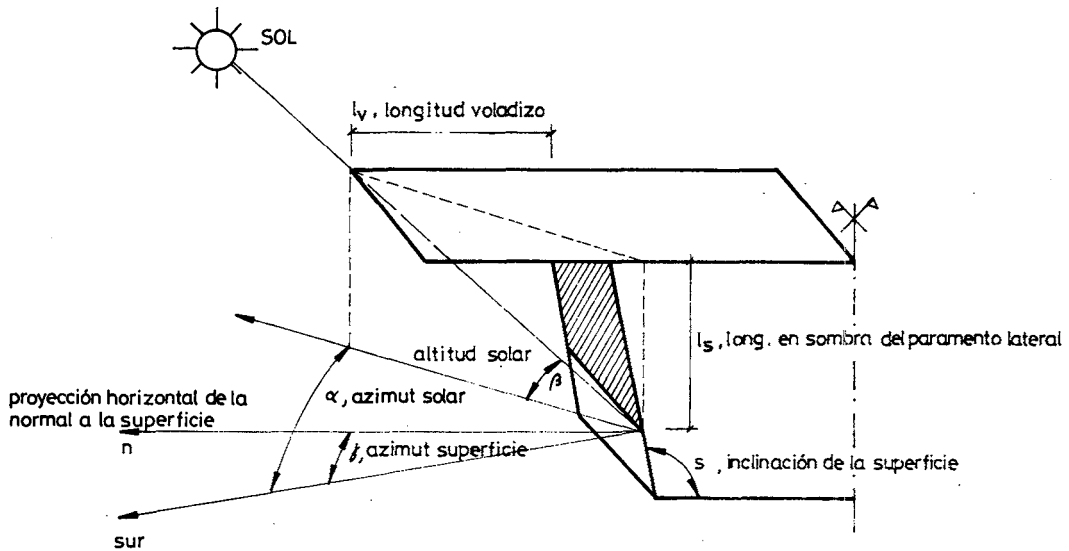


Figura 4. Determinación gráfica de la longitud en sombra del paramento lateral de una sección transversal genérica de tablero de puente de hormigón.

La ecuación que permite obtener la longitud del paramento lateral que se encuentra en sombra es la siguiente:

$$l_s = l_v \frac{\text{tg} \beta}{\text{cos}(\alpha - \gamma) - \text{tg} \beta \text{ tg}(s - \frac{\pi}{2})} \quad (26)$$

Ello es considerado en el modelo adoptando un determinado coeficiente de sombra o imponiendo la existencia de radiación solar incidente únicamente en aquellos nodos de los paramentos laterales no situados en sombra.

Esta segunda opción en la implementación numérica de la radiación solar presenta notables ventajas. Una de ellas es que permite un análisis particularizado del puente, tanto en comprobación como en diseño. Otra es que la posibilidad de contemplar radiación solar incidente sobre los paramentos laterales permite vislumbrar y cuantificar la importancia que tiene este efecto en el valor que adquiere el gradiente térmico transversal en puentes de hormigón. Dicho efecto puede observarse en uno de los ejemplos que se presentan a continuación.

## EJEMPLOS

En este apartado se presentan diversos ejemplos de aplicación del modelo desarrollado con objeto de mostrar su versatilidad así como la precisión del mismo. Para ello se analizan diferentes puentes de hormigón con tipologías transversales distintas. Los resultados obtenidos se comparan con resultados experimentales y analíticos obtenidos por otros autores.

### Puente Adur Bridge-slip road

En este ejemplo se analiza la respuesta térmica del puente Adur Bridge, Inglaterra, el cual presenta una tipología transversal de tablero de losa maciza con voladizos (ver figura 5).

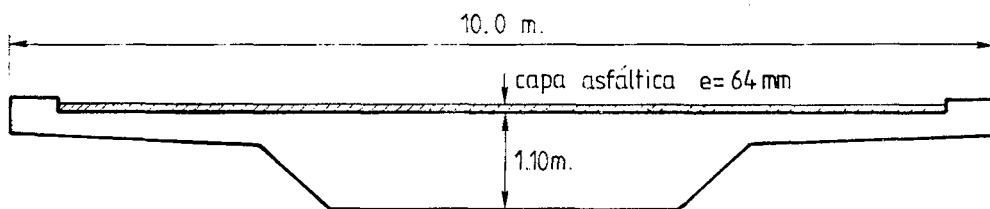


Figura 5. Sección transversal losa maciza del puente Adur.

Los resultados obtenidos según el presente modelo, relativos a distribuciones de temperaturas, se comparan con los derivados de la experimentación y con los resultados analíticos obtenidos por Emerson<sup>6</sup>. El modelo utilizado por esta investigadora se basa en la resolución de la ecuación diferencial mediante un método explícito unidimensional en diferencias finitas adoptando la hipótesis de flujo unidireccional.

El análisis térmico se realiza para el día 9 de Julio de 1971 al que corresponden las condiciones meteorológicas que se presentan en la tabla 1, algunas de las cuales fueron obtenidas experimentalmente. En esta misma tabla se recogen también los valores asignados a las propiedades físicas y térmicas del hormigón y del asfalto, necesarios para poder obtener las distribuciones de temperatura a través de la sección transversal del puente.

PROPIEDADES TERMICAS		
MATERIAL	HORMIGON	ASFALTO
Conductividad térmica (W/m°C) . . . . .	1.4 (.)	0.83 (..)
Calor específico (J/kg °C) . . . . .	960. (.)	
Densidad (kg/m³) . . . . .	2400. (.)	
Factor de absorción solar . . . . .	0.5 (.)	0.9 (.)
Emisividad . . . . .	0.88 (.)	0.92 (.)

CONDICIONES CLIMATOLOGICAS Y AMBIENTALES	
Radiación solar total diaria (09/07/71) (W·h/m²) . . . . .	7950. (*)
Duración del día solar (horas) . . . . .	18. (*)
Temperatura ambiente mínima (°C) . . . . .	12. (*)
Temperatura ambiente máxima (°C) . . . . .	33. (*)
Velocidad del viento (km/hora) . . . . .	11. (*)

Tabla 1. Datos necesarios para el análisis comparativo de los resultados relativos al puente Adur. (\*= valores experimentales, . =valores adoptados por Emerson, ..=valores adoptados en el presente estudio).

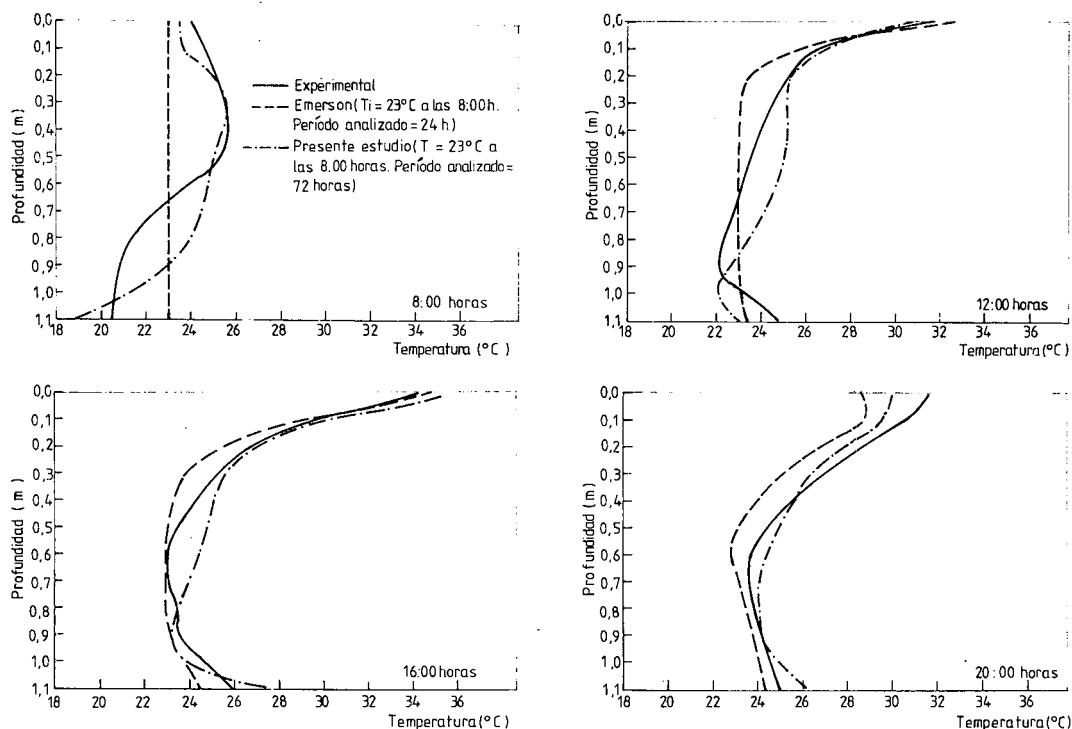


Figura 6. Distribuciones de temperaturas según el eje de simetría de la sección transversal del puente Adur, correspondientes a diferentes instantes del día 9 de Julio de 1971.

La figura 6 muestra las distribuciones de temperaturas según el eje de simetría, correspondientes a diferentes instantes del día. Se presentan los resultados correspondientes a las 8 horas, 12 horas, 16 horas y 20 horas solares por ser estos instantes aquéllos para los cuales se dispone de mediciones experimentales.

En dicha figura puede observarse que los resultados obtenidos mediante el modelo propuesto se ajustan de forma bastante precisa a los derivados de la experimentación. Desde un punto de vista cualitativo, los perfiles de las distribuciones de temperaturas son muy similares entre sí y, cuantitativamente, las diferencias de temperaturas para cualquier instante del día y para cualquier profundidad no son excesivas, no superándose en ningún nodo diferencias del orden del 11%.

Analizando comparativamente los resultados analíticos obtenidos por Emerson con los derivados del presente modelo pueden apreciarse diferencias, las cuales no vienen originadas por el hecho de contemplar dominios unidimensionales o bidimensionales sino por el hecho de que las condiciones iniciales de contorno impuestas en los respectivos estudios son diferentes. Una forma de paliar la influencia de la condición inicial es la de extender el período de tiempo a analizar imponiendo cíclicamente las condiciones ambientales y climatológicas existentes en el día para el que se pretende obtener la respuesta térmica del puente. Ello, sin embargo, no solventa de forma total el problema puesto que la condición inicial de contorno vendrá regida, en la mayoría de los casos, por las condiciones ambientales existentes en el lugar de emplazamiento del puente en días previos al del análisis.

### Puente cajón unicelular

Este ejemplo tiene como finalidad el comparar los resultados obtenidos mediante la aplicación del presente modelo con los derivados de la aplicación de un modelo analítico basado en el método de los elementos finitos.

Elbadry y Ghali<sup>5</sup> obtienen la respuesta térmica y tensional de un puente cajón unicelular emplazado hipotéticamente en la ciudad de Calgary, Canadá. El modelo analítico desarrollado por estos investigadores se basa en el método de los elementos finitos y en la técnica de los residuos ponderados de Galerkin para llevar a cabo la integración de la ecuación diferencial en el tiempo.

La sección transversal de dicho puente así como las respectivas mallas de discretización utilizadas en ambos modelos pueden observarse en la figura 7.

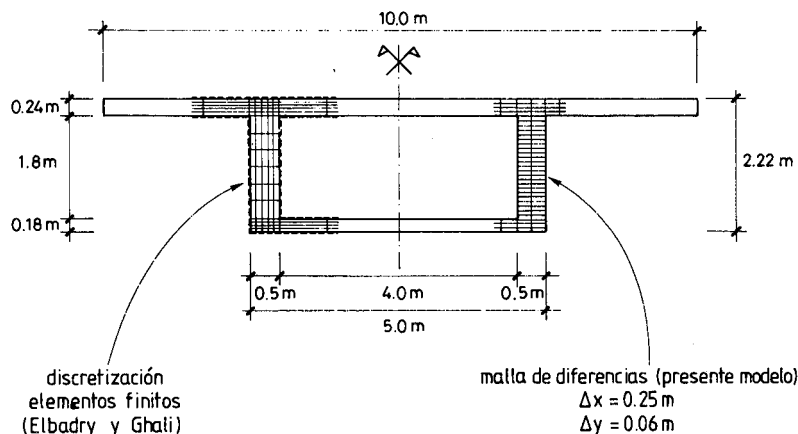


Figura 7. Sección transversal del puente analizado. Mallas de discretización utilizadas en los modelos analíticos que se comparan.



Los datos de partida para poder realizar el análisis térmico y tensional han sido extraídos de la referencia anteriormente citada y se presentan en la tabla 2.

PROPIEDADES FISICAS Y TERMICAS DEL HORMIGON	
Conductividad térmica (W/m °C) . . . . .	1.5
Calor específico (J/kg °C) . . . . .	960.
Factor de absorción solar . . . . .	0.5
Emisividad . . . . .	0.88
Coefficiente dilatación térmica (°C <sup>-1</sup> ) . . . . .	8×10 <sup>-6</sup>
Densidad (kg/m <sup>3</sup> ) . . . . .	2400.
Módulo de elasticidad (kp/cm <sup>2</sup> ) . . . . .	273860.
CONDICIONES CLIMATOLOGICAS Y AMBIENTALES	
Día del año . . . . .	21 de Marzo
Velocidad del viento (m/seg) . . . . .	1.0
Temperatura ambiente mínima (°C) . . . . .	-15.0
Temperatura ambiente máxima (°C) . . . . .	5.0
Factor de turbidez . . . . .	1.8
DATOS RELATIVOS AL EMPLAZAMIENTO DEL PUENTE	
Latitud (°N) . . . . .	51.03
Altitud (m) . . . . .	1050.
Azimut (°) . . . . .	0. (eje E-O)

Tabla 2. Datos necesarios para el análisis comparativo de resultados relativos al puente cajón analizado.

La figura 8 muestra las distribuciones de temperaturas según el eje vertical de simetría del alma. Tales distribuciones corresponden, en ambos casos, al instante en el que se inducen los máximos gradientes térmicos verticales —máximas curvaturas térmicas impuestas—. Hay que señalar que en ambos estudios dicho instante prácticamente coincide y ocurre próximo a las 16 horas solares y que los perfiles y magnitud de las distribuciones de temperaturas son prácticamente idénticos.

Asimismo, mediante la aplicación del presente modelo, se ha obtenido la distribución de temperaturas correspondiente también al instante de máxima curvatura térmica imponiendo una condición inicial de contorno más acorde con la realidad física (temperatura uniforme de -5.5°C a las 7 horas solares). Ello introduce cambios en la magnitud de las temperaturas a través de la sección transversal del puente. Por una parte, las temperaturas en todos los nodos alcanzan valores algo más elevados y, por otra, los nodos que se encuentran a menor temperatura se sitúan a una profundidad mayor. Ello corrobora la idea ya apuntada de que la influencia de la condición inicial debe ser analizada para poder conocer con mayor precisión la respuesta térmica de los puentes de hormigón.

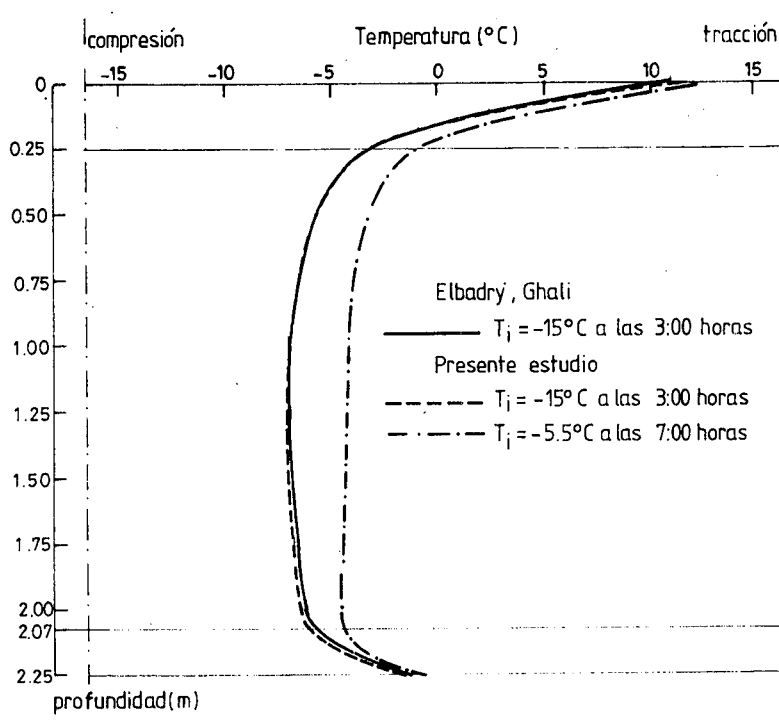


Figura 8. Distribuciones de temperaturas según el eje vertical de simetría del alma correspondientes al instante de máxima curvatura térmica impuesta (puente emplazado en Calgary, Canadá, condiciones de primavera).

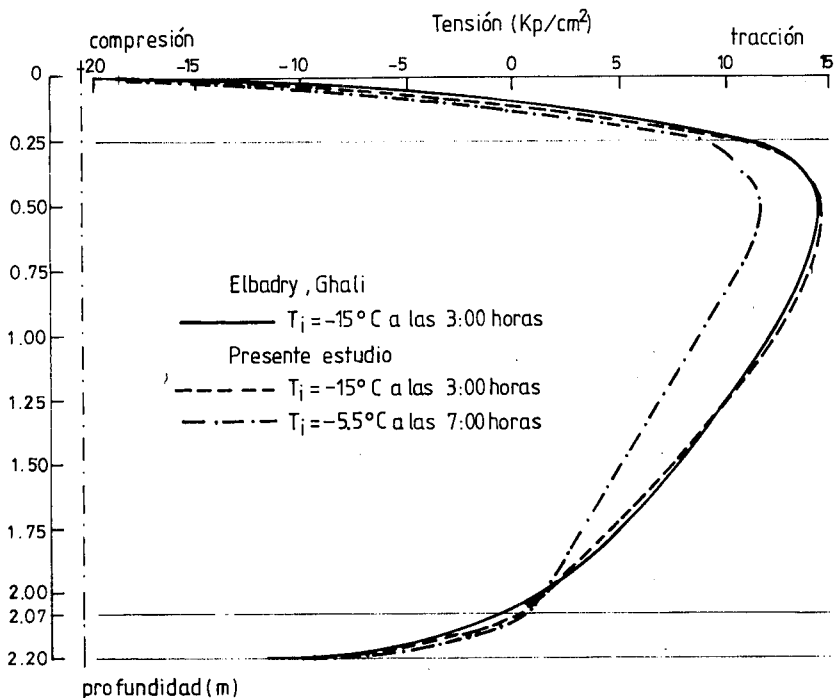


Figura 9. Distribuciones de tensiones longitudinales autoequilibradas según el eje vertical de simetría del alma correspondientes al instante de máxima curvatura térmica impuesta (puente emplazado en Calgary, Canadá, condiciones de primavera).

Las figuras 9 y 10 muestran respectivamente las distribuciones de tensiones longitudinales autoequilibradas según el eje vertical de simetría del alma, asociadas a las distribuciones de temperaturas existentes en el instante de máximo gradiente térmico vertical, y las evoluciones diarias de la curvatura térmica impuesta. De nuevo, puede apreciarse un buen ajuste entre los resultados presentados.

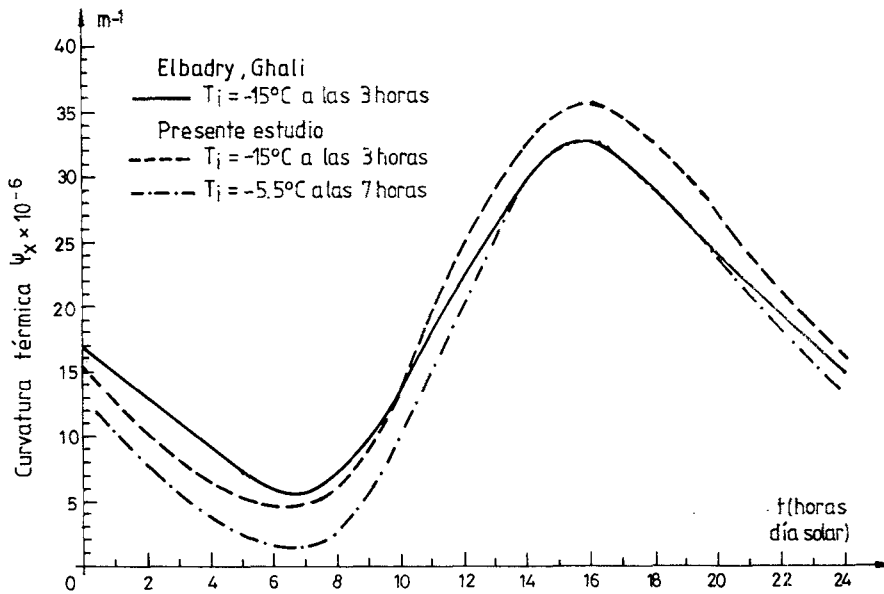


Figura 10. Evolución diaria de la curvatura térmica vertical impuesta (puente emplazado en Calgary, Canadá, condiciones de primavera).

**Puente emplazado en el recinto de la Universidad de Pennsylvania**

En este ejemplo, los resultados experimentales de temperaturas obtenidos en diversos puntos de una dovela de un puente cajón unicelular instrumentado a tal fin (Hoffman et al<sup>12</sup>) se comparan con los derivados del modelo desarrollado. La figura 11 muestra una planta del puente analizado así como la disposición de termopares en la dovela instrumentada.

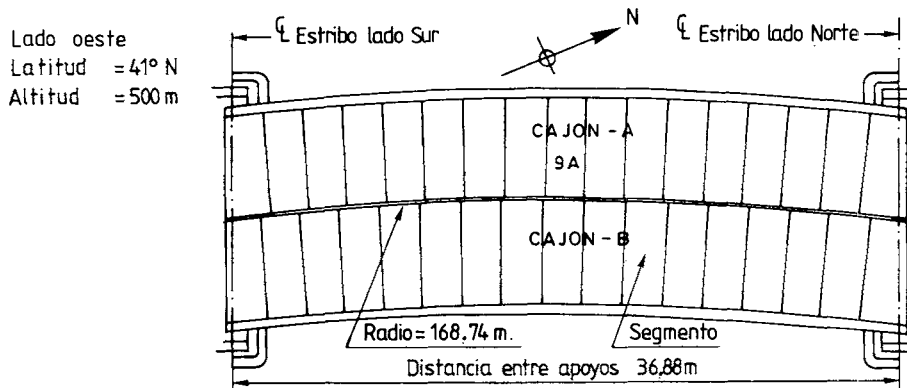


Figura 11. Planta del puente instrumentado (dovela 9A). Sección transversal del puente y disposición de termopares.

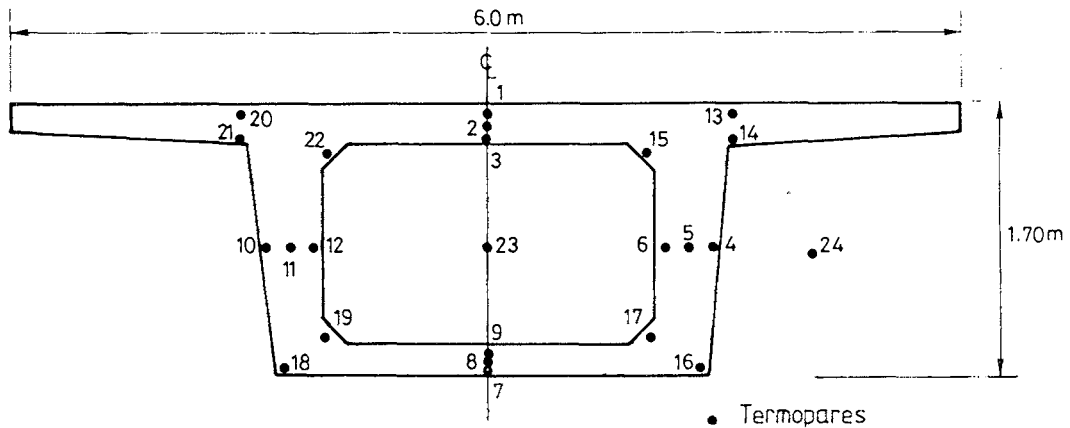


Figura 11. (continuación) Planta del puente instrumentado (dovela 9A).  
Sección transversal del puente y disposición de termopares.

A lo largo del período de registro de temperaturas –Octubre de 1978 a Octubre de 1979– se llevaron a cabo paralelamente medidas experimentales de intensidad de radiación solar global, temperatura ambiente y velocidad de viento.

Los datos necesarios para obtener la respuesta térmica a nivel sección se presentan en la tabla 3.

PROPIEDADES FISICAS Y TERMICAS DEL HORMIGON		
Conductividad térmica (W/m °C) . . . . .	1.5	
Calor específico (J/kg °C) . . . . .	960.	
Factor de absorción solar . . . . .	0.5	
Emisividad . . . . .	0.88	
Coefficiente de dilatación térmica (°C <sup>-1</sup> ) . . . . .	10×10 <sup>-6</sup>	
Densidad (kg/m <sup>3</sup> ) . . . . .	2400.	
Módulo de elasticidad (kp/cm <sup>2</sup> ) . . . . .	351786.	
CONDICIONES CLIMATOLOGICAS Y AMBIENTALES		
Radiación solar total diaria (16/07/79) (Wh/m <sup>2</sup> ) . . .	4710.	(*)
Duración del día solar (horas) . . . . .	16.	(*)
Temperatura ambiente mínima (°C) . . . . .	20.0	(*)
Temperatura ambiente máxima (°C) . . . . .	31.8	(*)
Velocidad del viento (m/seg) . . . . .	1.0	(*)

Tabla 3. Datos necesarios para el análisis comparativo de los resultados relativos al puente analizado, correspondientes al 16 de Julio de 1979 (\*= valores experimentales).

La figura 12 muestra las distribuciones de temperaturas, según un eje vertical de la sección, correspondientes a diferentes instantes del día –16 de Julio de 1979–, obtenidas experimentalmente y según el presente modelo analítico.

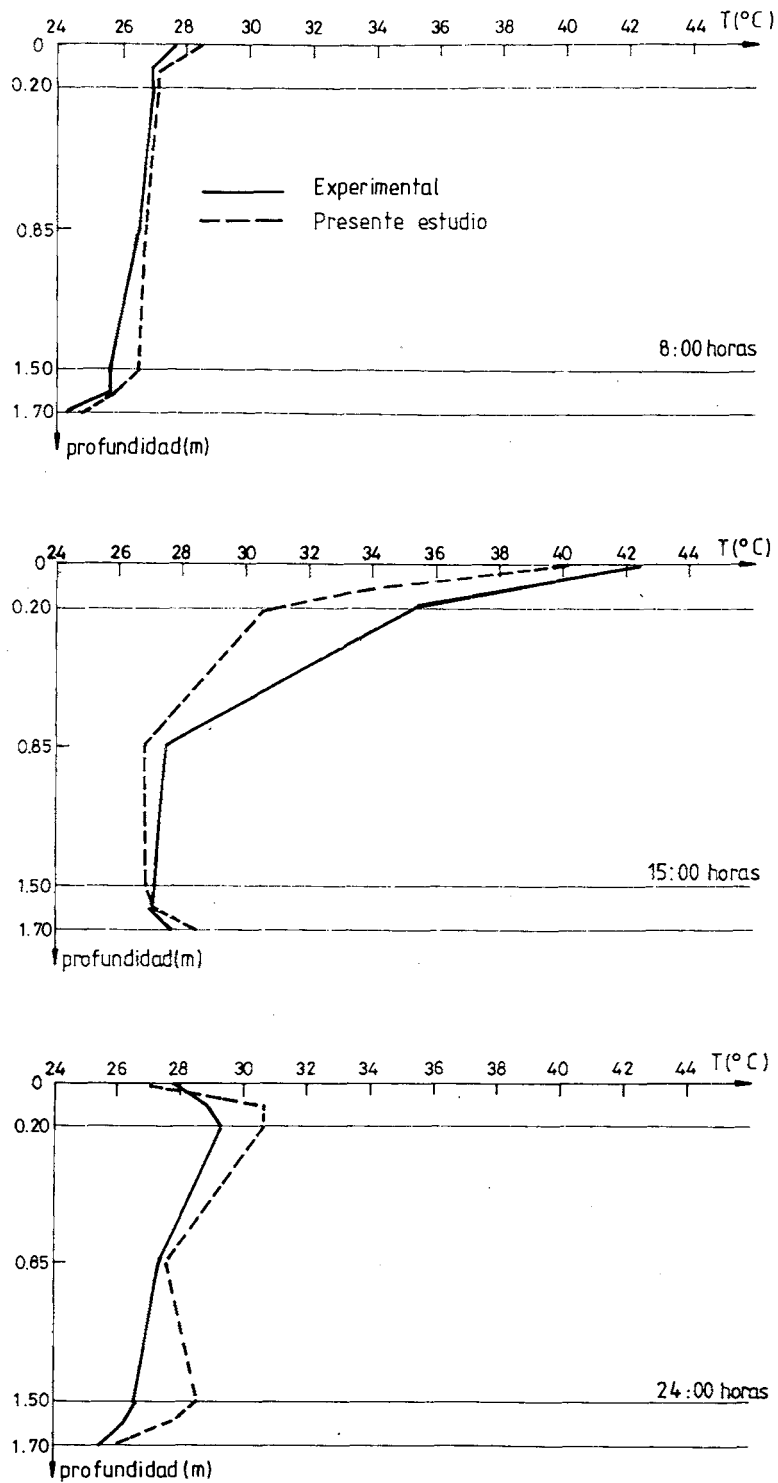


Figura 12. Distribuciones de temperaturas según un eje vertical imaginario que conecta los termopares 1, 2, 3, 5, 9, 8, y 7, correspondientes a diferentes instantes del día 16 de Julio de 1979.

En dicha figura puede apreciarse que los perfiles y evolución de la distribución de temperaturas son muy similares entre sí no observándose diferencias superiores a un 13%.

A continuación se presentan los resultados experimentales y analíticos correspondientes al día 2 de Mayo de 1979. Dicho estudio tiene interés por dos razones, fundamentalmente. La primera es que se contrasta de nuevo el modelo analítico desarrollado, pero adoptando en este caso la opción genérica de obtener la intensidad de radiación solar incidente sobre las superficies expuestas en función de datos objetivos, relativos al lugar de emplazamiento del puente instrumentado. La segunda es que los resultados experimentales correspondientes a este día muestran que existe radiación solar incidente sobre una de las almas de la sección cajón, lo cual origina la aparición de un gradiente térmico transversal. El modelo analítico desarrollado permitirá visualizar y cuantificar tal efecto.

Los datos necesarios para obtener la respuesta térmica del tablero del puente instrumentado se presentan en la tabla 4.

PROPIEDADES FISICAS Y TERMICAS DEL HORMIGON	
Conductividad térmica (W/m °C) . . . . .	1.5
Calor específico (J/kg °C) . . . . .	960.
Factor de absorción solar . . . . .	0.5
Emisividad . . . . .	0.88
Coefficiente dilatación térmica (°C <sup>-1</sup> ) . . . . .	10×10 <sup>-6</sup>
Densidad (kg/m <sup>3</sup> ) . . . . .	2400.
Módulo de elasticidad (kp/cm <sup>2</sup> ) . . . . .	351786.
CONDICIONES CLIMATOLOGICAS Y AMBIENTALES	
Día del año . . . . .	2 de Mayo
Velocidad del viento (m/seg) . . . . .	1.0
Temperatura ambiente mínima (°C) . . . . .	4.4
Temperatura ambiente máxima (°C) . . . . .	15.0
Factor de turbidez . . . . .	1.8
DATOS RELATIVOS AL EMPLAZAMIENTO DEL PUENTE	
Latitud (°N) . . . . .	41.0
Altitud (m) . . . . .	500.
Azimut (°) . . . . .	+80.

Tabla 4. Datos necesarios para el análisis comparativo de los resultados relativos al puente analizado, correspondientes al 2 de Mayo de 1979.

En la figura 13 se presentan las distribuciones, experimentales y analíticas, de temperaturas según un eje horizontal de la sección del tablero, correspondientes a diferentes instantes del día contemplado en el presente análisis.

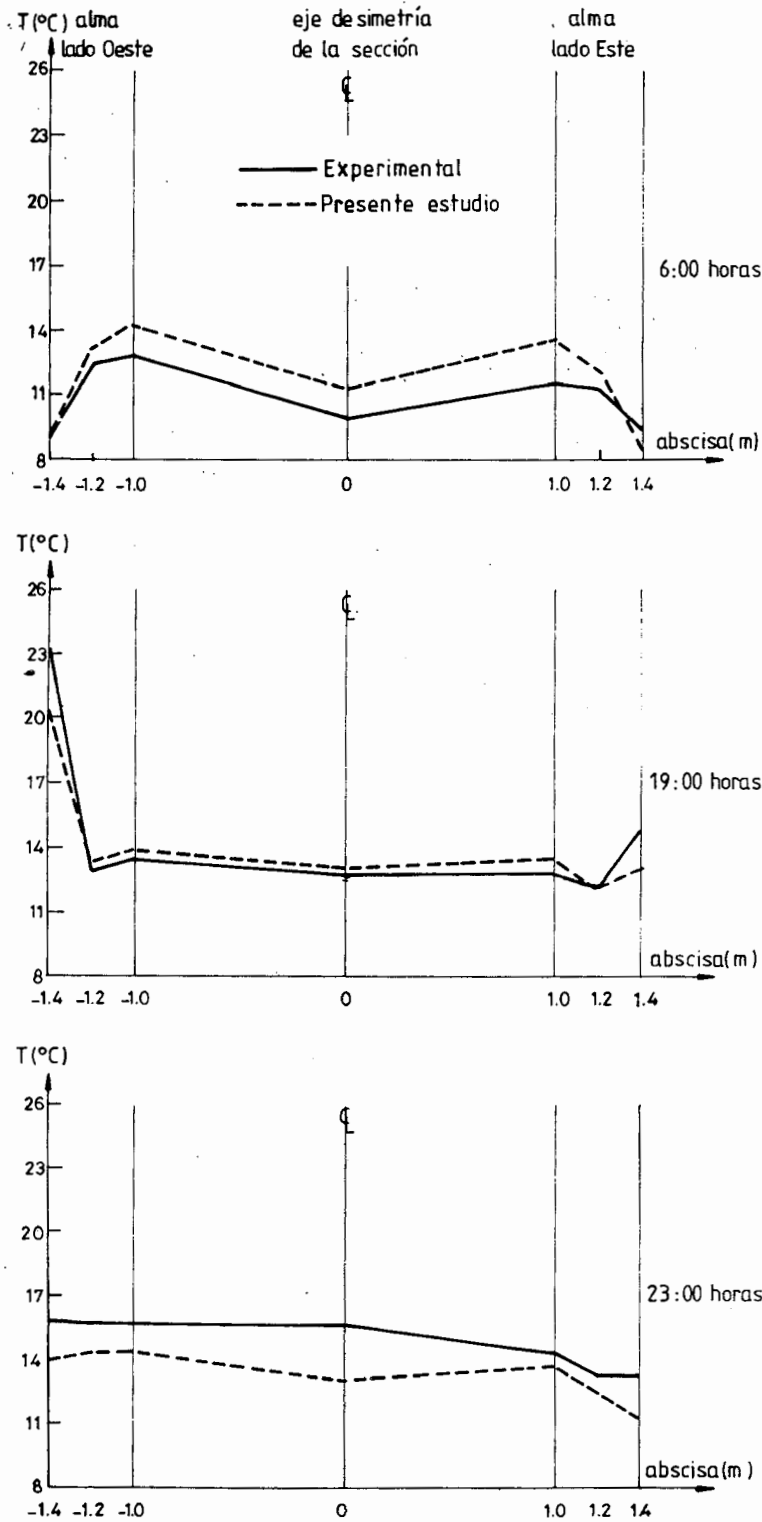


Figura 13. Distribuciones de temperaturas según un eje horizontal imaginario que conecta los termopares 10, 11, 12, 8, 6, 5 y 4, correspondientes a diferentes instantes del día 2 de Mayo de 1979.

En ella puede observarse que, cualitativamente, los perfiles y evolución diaria de las distribuciones del campo de temperaturas son muy similares entre sí. Desde un punto de vista cuantitativo la diferencia máxima encontrada para todos los nodos contemplados es de un 17%. Las diferencias observadas son lógicas puesto que, por una parte, el modelo no contempla la existencia de peralte en los puentes con planta curva y, por otra, determinados parámetros climatológicos han sido implementados numéricamente adoptando hipótesis simplificativas —constancia de la velocidad del viento a lo largo del día y variación sinusoidal de la temperatura ambiente— las cuales, para algunos instantes del día, no permiten reflejar con total precisión las condiciones reales existentes.

En cualquier caso, es de interés señalar que la influencia de la radiación solar incidente sobre los paramentos laterales de tableros de puentes de hormigón puede ser significativa y así lo muestran los resultados experimentales y analíticos obtenidos en este ejemplo. El gradiente térmico horizontal máximo ha podido ser evaluado en 2.5°C y tiene lugar en un instante próximo a las 19 horas solares.

### CONSIDERACIONES FINALES

El modelo analítico desarrollado de cara a la obtención de la respuesta térmica y tensional en puentes de hormigón, basado en un esquema explícito bidimensional en diferencias finitas, ha sido contrastado con otros modelos analíticos —diferencias finitas unidimensionales y elementos finitos— y estudios experimentales de medición de temperaturas en puentes de hormigón consiguiéndose una gran bondad en el ajuste. Sus principales características son, por una parte, su sencillez y escaso tiempo de cálculo de ordenador y, por otra, su versatilidad de cara a poder contemplar cualquier tipología transversal de tablero de puente de hormigón comúnmente adoptada en diseño.

El programa numérico confeccionado se muestra como una útil herramienta de análisis para determinar la influencia de cada uno de los parámetros que intervienen en el fenómeno de la transmisión de calor en puentes de hormigón y permite desarrollar una metodología de obtención de acciones térmicas y estados tensionales asociados a considerar en el diseño de puentes de hormigón frente a los efectos térmicos ambientales (Mirambell<sup>13</sup>).

La obtención de unas distribuciones de temperaturas acordes con la realidad física del problema debe pasar por la necesidad de contemplar dominios bidimensionales —secciones transversales— y flujos de calor bidireccionales. Asimismo, es necesario imponer la condición de continuidad de flujo de calor en la interfase asfalto-hormigón. En el caso de secciones celulares —puentes cajón, puentes losa aligerada— la evolución de la temperatura en el interior de las células o aligeramientos debe ser evaluada.

En lo referente a las condiciones de convergencia y estabilidad numéricas correspondientes al método explícito de diferencias hay que señalar que aquéllas son más restrictivas en los nodos exteriores y de esquina que en los nodos interiores. De ahí el que se recomiende adoptar el siguiente incremento de tiempo

$$\Delta t \leq \frac{1}{K} \frac{1}{4 \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right)}$$



Dicha condición debe verificarse fundamentalmente en los casos en que los puentes de hormigón se vean expuestos a altas velocidades de viento en su lugar de emplazamiento.

La adopción de una malla en diferencias no suficientemente tupida puede conducir a valores de gradientes térmicos y de tensiones longitudinales autoequilibradas sensiblemente diferentes a los existentes en la realidad. Así pues, se recomienda una discretización tal que el incremento de ordenadas se encuentre próximo a 6 cms. y el incremento de abscisas a 15 cms. La influencia de la tupidez de la malla sobre la evolución de la temperatura media del puente no es tan importante.

El modelo desarrollado presenta dos opciones en lo que se refiere a la evaluación de la intensidad de radiación solar incidente sobre el tablero permitiendo así afrontar problemas de comprobación (la intensidad de radiación es conocida) y problemas de diseño (dicha intensidad no se conoce a priori). En este segundo tipo de problemas, es perfectamente posible obtener de forma analítica la intensidad de radiación solar incidente sobre cualquiera de los paramentos —superior y laterales— de la sección transversal del puente en función del lugar de emplazamiento del puente, de su orientación y de las condiciones ambientales y climatológicas existentes. Cabe señalar aquí que en puentes cajón y, dependiendo de las condiciones de emplazamiento y de orientación del puente, pueden inducirse gradientes térmicos transversales, acción térmica ésta a la que pocas normativas internacionales hacen referencia.

En comprobación —estudio particular, comparación con resultados experimentales— es necesario contemplar las condiciones ambientales existentes en días previos para poder definir de forma adecuada la distribución inicial de temperaturas —condición inicial—. En diseño, y dado que a priori no se conoce dicha condición inicial, es recomendable alargar el período de tiempo a analizar a 72 horas imponiendo cíclicamente las mismas condiciones de contorno. Actuando de esta forma se consigue disminuir la influencia de la distribución inicial de temperaturas sobre las acciones térmicas y distribuciones tensionales obtenidas. Asimismo, si se adopta como condición inicial una distribución uniforme es recomendable que la hora inicial de cálculo sea aquélla para la cual los gradientes sean prácticamente despreciables. En general, dicho instante se encuentra comprendido entre las 6 horas y 8 horas solares de la mañana.

#### REFERENCIAS

1. F. Leonhardt, G. Kolbe y J. Peter. "Temperaturunterschiede gefährden Spannbetonbrücke". (Temperature Differences endanger Prestressed Concrete Bridges). *Beton-und Stahlbetonbau*, Vol. 60, N.º 7. July, (1965).
2. M. J. N. Priestley. "Design of Concrete Bridges for Temperature Grandients". *ACI Journal*, Tittle N.º 75-23. May, (1978).
3. R. A. Imbsen, E. Vandershaf, R. Schamber y R. V. Nutt. "Thermal Effects in Concrete Bridge Superstructures". *Report 276*. National Cooperative Highway Research Program. Transportation Research Board. Washington D. C. September, (1985).
4. T. Zichner. "Thermal Effects on Concrete Bridges". *Bulletin d'Information* N.º 154. CEB. París, (1982).
5. M. M. Elbadry y A. Ghali. "Temperature Variations in Concrete Bridges". *Journal of Structural Engineering*, ASCW, Vol. 109, N.º 10. October, (1983).
6. M. Emerson. "The Calculation of the Distribution of Temperature in Bridges". *TRRL Report LR 561*. Department of the Environment. Transport and Road Research Laboratory. Crowthome, Berkshire, U. K. (1973).
7. CEB. "Thermal Effects in Concrete Structures". Task Group Thermal Effects. Commission II. Structural Analysis. CEB. París, (1983).

8. I. G. White. "Non-linear differential temperature distributions in concrete bridge structures: a review of the current literature". *Technical Report 525. Cement and Concrete Association*. May, (1979).
9. A. Coronas, M. Llorens y M. Villarrubia. "*Energía solar a Catalunya: Radiació solar i insolació*". Publicacions i Edicions Universitat de Barcelona. Conselleria d'Indústria i Energia. Generalitat de Catalunya. Barcelona, (1982).
10. F. González de Posada. "Campo térmico en obras de hormigón: Ecuaciones de recinto y condiciones de contorno". *Cuestiones térmicas en recintos de hormigón*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad de Santander. Santander. Noviembre, (1981).
11. A. M. Neville. "*Properties of Concrete*". Pitman International Text. London, (1981).
12. P. C. Hoffman, R. M. McClure y H. H. West. "The Temperature Problem in a Prestressed Box Girder Bridge". *The Pennsylvania Transportation Institute*. The Pennsylvania State University, University Park. Pennsylvania. January, (1984).
13. E. Mirambell. "Criterios de diseño en puentes de hormigón frente a la acción térmica ambiental". *Tesis Doctoral*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona. Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona. Marzo, (1987).
14. H. S. Carslaw y J. C. Jaeger. "*Conduction of Heat in Solids*". Clarendon Press, Oxford 2nd edition. Oxford, England, (1959).
15. O. C. Zienkiewicz. "*El método de los elementos finitos*" Editorial Reverté, S.A., Barcelona, España, (1979).
16. F. Kehlbeck. "Einfluss der Sonnenstrahlung bei Brückenbauwerken". (Effect of Solar Radiation on Bridge Structures). *Werner-Verlag*. Düsseldorf, (1975).
17. W. Dilger, A. Ghali, M. Chan, M. Cheung y M. Maes. "Temperature Stresses in Composite Box Girder Bridges". *Journal of Structural Engineering*, ACSE, Vol. **109**, N.º 6. June, (1983).