Anuario de Psicología
1999, vol. 30, nº 3, 71-89

Influencia de los modelos intuitivos en la comprensión de la multiplicación y la división

M. Oliva Lago
Purificación Rodríguez
Ángela Zamora
Luz Madroño
Universidad Complutense de Madrid

A partir del trabajo de Fischbein et al. (1985) que sugiere que los niños construyen tempranamente modelos intuitivos sobre la multiplicación y división, numerosas investigaciones han ofrecido datos consistentes con estos modelos. En este estudio analizamos el peso diferencial de los modelos en tres tipos de tareas: resolver algoritmos, resolver problemas y plantear problemas. Hemos incluido también dos grupos de edad (1º de ESO y 8º de EGB), así como tres tipos de cantidades (enteros, decimales y fracciones). Los resultados indicaron que los modelos intuitivos no tuvieron el mismo peso diferencial en las diferentes tareas. Por ejemplo, la tarea de plantear problemas no parecía reunir las condiciones bajo las que actúan los modelos intuitivos. Asimismo, la presencia de cantidades que alteraban una o más imposiciones de los modelos no influyó negativamente. Por el contrario, los errores de las dos tareas restantes se debieron a la aplicación de las reglas intuitivas.
Palabras clave: *modelos intuitivos, multiplicación, división, resolución de problemas, planteamiento de problemas*

Since the study by Fischbein et al. (1985) which suggested that children develop intuitive models about multiplication and division early, much research has offered data that corroborate these models. In this study we analyze the differential weight of the models in three kinds of task: algorithms, problem solving, and problem posing. We included two age groups (1st of ESO and 8th of EGB), and three kinds of quantities (whole numbers, decimals and fractions). The results indicated that the intuitive models did not have the same differential weight for the different tasks. For instance, the problem posing task did not seem suited to the conditions under which the intuitive models act. Likewise, the presence of quantities that failed to ob-

Correspondencia: Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación. Facultad de Psicología. Campus de Somosaguas. 28223 Madrid.

serve one or more restrictions of the models did not have a negative influence. In contrast, the errors committed in the two remaining tasks were almost exclusively due to the application of the intuitive rules.

Key words: *Intuitive models, multiplication, division, problem solving, problem posing.*

Uno de los problemas que afecta directamente al aprendizaje de los niños en la etapa escolar es el relacionado con las dificultades que encuentran en el área de matemáticas. Buena prueba de ello son los datos correspondientes a la investigación del año 1995 a cargo del Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE), donde se apuntó, entre otras cosas, que el cincuenta por ciento de los alumnos que terminaban la enseñanza primaria no dominaban las matemáticas. Asimismo, dicho estudio revelaba que si bien en las restantes áreas del currículum los alumnos de 6º de EGB superaban holgadamente las pruebas de conocimiento, en matemáticas apenas alcanzaban el aprobado. En esta misma línea, la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA), que agrupa a los organismos públicos de evaluación y estadística de todo el mundo, a través de un estudio comparativo del rendimiento escolar en matemáticas, no dejó muy bien parado a nuestro país, ya que ocupó el puesto número 20 entre los 25 países considerados. El estudio avanzó algunas de las causas explicativas de los resultados, indicando, aparte de la dificultad intrínseca de los contenidos matemáticos, razones como la inadecuación de los mismos para poner en práctica una pedagogía más vivaz y, sobre todo, la necesidad de formar mejor al profesorado en esta materia. A estas razones podemos añadir otras, como las apuntadas por Bermejo, Lago y Rodríguez (1996), referidas al hecho de que las dificultades de aprendizaje de las matemáticas no han sido suficientemente tratadas por los investigadores y a la escasez de instrumentos de diagnóstico que evalúen algo más que la velocidad o exactitud del cálculo.

De acuerdo con lo dicho hasta el momento, el estudio que aquí presentamos tiene por objeto ahondar en las causas que explican las dificultades encontradas por los niños en la resolución de las tareas de multiplicar y dividir. Este propósito no es nuevo en los trabajos que en los últimos años se vienen realizando en torno a las matemáticas, en los que se insiste en la importancia de investigar los procesos cognitivos subyacentes a la resolución de las tareas. A este respecto destacan especialmente los relativos al conteo (p. ej. Bermejo y Lago, 1994; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1989; Fuson, 1988, 1992; Gallistel y Gelman, 1992; Gelman y Gallistel, 1978; Gelman, Meck y Merkin, 1986; Lago, 1992), los que tratan sobre la adición y sustracción (p. ej., Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994; Bermejo, y Rodríguez, 1987, 1990, 1993, 1994; Carpenter, 1996a, 1996b; Fuson, Perry y Kwon, 1994) y más recientemente los de la multiplicación y división (p. ej., De Corte y Verschaffel, 1996; De Corte, Verschaffel y Van Coillie, 1988; Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck, 1993; Greer, 1992; Nesher, 1992; Verschaffel y De Corte, 1997).

En concreto, en el ámbito de la adición y sustracción se han elaborado clasificaciones de los problemas verbales, buscando no sólo las causas que explican las diferencias de éxito entre unos problemas y otros, sino también el orden de dificultad de los mismos, así como las estrategias y errores cometidos por los niños en los distintos problemas.

Las investigaciones sobre la multiplicación y la división presentan diferentes grados de semejanza con los trabajos realizados en torno a la adición y la sustracción, dependiendo del plano en que situemos la comparación. Así, desde la vertiente más general, siguen la misma tendencia, ya que también se han propuesto clasificaciones de los problemas verbales, que según Nesher (1992) pueden agruparse en tres enfoques: (*a*) el de los modelos psicológicos implícitos encabezado por Fischbein (1985, 1987, 1989), (*b*) el análisis conceptual de Schwartz (1988) y Vergnaud (1988, 1994), y (*c*) el enfoque textual de Nesher (1988). Recientemente Greer (1992, 1994) ha sugerido una nueva clasificación de los problemas verbales de multiplicación y división, cuyo rasgo más destacado consiste en la coordinación de las dos dimensiones más sobresalientes de este incipiente ámbito de estudio: (1) el tipo de problema verbal y (2) la posibilidad de formular los diversos tipos de problemas verbales con cantidades que trasciendan los números enteros. En términos generales, estas clasificaciones difieren en cuanto a la nomenclatura y a la amplitud de las categorías que las constituyen, pero no en cuanto a las estructuras multiplicativas que implican. Por tanto, y con ánimo de no alargamos excesivamente, analizaremos únicamente el enfoque textual.

Desde el enfoque textual se afirma que la resolución de problemas comienza con el análisis del texto, a través del cual el sujeto descubre las relaciones lógicas y semánticas que le permitirán encontrar los datos relevantes. Según Nesher (1992) los problemas de multiplicación y división comparten la misma estructura multiplicativa. La diferencia entre unos y otros reside en la información que se muestra y en la que se oculta. De manera que en la división, por ejemplo, la información conocida en el problema se corresponde con la pregunta realizada en el caso de la multiplicación. En concreto, distingue tres tipos de problemas de multiplicar: configuración de reglas, comparativos y producto cartesiano. Los problemas de configuración de reglas contienen una proposición que describe una cantidad que se repite a modo de regla (p.e., «cada bolsa de caramelos cuesta 15 pesetas») y que conecta dos dimensiones (*i.e.*, «bolsa de caramelos» y «pesetas»), una proposición que muestra el número de veces que ocurre la repetición (p.ej., «Luis compró 3 bolsas de caramelos») y, finalmente, la pregunta que hace referencia al total de una dimensión tras las sucesivas repeticiones (p. ej., «¿cuánto dinero gastó en caramelos Luis?»). Este tipo de problemas también puede ser formulado en términos de división, en cuyo caso estaríamos ante los problemas partitivos (*i.e.*, división por el multiplicador) y distributivos (*i.e.*, división por el multiplicando). Por tanto, desde el punto de vista de Nesher (1992), los problemas de división se caracterizan por su formulación explícita textual y no por constituir modelos psicológicos implícitos como defienden Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985).

Los problemas de comparación representan una cantidad a partir de otra, apareciendo en el texto una cantidad referente y una cantidad comparada (p. ej., «Luis tiene 5 canicas y María tiene tres veces las canicas de Luis. ¿Cuántas canicas tiene María?»). Estos problemas se definen mediante una función escalar entre el número de objetos en el conjunto referente y el número de objetos en el conjunto comparado. La dirección en que se establece la función no resulta intercambiable, ya que el papel del conjunto referente y el comparado no son simétricos. Además, los problemas de comparación pueden ser formulados en términos de división: *a*) aquellos en los que se ofrece información sobre los conjuntos referentes y de comparación y se pregunta por la función escalar, y *b*) aquellos en los que se conoce el conjunto de comparación y la función escalar y se pregunta por el referente.

Por último, los problemas de multiplicación cartesiana, que son los más difíciles de resolver, implican la presencia de dos dimensiones diferentes que se combinan para obtener una tercera (p.ej., «Juan tiene 4 pantalones y 3 chaquetas, ¿cuántos conjuntos diferentes de pantalones y chaquetas puede hacer?»). Este tipo de problemas se consideran simétricos, o en palabras de Verschaffel y De Corte (1997) «psicológicamente» conmutativos, de ahí que sólo admitan una formulación en términos de división.

No obstante, desde la vertiente más concreta, el papel asignado a estos tipos de problemas es por el momento secundario, ya que el factor que ha acaparado el interés de los autores es la naturaleza y el orden de las cantidades (p. ej., Carpenter *et al.*, 1993; Bell, Fischbein y Greer, 1984; Bell, Greer, Grimison, Mangan, 1989; De Corte y Verschaffel, 1996; Harel, Behr, Post y Lesh, 1994; Nunes y Bryant,1996). Probablemente este énfasis en las cantidades es el responsable de que la mayoría de las investigaciones sobre la multiplicación y la división no se hayan ocupado de analizar sistemáticamente los diferentes grados de dificultad que representan. Por otro lado, los estudios sobre la multiplicación y la división no constituyen una mera copia de los desarrollados en torno a la adición y la sustracción, de manera que mientras que en éstos se considera la estructura semántica de los problemas como el elemento esencial para explicar los diferentes comportamientos de los niños, en el ámbito de la multiplicación y la división no se ha llegado aún a conclusiones semejantes. Incluso autores cuyos trabajos sobre la adición y sustracción aparecen invariablemente ligados a la estructura de los problemas, cuando explican la dificultad de los problemas de multiplicación y división recurren a las cantidades. Un claro exponente de esta situación la proporcionan Carpenter *et al.* (1993) cuando atribuyen la dificultad de los problemas de multiplicación y división al hecho de que suponen la presencia de cantidades intensivas (*i.e*, que se derivan de otras cantidades) y extensivas (*i.e.*, que pueden ser representadas directamente), mientras que en la adición y la sustracción sólo implican las últimas. Asimismo, como señala Kouba (1989), en el caso de la adición y la sustracción un factor esencial para justificar el éxito o fracaso tiene que ver con el hecho de que se describan situaciones «activas» o «pasivas», pero no ocurre lo mismo en los problemas de multiplicación y división.

Uno de los modelos más relevantes para justificar los efectos del tipo de cantidades es el propuesto por Fischbein *et al.* (1985): la teoría de los modelos intuitivos. En efecto, una de las manifestaciones de que su influencia no ha decaído con el paso del tiempo la constituye el estudio longitudinal con niños pequeños que realizan Mulligan y Mitchelmore (1997).

Fischbein *et al.* afirman que la identificación de la operación que se necesita para resolver un problema se encuentra mediatizada por el modelo intuitivo correspondiente, que asigna una serie de imposiciones al proceso de búsqueda. De acuerdo con estos autores, el modelo asociado con la multiplicación es el de sumas repetidas, siendo el multiplicador el número de colecciones equivalentes y el multiplicando el tamaño de cada colección, lo que conduce a los sujetos a la regla intuitiva de que los multiplicadores deben ser números enteros. A su vez esta regla acarrea otra, que consiste en que el producto de la multiplicación ha de ser siempre un número mayor que los correspondientes a los operandos. En el caso de la división proponen dos modelos intuitivos: el partitivo y el distributivo. El primero está asociado con la idea de que un objeto o colección de objetos son partidos en subcolecciones o fragmentos, siendo el dividendo el tamaño de cada objeto o el número de colecciones, el divisor el número de fragmentos o subcolecciones y el cociente el tamaño de cada fragmento o subcolección. Son tres las reglas intuitivas asociadas con este modelo: *a*) el divisor debe ser un número entero, *b*) el divisor debe ser más pequeño que el dividendo y *c*) el cociente debe ser menor que el dividendo. En el modelo distributivo se busca cuántas veces una cantidad dada es contenida en otra. La única regla que impone este modelo es que el divisor tiene que ser más pequeño que el dividendo.

Estos modelos intuitivos arraigan profundamente en la mente de los alumnos, ejerciendo un control inconsciente sobre su conducta aun después de que hayan adquirido nociones matemáticas formales más sólidas, originándose dificultades cuando tienen que resolver problemas elementales con datos numéricos que conducen a conflictos entre la operación correcta y las imposiciones del modelo tácito correspondiente. En efecto, numerosos estudios (p.e., Graeber, Tirosh y Glover, 1989; Greer, 1988; Loewenberg, 1990; Simon, 1993; Tirosh y Graeber, 1990) realizados con alumnos de niveles escolares avanzados (*i.e.*, 7° y 9° curso) e incluso con profesores en formación, ofrecen datos que fueron consistentes con las imposiciones de los modelos. Entre los resultados más importantes cabe resaltar que los problemas en los que el multiplicador era un número entero resultaron más sencillos que aquellos en los que se mostraba un decimal mayor que uno y éstos, a su vez, fueron más fáciles que aquellos en los que el multiplicador decimal era menor que uno (p.e., De Corte, Verschaffel y Van Coillie, 1988). Sin embargo, el hecho de que el multiplicando fuese un número entero o un decimal, menor o mayor que uno, no arrojaba diferencias significativas en la ejecución.

En la división, los resultados confirmaron la presencia de los modelos intuitivos, ya que se encontraron, por ejemplo, niveles más altos de ejecución en los problemas partitivos, cuando no se violaba la regla de que el divisor fuese menor que el dividendo.

Aunque el balance de los estudios sobre los modelos intuitivos parece positivo, existen algunos aspectos en los que convendría profundizar y ese es nuestro propósito en el estudio que presentaremos seguidamente. A este respecto, la metodología empleada, en buena parte de las investigaciones que se han realizado hasta el momento, consistía en proponer a los sujetos que resolviesen problemas verbales de configuración de reglas (o sumas repetidas) en el caso de la multiplicación y partitivos (o de medida) en el de la división, con diferentes tipos de cantidades (*i.e.*, enteros y decimales).

En la presente investigación pretendemos analizar el peso diferencial de los modelos intuitivos de la multiplicación y la división a lo largo de varios tipos de tareas y cantidades. Para ello proponemos a alumnos de 1° de ESO y 8° de EGB tres tareas diferentes (*i.e.*, resolver algoritmos, resolver problemas y plantear problemas), comprendiendo cada una de ellas tres tipos de cantidades (*i.e.*, enteros, decimales y fracciones). Esperamos encontrar una mayor incidencia de los modelos intuitivos en la tarea de Resolver problemas de multiplicación, dado que, entre otras cosas, los problemas verbales de configuración de reglas definen mejor el modelo intuitivo de la multiplicación como sumas repetidas. Asimismo, teniendo en cuenta lo señalado por Nesher, cabría esperar que su influencia fuera menor en los problemas partitivos de división. No obstante, también partimos de la posibilidad de que la tarea Resolver problemas encubra las verdaderas competencias conceptuales de los niños, de ahí que nos parezca conveniente incluir la tarea de Plantear Problemas, en la que los propios sujetos formulan los problemas verbales a partir de una serie de algoritmos de multiplicación y división. A nuestro juicio, esta tarea permitirá detectar la presencia de otras estructuras verbales, como los problemas verbales de comparación o producto cartesiano, que no se acoplan a los modelos intuitivos como las propuestas en la tarea de Resolver problemas. Finalmente, consideramos que la tarea de Resolver algoritmos contribuirá a la clarificación de las dificultades de los niños, determinando si éstas corresponden a meros problemas mecánicos cuando ejecutan los cálculos o a problemas conceptuales derivados de la intervención de los modelos intuitivos.

Además, de acuerdo con los planteamientos teóricos de los modelos intuitivos de la multiplicación y la división, hemos mostrado diversos tipos de cantidades, para diferenciar los diversos niveles de influencia de los modelos intuitivos. En concreto, los enteros serán los que ofrezcan menos dificultades, seguidos de los decimales y de las fracciones. Asimismo, esperamos que la inclusión de dos niveles de escolaridad distintos nos facilite la descripción de los cambios acaecidos con la edad.

Por último, a la hora de explicar las competencias conceptuales prestaremos atención no sólo a las respuestas correctas de los niños, sino también al tipo de errores cometidos.

Método

Sujetos

Participaron en el estudio un total de 56 sujetos elegidos al azar de un centro público de un pueblo de los alrededores de Madrid, Humares de Madrid, donde el nivel socio-económico y cultural es medio-bajo. Los sujetos se distribuyeron en dos grupos de 28 alumnos cada uno. El grupo I lo componían alumnos de 1° de ESO, cuyas edades oscilaban entre los 12-13 años (*M*: 12;5 años), y el grupo II estaba formado por alumnos de 8º de EGB. En este último, las edades se situaban entre los 13-14 años (*M*: 13;5 años).

Material y procedimiento

El material estaba constituido por una serie de cuadernillos en los que se describían las pruebas, así como un lápiz para responder a las mismas.

El procedimiento experimental consistió en la administración colectiva de tres pruebas en tres momentos diferentes, separadas por un lapso de tiempo de dos días entre ellas.

Las tareas fueron leídas por el experimentador en voz alta con el fin de asegurarnos de que eran comprendidas por los sujetos. Una vez aclaradas las dudas respecto a la tarea que debían realizar e indicada la privacidad de los resultados, se comenzaban a pasar sin limitación de tiempo precisa. Fueron presentados tres tipos de tareas: 1) Resolver algoritmos, 2) Resolver problemas verbales y 3) Plantear problemas verbales, siendo éste un orden obtenido al azar y que se mantuvo constante para todos los sujetos (véase Tabla 1). En la tarea de resolver algoritmos se presentaron a los sujetos expresiones numéricas del tipo: 23x476, 639:3/4, pidiéndoles que encontraran el resultado. Por su parte, en la de resolución de problemas verbales, se propusieron problemas verbales de sumas repetidas en el caso de la multiplicación (p. ej., «Juan gana 394 pesetas cada hora. ¿Cuánto dinero ganará en 62 horas?») y problemas verbales de partición (p. ej., «En una pastelería se hacen diariamente 420 pasteles y se reparten en 28 bandejas. ¿Cuántos pasteles hay en cada una?») en el de la división. Finalmente, en la tarea de plantear problemas se mostró de nuevo a los sujetos algoritmos de multiplicación y división (p. ej., 27 × 45, 734:0.5), siendo su tarea formular problemas verbales a partir de tales expresiones.

Por lo que respecta a las cantidades, se controló que apareciesen tres tipos de cantidades diferentes en cada tarea y operación: Entero/Entero (E/E), Entero/Decimal (E/D) y Entero/Fracción (E/F). Además estas cantidades se encon-

TABLA 1: CANTIDADES UTILIZADAS EN LAS DISTINTAS TAREAS

	Multiplicación			*División*		
	E × E	E × D	E × F	E : E	E : D	E : F
Resolver algoritmos	23 × 476 836 × 45	914 × 2.3 348 × 0.3	274 × 2/2 435 × 2/5	45 : 813 792 : 56	768 : 2.4 251 : 0.2	256 : 8/5 639 : 3/4
Resolver problemas	394 × 62 48 × 732	396 × 0.2 287 × 2.6	728 × 3/6 819 × 8/4	420 : 28 40 : 125	842 : 0.4 364 : 2.8	836:2/6 564:9/3
Plantear problemas	27 × 541 457 × 36	381 × 3.7 794 × 0.4	523 × 6/3 648 × 3/4	28 : 649 541 : 32	650 : 2.5 734 : 0.5	792 : 6/4 348 : 2/3

traron sujetas a una serie de restricciones: 1) cuando las cantidades eran dos enteros se sometieron a las imposiciones de los modelos intuitivos en el caso de la multiplicación, mientras que en la división no sucedió así, ya que en uno de los ensayos el divisor era mayor que el dividendo; 2) en E/D se incluyeron cantidades decimales que bien fueran, en uno de los ensayos, mayores a la unidad, bien menores, de modo que en el primer caso se cumplían las imposiciones de los modelos intuitivos (*i.e.*, el producto mayor y el cociente menor) y en el otro ocurría lo contrario, y, por último 3) en E/F se mostraron fracciones mayores y menores a la unidad, por las mismas razones que en E/D.

Las respuestas de los sujetos en la tarea Resolver algoritmos se han considerado correctas cuando el resultado de la operación que ejecutaban así lo era, ya que cualquier variación en este sentido era incluida en alguna de las diversas categorías de errores. Lo mismo sucede en el caso de la tarea Resolver problemas, en la que sólo se considera una respuesta como correcta cuando los sujetos eligen y desarrollan adecuadamente la operación implicada en el problema, puesto que las categorías de errores permiten diferenciar entre errores de diversa naturaleza. Finalmente, en la tarea Plantear problemas sólo se consideran correctos los problemas que se acomodan a alguna de las estructuras semánticas teóricamente diferenciadas y revisadas en la introducción. Cualquier desviación con respecto a estas estructuras ha sido contemplada como un error, cuya tipología no sólo es extensa sino diferenciada.

Análisis y discusión de resultados

Análisis cuantitativo global de los resultados

El análisis de varianza mixto 2 (Grupo: grupo I y grupo II) × 3 (Tarea: Algoritmos, Resolver problemas y Plantear problemas) x 2 (Operación: Multiplicación y División) × 3 (Cantidades: E/E, E/D y E/F), con medidas repetidas en los tres últimos factores, mostró que eran significativos los efectos principales del factor Tarea ($F_{2,108} = 60.82$, $p<0.01$). Los efectos principales de los factores Grupo, Operación y Cantidades no alcanzaron el nivel de significación.

En el factor Tarea hemos efectuado el análisis de las comparaciones múltiples con la prueba de Tukey. Los resultados indicaron que las diferencias resultaban significativas cuando comparábamos la tarea de Resolver problemas con la de Plantear problemas ($p<0.05$), siendo el rendimiento en esta última superior al de la primera (véase Tabla 2). El motivo de que los niños mostraran un nivel de ejecución superior en la tarea de Plantear problemas podría residir en el hecho de que, por un lado, la operación a realizar aparecía ya escrita y, por otro, no se pedía al sujeto que la resolviese. Estas circunstancias no reúnen las condiciones bajo las que parecen actuar los modelos intuitivos, por tanto, el rendimiento de los sujetos es superior a las condiciones que sí permiten su actuación. Estos datos sugieren que los modelos intuitivos no funcionan del mismo modo en distintas situaciones, al menos, en lo que se refiere a los problemas verbales.

TABLA 2: MEDIAS Y DESVIACIONES TÍPICAS (ENTRE PARÉNTESIS) DE LAS RESPUESTAS CORRECTAS DE LOS SUJETOS

	1° ESO			8° EGB		
	Resolver algoritmos	*Resolver problemas*	*Plantear problemas*	*Resolver algoritmos*	*Resolver problemas*	*Plantear problemas*
Multiplicación						
E - E	1.61	1.39	1.36	1.5	1.4	1.39
	(0.56)	(0.72)	(0.81)	(0.73)	(0.68)	(0.82)
E - D	1.32	0.68	1	1	0.61	1.21
	(0.71)	(0.76)	(0.85)	(0.80)	(0.77)	(0.72)
E - F	0.32	0.61	0.71	0.61	0.68	0.75
	(0.60)	(0.82)	(0.80)	(0.77)	(0.80)	(0.69)
División						
E - E	1.14	1.04	1.18	1.14	0.71	0.96
	(0.74)	(0.57)	(0.80)	(0.69)	(0.52)	(0.73)
E - D	1.36	0.79	1.11	1	0.25	1.07
	(0.77)	(0.77)	(0.82)	(0.80)	(0.57)	(0.88)
E - F	0.14	0.96	1.18	0.54	0.61	1
	(0.44)	(0.82)	(0.80)	(0.68)	(0.77)	(0.76)

Puntuación máxima posible = 2.00

El rendimiento en la tarea de Resolver algoritmos resultó levemente superior al obtenido en la de Resolver problemas, por lo que no alcanzó el nivel de significatividad (0.97 *vs*. 0.81, respectivamente). Esta semejanza en los rendimientos de los sujetos no parecen justificarse a partir de las demandas de las tareas, ya que en la de Resolución de algoritmos los niños no tuvieron que tomar decisión alguna sobre la operación a ejecutar, porque ésta aparecía completamente determinada. Sin embargo, en la de Resolver problemas la clave del éxito estribaba principalmente en la elección de la operación que representara adecuadamente la estructura del problema, además de la correcta organización de la información numérica dentro de la misma y de una ejecución posterior precisa. Es probable, teniendo en cuenta también los datos de otros trabajos (véase, por ejemplo, Verschaffel y De Corte, 1997), que ambas tareas participen de la intervención de los modelos intuitivos tanto de la multiplicación como de la división. Más explícitamente, puesto que los modelos intuitivos carecen de una estructura analítica (*i.e.*, son holistas), una vez que se dan las condiciones para su intervención, ésta sería indiferenciada. De hecho, tampoco el factor operación marcó diferencias en la ejecución, de modo que el rendimiento en la multiplicación y división se ha equiparado en estos niveles de edad.

En contra de nuestros planteamientos iniciales, no se han observado diferencias entre los grupos, resultado que consideramos debido a los contenidos que se trabajaban en cada uno de estos niveles educativos. En concreto, si bien ambos grupos han recibido enseñanza directa sobre estos contenidos en niveles escolares anteriores, los alumnos de menor edad los habían repasado recientemente. La paradoja de este resultado fue que los niños mayores estaban siendo instruidos en conceptos matemáticos más complejos, sin tener asentados conceptos previos que sirven de base para su adquisición. En cualquier caso, este resultado constituye un apoyo empírico a lo sugerido por Fischbein *et al.* (1985), en el sentido de que los modelos arraigan profundamente en la mente de los sujetos y no son fácilmente superados.

Por último, aunque el tipo de cantidades no fue significativo, la presencia de las fracciones elevó la dificultad de las tareas, como podemos ver en la Tabla 2. Sin embargo, nuestros datos no coinciden con los de otros estudios, en los que se explica el rendimiento de los niños en función de la naturaleza de las cantidades empleadas (p. ej., Fischbein *et al.*, 1985; Harel, Behr, Post y Lesch, 1994; Verschaffel y De Corte, 1997). Desde nuestro punto de vista, es necesario pensar además en la intervención, separada y conjunta, de otros factores (p.e., la estructura semántica del problema, el tipo de tarea). Así parece desprenderse de las interacciones que resultaron significativas en nuestro trabajo y de su interpretación mediante el análisis de las comparaciones simples. En concreto, nos referimos a las interacciones dobles: Operación x Cantidades ($F_{2,108} = 9.12$, $p<0.01$), Operación × Tarea ($F_{2,108} = 15.30$, $p<0.01$) y Cantidades × Tarea ($F_{4,216} = 7.47$, $p<0.01$); y a las interacciones triples: Grupo × Operación × Tarea ($F_{2,108} = 5.51$, $p<0.01$) y Operación × Tarea × Cantidades ($F_{4,216} = 5.82$, $p<0.01$).

En la interacción Grupo × Operación × Tarea tan sólo alcanzó el nivel de significatividad la comparación en la que se contrastó el rendimiento de los grupos en la tarea de Resolver problemas en el caso de la división ($F_{1,108} = 4.862$, $p<0.05$), siendo el rendimiento de los niños de la ESO superior al obtenido por los de 8° de EGB. Por tanto, se puede afirmar que, globalmente, los dos grupos de sujetos se mostraron muy igualados en sus niveles de rendimiento, reiterando lo expuesto anteriormente al hablar de los efectos principales.

Por último, el análisis de la interacción Operación × Tarea × Cantidades puso de relieve que eran significativos los siguientes contrastes entre las operaciones de multiplicar y dividir: (*a*) en la tarea de Resolver algoritmos con números enteros ($F_{1,216} = 5.40$, $p<0.05$), ya que fue superior la ejecución cuando se planteó como multiplicación y (*b*) en la tarea de Plantear problemas con fracciones ($F_{1,216} = 4.055$, $p<0.05$), siendo el rendimiento superior en la situación de dividir. Con respecto al primer contraste, consideramos que estos datos pueden responder a dos explicaciones: (*a*) una referida a los automatismos del cálculo y (*b*) otra relativa al papel desempeñado por los modelos intuitivos. La primera justificación viene avalada por la gran cantidad de errores que se registraron en el manejo de las tablas de multiplicar y que se hicieron más evidentes en la división, como veremos más adelante en el apartado correspondiente al análisis de los errores. En cuanto a la segunda, se refleja en los errores que aparecen en los ensayos en los que el divisor era mayor que el dividendo, puesto que los sujetos invierten entonces dichos términos para adaptarse a las imposiciones de los modelos intuitivos.

Una explicación diferente merece el segundo contraste significativo, ya que los sujetos identifican las fracciones con la partición de un todo en un número de partes iguales y, por consiguiente, las identifican con la división. Como consecuencia, cuando se les proponían expresiones numéricas escritas donde un número entero era multiplicado por una fracción, al escribir el enunciado correspondiente al problema en lugar de multiplicar dividían.

Categorías de problemas propuestos en la tarea de Plantear problemas

El análisis de las respuestas correctas en esta tarea permite destacar dos aspectos esenciales. En primer lugar, tanto los alumnos de la ESO como los de 8° de EGB, en el caso de la multiplicación, formularon mayoritariamente problemas de sumas repetidas, siendo notoriamente inferior el porcentaje de ensayos en los que recurren a la estructura comparativa (Tabla 3). En la división, optaron sobre todo por los problemas partitivos frente a los distributivos (Tabla 3). En definitiva, los alumnos de ambos grupos enunciaron problemas de multiplicación y división de acuerdo con las estructuras que les son familiares, ya que este tipo de problemas parece ser, por un lado, el utilizado con mayor frecuencia en el aula y, por otro, el que figura comúnmente en los libros de texto.

TABLA 3: PORCENTAJES DE ENSAYOS CORRESPONDIENTES A LOS TIPOS DE PROBLEMAS FORMULADOS POR LOS SUJETOS EN LA TAREA DE PLANTEAR PROBLEMAS

	1° ESO			8° EGB		
	E - E	E - D	E - F	E - E	E - D	E - F
Sumas repetidas	94.7	96.4	90	100	100	100
Comparativos	5.3	3.6	10	–	–	–
Partitivos	96.9	87.1	93.9	92.6	83.4	92.9
Distributivos	3.1	32.9	6.1	7.4	16.4	7.1

También es conveniente recordar, a este respecto, que el problema multiplicativo de sumas repetidas es el más sencillo, frente al comparativo o el de producto cartesiano (p. ej., Bell, Fischbein y Greer, 1984; Bell, Greer, Grimison y Mangan, 1989). Por otra parte, la categoría de sumas repetidas en la multiplicación y la partitiva en la división son las que mejor se ajustan a los modelos intuitivos descritos por Fischbein *et al.* Aunque en este caso no parece que a los sujetos les importen excesivamente las imposiciones de los modelos intuitivos, como se desprende de su ejecución en los ensayos en los que los multiplicadores y los divisores no son enteros, sino decimales y fracciones. Este es precisamente el segundo aspecto que queremos resaltar, puesto que no se observaron diferencias en los problemas que plantearon los sujetos dependiendo de la naturaleza de las cantidades. Por tanto, nuestros resultados concuerdan con los encontrados por De Corte y Verschaffel (1996), dado que la presencia de cantidades que alteraban una o más de las imposiciones de los modelos no influyó, significativamente, en la tarea de formular problemas verbales. Si a este dato le añadimos la naturaleza robusta y holista de los modelos, lo más razonable sería suponer que los modelos no han intervenido en la formulación de los problemas. Además, esta suposición concuerda con la aserción de que los modelos intuitivos no actúan bidireccionalmente en el caso de los problemas verbales.

Los errores

A la hora de analizar los tipos de errores, asociados a las distintas tareas, hemos partido de la consideración de las competencias cognitivas que los niños deben mostrar al afrontarlas. Son tres los componentes diferenciados: (1) la competencia conceptual, (2) la competencia de procedimiento y (3) la competencia de ejecución. La primera de ellas hace referencia a la comprensión de los principios y da cuenta de la planificación de los pasos a seguir. Por su parte, la competencia de procedimiento se relaciona con las acciones que han de llevarse a cabo para alcanzar las metas fijadas. Finalmente, la competencia de ejecución alude al conocimiento de los métodos de comprobación de teoremas. Estos tres tipos de competencia sirven para organizar y explicar, desde nuestro punto de vista, los errores cometidos por los niños, permitiéndonos establecer tres tipos básicos de errores: conceptuales, de procedimiento y de ejecución. Los primeros se producirían como fruto de que los niños disponen de un esquema incompleto para abordar la tarea propuesta y no pueden identificar la operación adecuada. Así, a modo de ejemplo, a lo largo de las diferentes tareas algunos niños optaron por no contestar, por inventar el resultado, por no seleccionar la operación correcta, etc. Los errores de procedimiento tienen su origen en las dificultades de los niños con las estrategias que aplican para solucionar la tarea, una vez que ya han decidido con anterioridad qué operación aplicar. De ahí que, entre otros, incurran en errores como multiplicar o dividir por una sola cifra cuando hay varias, invertir el dividendo y el divisor, no completar la operación... Por último, los errores de ejecución son los que se producen estrictamente a la hora de operar. Es decir, los niños seleccionan bien la operación y dominan los conceptos que se requieren para operar con las distintas cantidades, pero en el momento de resolver la operación fallan en aspectos tales como el cómputo total, el conocimiento de las tablas, no tener en cuenta las llevadas, etc.

Seguidamente examinaremos los distintos tipos de errores, tratando de delimitar no sólo la distribución de los mismos dentro de cada tarea, sino también las posibles diferencias en relación al tipo de error más característico, dependiendo de que se trate de la multiplicación o de la división.

Errores de la tarea Resolver algoritmos

Los errores cometidos por los niños en la tarea de Resolver algoritmos ponen de manifiesto la creencia intuitiva de que el multiplicador y el divisor deben ser números enteros (véanse Tablas 4 y 5). En efecto, así cabe interpretar el incremento en los errores, tanto conceptuales como de procedimiento, en presencia de los decimales y las fracciones y en los dos grupos de edad, con independencia de la operación considerada. La naturaleza de los errores cometidos por los niños hace pensar en la falta de un conocimiento general a la hora de abordar el cálculo, ya que los errores de ejecución resultan escasos y afectan sobre todo a la multiplicación con números enteros (*i.e*., el 81.8% y el 100% de los ensayos erróneos en los grupos I y II, respectivamente). Estos errores derivan de confusiones al efectuar el cómputo, al contar las que se llevan, con las tablas o al copiar los números. Sin embargo, en la división, en general, sobresalen los errores de procedimiento puesto que en el 34.6% de los ensayos erróneos del grupo I y en el 46.3% del grupo II no completan la operación, ya que, por ejemplo, no dividen por el denominador cuando tienen que realizar la operación que incluye una fracción. En el caso de los decimales, propenden a olvidarse de la coma (*i.e.*, 38.9% de los ensayos erróneos en el grupo I y 25% en el grupo II) y en los enteros cometen errores de inversión (*i.e.*, 45.8% y 29.1% de los ensayos erróneos en los grupos I y II respectivamente) consistentes en intercambiar el dividendo por el divisor (p. ej., 45:813 lo transforman en 813:45). Esto último lo hacen para no violar la imposición de los modelos intuitivos referente a que el dividendo ha de ser mayor que el divisor.

En la multiplicación, como podemos ver en la Tabla 4, se producen los mismos errores reseñados para la división con fracciones o decimales. De modo que cuando operan con fracciones no completan la operación, porque no tienen en cuenta sus denominadores (*i.e.*, 68.1% y el 61.5% de los ensayos en los grupos I y II, respectivamente). Igualmente, en el caso de los decimales tienden a ignorar las comas (en el 52.6% y el 60.7% de los ensayos erróneos del grupo I y II). Asimismo, destacan los errores conceptuales en presencia de los decimales y las fracciones consistentes en multiplicar cuando tendrían que dividir y en dividir cuando tendrían que multiplicar (p. ej., en los algoritmos de multiplicación cambian los lugares del denominador y el numerador, dividiendo por el numerador y multiplicando por el denominador). En menor medida, se deben a cambios de fracciones por decimales (p.e., 2/5 por 2'5) y de fracciones por enteros (p. ej., 2/5 por 25).

Errores de la tarea Resolver problemas

Los errores cometidos por los niños en esta prueba mantienen la tendencia general de la tarea anterior, poniendo de manifiesto igualmente la influencia de los modelos intuitivos (véanse Tablas 4 y 5). No obstante, aunque perduran los errores de procedimiento aumentan considerablemente los conceptuales. En concreto, si bien en los problemas de multiplicar con enteros persisten los errores de ejecución derivados de la aplicación incorrecta de las tablas (*i.e.*, en el 50% de los ensayos erróneos dentro del grupo I y en el 23.4% dentro del grupo II) o los producidos al ignorar las llevadas (*i.e.*, en el 27.8% y 50% de los ensayos erróneos, en los grupos I y II respectivamente), cuando se introducen decimales o fracciones destacan los errores conceptuales. Por ejemplo, en los dos grupos de edad el 47.4% de los ensayos erróneos se originan en el error concep-

TABLA 4: PORCENTAJES DE ENSAYOS ERRÓNEOS CORRESPONDIENTES A CADA UNA DE LAS CATEGORÍAS EN LAS TAREAS DE RESOLVER ALGORITMOS, RESOLVER PROBLEMAS Y PLANTEAR PROBLEMAS EN LAS SITUACIONES DE MULTIPLICACIÓN

	1º ESO			8º EGB		
	E × E	E × D	E × F	E × E	E × D	E × F
ERRORES CONCEPTUALES						
Resolver algoritmos						
Cambiar fracción por decimal			2.1			2.6
Cambiar fracción por entero			4.2			
Dividir		5.3	10.7		3.4	18
Inventar resultado					3.4	10.2
No contesta			10.7			5.1
Resolver problemas						
Cambiar fracción por decimal			4.9			
Cambiar fracción por entero			4.9			2.7
Dividir		47.4	36.6	3.8	47.4	40.6
Sustraer						5.4
Inventar el resultado				3.8		2.7
No contesta		5.3	7.3	3.8		2.6
Plantear problemas						
Adicionar		34.8	9.3	12.4	4.7	2.8
Dividir	10.5	13.8	32.4	12.4	19.5	38.2
Sustraer		3.4	2.8	18.8	10.4	2.8
Omitir datos					19.5	17.2
Omitir pregunta	21					2.8
Incluir datos de más	26.3	10.3	13.7	50.2	22.2	21.8
Pregunta incorrecta	5.4	31	24.4		4.7	
Incoherente	26.3		8.8	6.2	9.5	14.4
No contesta	10.5	6.7	8.6		9.5	
ERRORES DE PROCEDIMIENTO						
Resolver algoritmos						
Multiplicar por el denominador			2.1			
Multilicar por una sola cifra	18.2					
Ignorar las comas		52.6			60.7	
No completa operación			68.1			61.5
Resolver problemas						
Multiplicar por una sola cifra	11.1			3.8	2.6	
Ignorar las comas		21			39.5	
No completa operación			24.4			24
Cambia los números				3.8		
No coloca las cifras				3.8		
ERRORES DE EJECUCIÓN						
Resolver algoritmos						
Adicionar mal al contar	27.3	5.3	2.1			
Copia mal los números	9				3.4	
Llevadas	18.2	10.6		35.7	3.4	
Tablas	27.3	26.2		64.3	25.7	2.6
Resolver problemas						
Adiciona mal al contar	11.1	2.6	2.4	3.8		
Copia mal los números					2.6	8.2
Llevadas	27.8	13.2		50		8.2
Tablas	50	10.5	19.5	23.4	5.3	8.2

Tabla 5: Porcentajes de ensayos erróneos correspondientes a cada una de las categorías en las tareas de Resolver algoritmos, Resolver problemas y Plantear problemas en las situaciones de división

	1º ESO			8º EGB		
	E : E	E : D	E : F	E : E	E : D	E : F
Errores conceptuales						
Resolver algoritmos						
Cambiar fracción por decimal						4.8
Cambiar fracción por entero			11.5			4.8
Dividir por denominador y numerador			1.9			
Multiplicar		11.1	30.8		35.1	24.5
Inventar resultado	8.3		7.7			
No contesta	4.2	5.6	13.5	37.5	18.5	9.8
Resolver problemas						
Cambiar fracción por entero		2.8				5.3
Adicionar		8.4				
Multiplicar	11.1	28.5	51.3	2.7	55.4	68.4
Inventar el resultado		2.8			8.5	
No contesta		11.5	2.07	5.4	10.6	10.5
Plantear problemas						
Cambiar fracción por decimal			17.4			
Sustraer	30.4	5.6	39.1	10.3	7.7	3.8
Multiplicar	8.7	16	4.3	7.2	19.2	11.6
Omitir datos					3.8	7.7
Omitir pregunta			8.7			7.7
Incluir datos de más	4.3	4	13.1	3.7	11.5	3.8
Incoherente		16		10.3	19.2	23.1
No contesta	13	4	13.1	10.3	23.2	23.1
Errores de procedimiento						
Resolver algoritmos						
Dividir por una sola cifra		5.6		4.2	3.6	
Ignorar las comas	8.3	38.9			25	
Invertir dividendo por divisor	45.8			29.1		
No añade ceros	4.2	11.1		12.5	7.1	
No completa operación			34.6	4.2		46.3
Resolver problemas						
Añadir ceros innecesarios	3.7	11.5				
Dividirr por una sola cifra				2.7		
Ignorar las comas		14.6			14.9	
Invertir dividendo por divisor	81.5			70.3		
No completa operación		2.8	3.7			10.5
Plantear problemas						
Invertir dividendo por divisor	39.3	4	4.3	52.8	15.4	19.2
Errores de ejecución						
Resolver algoritmos						
Sustraer mal al contar	4.2	5.6				
Copia mal los números	4.2					
Llevadas	16.6	5.6		8.3	7.1	
Tablas	4.2	16.5		4.2	3.6	9.8
Resolver problemas						
Sustraer mal al contar		2.8				
Copia mal los números			3.7			
Llevadas		2.8	10.3		4.2	
Tablas	3.7	11.5	10.3	18.9	6.4	5.3
Plantear problemas						
Omitir cifras	4.3					
Cambiar los números				5.4		

tual consistente en plantear un problema de dividir en vez de multiplicar al presentarles números decimales, repitiéndose este mismo tipo de error en las fracciones (*i.e.*, en el 36.6% de los ensayos erróneos del grupo I y en el 40.6% del grupo II).

En los problemas de división, los errores de procedimiento ocupan un lugar destacado en el caso de los enteros, ya que en el 81.5% y 70.3% de los ensayos erróneos, repectivamente para los grupos I y II, invierten los términos (p. ej., 40:125 lo convertían en 125:40), es decir, cambian el dividendo por el divisor por las mismas razones esgrimidas en al tarea de Resolver algoritmos. Paralelamente a lo ocurrido en los problemas de multiplicación, en los de división resaltan los errores conceptuales cuando se introducen los decimales y las fracciones. De manera que, por ejemplo, para resolver un problema de división con decimales los niños proponen un algoritmo de multiplicación (*i.e.*, en el 28.5% de los ensayos erróneos en el grupo I y en el 55.4% en el grupo II).

Errores de la tarea Plantear problemas

En esta situación los errores son conceptuales en la multiplicación, independientemente de la naturaleza de las cantidades. Por ejemplo, cuando realizan la pregunta incorrecta ofrecen enunciados del tipo: «Tenemos 27 sacos y en cada uno hay 541 patatas. ¿Cuántas son 27 × 541?». Algunos de los tipos de errores más destacados son los que consisten en incluir datos de más (p. ej., resuelven el algoritmo e incluyen el dato al enunciar el problema, inventan datos inexistentes, etc.) (*i.e.*, con números enteros: 26.3% de los ensayos erróneos en el grupo I y 50.2% en el grupo II; con decimales: 10.3% en el grupo I y 22.2% en el grupo II; con fracciones: el 13.7% de los ensayos erróneos dentro del grupo I y el 21.8% dentro del grupo II) y aquellos en los que formulan un enunciado de división, adición o sustracción (p. ej., «Tengo 27 bolas y cada una me cuesta 541, si las junto todas ¿cuántas son?» o «Tengo 794 cromos y los quiero repartir entre 0.4 personas. ¿A cuánto tocan?») (véanse Tablas 4 y 5).

En la división, los errores de procedimiento se presentan sobre todo con números enteros. En esta situación los niños de ambos grupos de edad invierten las cantidades de manera que el dividendo pasa a ser el divisor (*i.e.*, grupo I: 39.3% de los ensayos erróneos y grupo II: 52.8%). Los de ejecución resultan apenas apreciables. Tan sólo aparecen con números enteros, bien porque omiten parte de la cifras (*i.e.*, el 4.3% de los ensayos erróneos en el grupo I), bien porque cambian los números (*i.e.*, en el 5.4% de los ensayos erróneos en el grupo II). Los errores conceptuales son, como en la multiplicación, los más importantes. Entre éstos destacamos aquellos errores en los que plantean un enunciado de multiplicación o sustracción, los enunciados que incluyen datos de más y el aumento de la ausencia de respuesta (véanse Tablas 4 y 5). Algunos errores son peculiares de los problemas con fracciones, como aquellos en los que omiten la pregunta final (*i.e.*, el 8.7% de los ensayos erróneos en el grupo I y el 7.7% en el grupo II) o cambian la fracción por un número decimal (*i.e.*, el 17.4% de los ensayos erróneos en el grupo I).

Conclusiones

Una de las conclusiones que nos permite alcanzar este trabajo se refiere a la necesidad de ampliar la orientación teórica y empírica de los trabajos sobre la multiplicación y la división. Nuestros datos revelan que la naturaleza de las cantidades es un factor importante, pero no el único a tener en cuenta a la hora de explicar la comprensión de los sujetos sobre la multiplicación y la división. Como se pone de manifiesto en las diversas interacciones que fueron significativas, es preciso considerar también el tipo de tareas, y en trabajos futuros esperamos incluir otros factores como la estructura semántica de los problemas.

Los resultados del presente estudio también confirmaron el peso de los modelos intuitivos en las soluciones ofrecidas por los niños en las distintas tareas. En efecto, se ratificó la idea propuesta por Fischbein *et al.* de que los modelos intuitivos arraigan profundamente en la mente de los niños, no siendo superados fácilmente aun cuando dispongan de conceptos matemáticos formales más complejos. Así, en las tareas de Resolver algoritmos y Resolver problemas buena parte de los errores fueron provocados por la regla intuitiva de que el multiplicador y el divisor deben ser números enteros, ya que los errores conceptuales aumentaron notablemente en presencia de los decimales y las fracciones. Por tanto, contrariamente a lo señalado por Nesher (1992), los modelos intuitivos ejercen una gran influencia en los problemas partitivos de división. Nuestros datos se encuentran más próximos a los de Verschaffel y De Corte (1997), ya que cuando la situación reúne las condiciones necesarias para la intervención de los modelos intuitivos, su actuación parece ser indiferenciada.

Otra de las reglas que marcó el comportamiento infantil fue la consistente en que el dividendo fuese mayor que el divisor, de manera que en aquellas situaciones en las que los datos no seguían esta norma optaron consistentemente por invertir los términos.

La única tarea que se sustrajo a este patrón fue la de plantear problemas. Puesto que desde nuestro punto de vista los modelos intuitivos no parecen funcionar de igual modo en distintos contextos relacionados con los problemas verbales, la exposición de los sujetos a situaciones de este tipo, y otras en las que tampoco pudieran ser aplicados, aumentará la posibilidad de que los alumnos consideren otras alternativas y paralelamente flaqueará la robustez de los modelos. No obstante, con arreglo a lo impuesto por los modelos intuitivos, los niños propusieron problemas de sumas repetidas y partitivos, no siendo apreciables los porcentajes correspondientes a otras categorías que no se acoplan a estos modelos, como los problemas comparativos. Este dato, aparentemente contrario a nuestro argumento no tiene porqué serlo, ya que la razón por la que los niños no recurrieron a plantear estos problemas podría tener su origen en que los problemas de sumas repetidas son los que habitualmente se presentan en los libros de texto y los que el profesor plantea frecuentemente en el aula. Por tanto, surge un nuevo interrogante: ¿los modelos intuitivos se originan y mantienen espontáneamente o los origina y los sostiene la experiencia escolar?

Finalmente, a partir de nuestros datos se puede afirmar que, globalmente, los dos grupos de sujetos se mostraron muy igualados en sus niveles de rendimiento con independencia de la tarea u operación consideradas. Tampoco se observan diferencias en cuanto a la estructura que predomina en los problemas que plantean, ni en cuanto a la naturaleza y distribución de los errores.

En este trabajo se evidencia también que no es conveniente favorecer el tránsito de unos conocimientos a otros, sin que los primeros hayan sido suficientemente consolidados. El fracaso está garantizado y la sensación de angustia y aburrimiento que a menudo demuestran los alumnos está asegurada. Se impone la necesidad de apostar por una enseñanza de las matemáticas que favorezca la utilidad de los contenidos que se aprenden en la escuela, donde la flexibilidad de los aprendizajes sea la tónica dominante. A este respecto, la comprensión de la multiplicación y la división pasa por la utilización de los modelos intuitivos no como barreras del aprendizaje, sino como elementos productivos del conocimiento. Esto no significa alentarlos sin más, debido a que sus propiedades difieren notablemente de las de los conceptos formales, pero sí revisarlos y ampliarlos, y sobre todo propiciar su manifestación y superación mediante la aplicación de los aprendizajes formales en distintas situaciones que sean lo más próximas a la realidad cotidiana.

REFERENCIAS

Bell, A., Fischbein, E. & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 129-147.

Bell, A., Greer, B., Grimison, L. & Mangan, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (5), 434-449.

Bermejo, V. & Lago, M.O. (1994). The use of counting in numerical reasoning. En J. E. H. Van Luit (Ed.), *Research on learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary school* (pp. 202-219). Doetinchen, The Netherlands: Graviant Publishing Company.

Bermejo, V., Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1989). Procedimientos de cuantificación y cardinalidad. *Revista de Psicología General y Aplicada, 4*, 483-491.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1994). Problemas verbales de comparación y comprensión de la relación comparativa. *Cognitiva, 2* (6), 159-174.

Bermejo, V., Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1996). Dificultades de aprendizaje de las matemáticas. En J.N. García-Sánchez (Dir.), *Instrucción, aprendizaje y dificultades* (pp. 383-395). Barcelona: EUB.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje, 39-40*, 71-81.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990). Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. *Investigaciones Psicológicas, 8*, 23-41.

Bermejo, V. & Rodríguez, P. (1993). Children's understanding of the commutative law of addition. *Learning and Instruction, 3*, 55-72.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1994). Competencia conceptual y de procedimiento: comprensión de la propiedad conmutativa de la adición y estrategias de solución. *Estudios de Psicología, 51*, 3-21.

Carpenter, T. (1996a). Classification of addition and subtraction word problems. Manuscrito enviado por el autor.

Carpenter, T. (1996b). Children's solution strategies of addition/subtraction problems. Manuscrito enviado por el autor.

Carpenter, T, Ansell, E., Franke, M., Fennema, E. & Weisbeck, L (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24* (5), 427-440.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. *Learning and Instruction, 6* (3), 219-242.

De Corte, E., Verschaffel, L. & Van Coillie, V. (1988). Influence of number size, problem structure and response mode on children's solutions of multiplication word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 4*, 3-21.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht, Holanda: Reidel.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (1), 3-17.

Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of number*. NY: Springer-Verlag.

Fuson, K. (1992). Relationships between counting and cardinality from age 2 to age 8. En J. Bideaud, C. Meljac & J. Fischer (Eds.), *Parthways to number. Children's developing numerical abilities*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fuson, K., Perry, T. & Kwon, Y. (1994). Latino, Anglo and Korean children's finger addition methods. En J. E. H. Van Luit (Ed.), *Research on learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary school* (pp. 220-228). Doetinchen, The Netherlands: Graviant Publishing Company.

Gallistel, C. & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition, 44*, 43-74.

Gelman, R. & Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gelman, R., Meck, E. & Merkin, S. (1986). Young children's numerical competence. *Cognitive Development, 1*, 1-29.

Graeber, A., Tirosh, D. & Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (1), 95-102.

Greer, B. (1988). Nonconservation of multiplication and division: Analysis of a sympton. *Journal of Mathematical Behavior, 7*, 281-298.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). NY: MacMillan.

Harel, G., Behr, M., Post, T. & Lesh, R. (1994). The impact of number type on the solution of multiplication and division problems: Further considerations. En G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, NY: State University of NY Press.

Kouba, V. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (2), 147-158.

Lago, M. O. (1992). *Análisis estructural de la adquisición y desarrollo de la habilidad de contar*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Loewenberg, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21* (2), 132-144.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28* (3), 309-330.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19-41). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Nesher, P. (1992). Solving multiplication word problems. En G. Leinhardt, R. Putnam & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 189-219). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Nunes, T. & Bryant, P. (1996). Do problem situations influence children's understanding of the commutativity of multiplication? En B. Butterworth (Ed.), *Mathematical cognition* (pp. 245-260). Hove, UK: Psychology Press.

Rodríguez, P. (1992). *Análisis de los procesos cognitivos que conducen a la adquisición y desarrollo de la propiedad conmutativa*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (p. 41-53). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Simon, M. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 24* (3), 233-254.

Tirosh, D. & Graeber, A. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21* (2), 98-108.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operatations in the middle grades* (pp. 141-162). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? En G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, NY: State University of NY Press.

Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematica understanding and problem solving in the primary school? En T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective* (pp. 69-97). Hove, UK: Psychology Press.