Publicacions Matemàtiques, Vol 33 (1989), 69–83.

ESTIMEES LIPSCHITZ DANS LES DOMAINES CONVEXES DE TYPE FINI DE $\mathbb{C}^2$

ERIC AMAR

Abstract

Using explicit integral formulas introduced by Skoda, we obtain Hölder estimates for the $\bar{\partial}$-equation in convex domains of finite type in $\mathbb{C}^2$.

0. Introduction

M. Range [8] a obtenu des estimés Lipschitz pour les domaines convexes bornés de $\mathbb{C}^2$ à bord réel analytique; en fait il utilise une condition d'Uniforme Totale Pseudo-Convexité d'ordre Finie [UTPCF].

Récemment M.Christ [4], C.Fefferman et J.Kohn [6] ont montré des estimées Lipschitz dans les domaines pseudo-convexes bornés de $\mathbb{C}^2$ de type fini. Ils ont le meilleur résultat possible dans ce contexte et utilisent une méthode de micro-localisation.

Dans ce travail on prouve également des estimées Lipschitz pour des domaines convexes de $\mathbb{C}^2$ de type fini avec une perte en logarithme au carré mais avec un noyau explicite, à savoir le noyau de H. Skoda [8].

Ce résultat contient le précédent résultat de M. Range car ses domaines sont de type fini mais les domaines de type fini ne sont pas UTPCF en général. Un exemple simple de cette différence est donné en appendice.

De façon précise, on montre:

Théorème. *Soit Ω un domaine convexe de $\mathbb{C}^2$, borné à bord lisse C^∞ et de type maximal ℓ. Soit f une (0,1) forme dans $L^\infty(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ telle que $\overline{\partial} f = 0$. Alors la solution u donnée par les noyaux de Skoda vérifie:*

$$u \in L^\infty(\partial\Omega) \text{ et } \overline{\partial}_b u = f \text{ et } \forall z, w \in \partial\Omega$$
$$|u(z) - u(w)| \lesssim |z-w|^{1/\ell}(\log|z-w|)^2$$

Remarque. L'existence de voisinage admissible respectant le type ([1], [3]) permet de localiser les résultats du théorème: en effet, dans $\mathbb{C}^2$, le type est semi-continu. La technique est directement inspirée du travail commun avec A. Bonami [2] et on est amené à introduire des *pseudo-boules* et à évaluer leur volume mais pour une *mesure* différente de la mesure de Lebesgue de $\partial\Omega$: en effet sur le plan complexe tangent on est amené à remplacer la mesure d'aire rdrdθ par drdθ; on ne peut donc appliquer ici directement les résultats de [**2**].

On pourrait toutefois développer une théorie de ces *mesures de Carleson* généralisées au domaine de type fini pour obtenir d'autres résultats Lipschitz ou L^p mais je pense qu'il faut d'abord retrouver les résultats complets de Fefferman et Kohn, par ces méthodes simples.

Le cas $n > 2$ est beaucoup plus délicat comme l'ont montré K. Diederich, J.E. Fornaess et J. Wiegerinck [**5**].

Le travail est organisé comme suit:

– Dans la partie I, on étudie la géométrie des convexes de type fini et on montre, en particulier, qu'ils sont automatiquement de stricte type.

– Dans la partie II, on analyse les noyaux de Skoda dans le cas des convexes de $\mathbb{C}^2$ et on obtient l'estimation L^∞ .

– Dans la partie III, on introduit les *pseudo boules* et on obtient les estimations Lipschitz.

Je tiens à remercier J. Bruna et le referee pour de très pertinentes questions concernant le manuscript de ce travail.

I. Geometrie des convexes

1.– Soit $\Omega = \{\rho < 0\}$ un domaine convexe borné à bord lisse $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{C}^2$. Soit $z, \zeta \in \Omega$ et posons:

$$[\partial\rho(\zeta)] = (\partial_2\rho(\zeta), -\partial_1\rho(\zeta)) \tag{1.1}$$

On a alors:

Lemme 1.1. *On a les inégalités, pour $z \in \partial\Omega$ et $\zeta \in \Omega$:*

$$\begin{cases} |\partial\rho(z).[\partial\rho(\zeta)]| \leq \frac{3}{|\zeta - z|} \; max\,(|\partial\rho(\zeta).(\zeta - z)|, \; |\partial\rho(z).(\zeta - z)|) \\ |\partial\rho(z).[\partial\rho(\zeta)]| \leq \frac{3}{|(\zeta - z)|} \; max\,(| - \rho(\zeta) + \partial\rho(\zeta).(\zeta - z)|, \; |\partial\rho(z).(\zeta - z)|) \end{cases} \tag{1.2}$$

Preuve. Si $\partial\rho(z)$ et $\partial\rho(\zeta)$ sont colinéaires il n'y a rien à montrer car $\partial\rho(z).[\partial\rho(\zeta)] = 0$; sinon on a:

$$\zeta - z = \alpha\,[\partial\rho(z)] + \beta\,[\partial\rho(\zeta)] \tag{1.3}$$

avec:

$$|\zeta - z| \leq |\alpha|\,\|\partial\rho(z)\| + |\beta|\,\|\partial\rho(\zeta)\| \leq 3(\, \max\,(|\alpha|, |\beta|) \tag{1.4}$$

car on peut supposer $\|\partial\rho(z)\|$ et $\|\partial\rho(\zeta)\|$ prochent de 1.

De (1.3) on tire donc:

$$\partial\rho(\zeta).(\zeta - z) = \alpha\,\partial\rho(\zeta).[\partial\rho(z)] \text{ et } \partial\rho(z).(\zeta - z) = \beta\partial\rho(z).[\partial\rho(\zeta)] \tag{1.5}$$

d'où:

$$(1.6)\qquad |\partial\rho(\zeta).[\partial\rho(z)]| = 1/|\alpha|\,|\partial\rho(\zeta).(\zeta - z)| = 1/|\beta|\,|\partial\rho(z).(\zeta - z)|$$

et par (1.4), la première inégalité (1.2).

D'autre part, ρ étant convexe on a:

$$(1.7)\qquad \rho(z) - \rho(\zeta) + 2\mathrm{Re}\ \partial\rho(\zeta).(\zeta - z) \geq 0$$

donc, si $z \in \partial\Omega$ il vient:

$$(1.8)\qquad -\rho(\zeta) + 2\mathrm{Re}\,\partial\rho(\zeta).(\zeta - z) \geq 0$$

d'où:

$$(1.9)\qquad \mathrm{Re}\,\partial\rho(\zeta).(\zeta - z) \geq 1/2(+\rho(\zeta))$$

mais, comme $-\rho(\zeta) \geq 0$:

$$(1.10)\qquad 1/2\rho(\zeta) \leq \mathrm{Re}\,\partial\rho(\zeta)(\zeta - z) \leq -\rho(\zeta)) + \mathrm{Re}\,\partial\rho(\zeta)(\zeta - z)$$

d'où:

$$(1.11)\qquad |\mathrm{Re}\,\partial\rho(\zeta)(\zeta - z)| \leq \ \max\,(1/2\,|\rho(\zeta)|, |-\rho(\zeta) + \mathrm{Re}\,\partial\rho(\zeta)(\zeta - z)|)$$

mais, par (1.9):

$$(1.12)\qquad 1/2|\rho(\zeta)| \leq \left| -\frac{\rho(\zeta)}{2} + \underbrace{\left(-\frac{\rho(\zeta)}{2} + \mathrm{Re}\,\partial\rho(\zeta).(\zeta - z)\right)}_{\geq 0} \right|$$

d'où:

$$(1.13)\qquad |\mathrm{Re}\,\partial\rho(\zeta)(\zeta - z)| \leq |-\rho(\zeta) + \mathrm{Re}\,\partial\rho(\zeta)(\zeta - z)|$$

et, comme $-\rho(\zeta) \in \mathbb{R}+$:

$$(1.14)\quad |\mathrm{Im}\ \partial\rho(\zeta)(\zeta - z)| = |\mathrm{Im}\ (-\rho(\zeta) + \partial\rho(\zeta).(\zeta - z))| \leq |-\rho(\zeta) + \partial\rho(\zeta).(\zeta - z)|$$

il vient bien le lemme 1.1. ∎

2.– Soit $z \in \partial\Omega$ un point de type m [7], décomposons ρ au voisinage de z en polynômes homogènes; par translation et rotation on peut supposer:

$$(2.1)\qquad z = O \quad \text{et} \quad T_0^{\mathbb{C}}\partial\Omega = \{z_2 = 0\}$$

d'où:

$$\rho(\zeta) = -2\mathrm{Re}\,\zeta_2 + \sum_{k=2}^{m} Q_k(\zeta_1) + \mathcal{O}_{m+1} \tag{2.2}$$

où:

$$\mathcal{O}_{m+1} := \mathcal{O}(|\zeta_2|^2 + |\zeta_1\zeta_2| + |\zeta_1|^{m+1})$$

et Q_k est un polynôme homogène en ζ_1 et $\bar{\zeta}_1$ de degré k.

Comme 0 est de type m, cela entraine que les crochets, jusqu'à l'ordre $m-1$, des champs holomorphes et anti-holomorphes tangents n'engrendrent pas l'espace tangent, mais que les crochets à l'ordre m l'engendrent.

Ici, il n'y a qu'un seul champs holomorphe tangent:

$$L = \partial\rho/\partial\zeta_1.\partial/\partial\zeta_2 - \partial\rho/\partial\zeta_2.\partial/\partial\zeta_1$$

Soit $\mathcal{L}$ la forme de Lévi de Ω, on peut supposer que $\|\partial\rho\| \equiv 1$ au voisinage de 0, d'où on a:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta_1\partial\overline{\zeta}_1}(\zeta).\left|\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_2}\right|^2 + \frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta_2\partial\overline{\zeta}_2}\left|\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_1}\right|^2 - 2\mathrm{Re}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta_1\partial\overline{\zeta}_2}(\zeta)\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_2}.\frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}_1}$$

l'hypothèse de type m se traduit par:

$$\underbrace{L^{(-)}\ldots L^{(-)}}_{\alpha\ champs}\mathcal{L}(O) = 0, \text{ pour } \alpha \leq m-1$$

où $L^{(-)}$ signifie L ou $\overline{L}$ [9].

On a le:

Lemme 2.1.
Si Ω est convexe en O et de type m, alors:

$$\partial^\alpha\rho/\partial\zeta_1^\beta\partial\overline{\zeta}_1^{\alpha-\beta}(O) = 0\ \forall\alpha \leq m-1, \beta \leq \alpha$$

De plus: $\exists\beta$ tel que: $\partial^m\rho/\partial\zeta_1^\beta\partial\overline{\zeta}_1^{m-\beta}(O) \neq 0$.

Preuve: : on va procéder par récurrence:

$$H.R.(k): \qquad \partial^\alpha\rho/\partial\zeta_1^\beta\partial\overline{\zeta}_1^{\alpha-\beta}(O) = 0 \quad \forall\alpha \leq k$$

cette hypothèse de récurrence entraine de suite que:

$$\frac{\partial^\alpha\mathcal{L}}{\partial\zeta_1^\beta\partial\overline{\zeta}_1^{\alpha-\beta}}(O) = 0, \text{ pour } \alpha \leq k-2$$

compte tenu de l'écriture de $\mathcal{L}$.

Vérifions H.R.(2), qui sera un modèle pour la récurrence.

$$-\partial\rho/\partial\zeta_2(O) = 1, \text{ et } \partial\rho/\partial\zeta_1(O) = \partial\rho/\partial\overline{\zeta}_1(O) = 0.$$

On a donc H.R.(1). Le point 0 étant de type $m > 2$, on a que $\mathcal{L}(O) = 0$, ce qui donne, avec l'écriture de $\mathcal{L}$:

$$\partial^2\rho/\partial\zeta_1\partial\overline{\zeta}_1(O) = 0$$

Le développement de ρ donne alors:

$$\rho(\zeta_1, 0) = a_2\zeta_1^2 + \overline{a}_2\overline{\zeta}_1^2 + \mathcal{O}(|\zeta_1|^3)$$

Mais la section de Ω par $\{\zeta_2 = 0\}$ est encore convexe, donc le signe de ρ doit être constant au voisinage de 0 en ζ_1, ce qui n'est possible que si $a_2 = 0$.

Supposons maintenant que H.R.(k) est vrai et montrons H.R.($k+1$). Puique 0 est type m, la dérivée de $\mathcal{L}$ par $k-1$, $k \leq m$, champs L est nulle en 0; avec ce qui précède, les seuls termes restant sont donc:

$$L^\alpha \overline{L}^\beta \mathcal{L}(O) = \frac{\partial^{\alpha+\beta}\mathcal{L}}{\partial\zeta_1^\alpha \partial\overline{\zeta}_1^\beta}(O) = 0, \text{ pour } \alpha + \beta = k - 1$$

Remplaçant $\mathcal{L}$ par son expression, et avec H.R.(k), il ne reste en 0 que:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}\rho}{\partial\zeta_1^\alpha \partial\overline{\zeta}_1^\beta}(O) = 0, \text{ pour } \alpha + \beta = k + 1, \ \alpha > 0, \ \beta > 0$$

On ne peut avoir $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ car dans $\mathcal{L}$ le terme principal est $\partial^2\rho/\partial\zeta_1\partial\overline{\zeta}_1$.

Pour montrer H.R.($k+1$), il nous reste donc à montrer que:

$$a_{k+1} := \partial^{k+1}\rho/\partial\zeta_1^{k+1}(O) = 0$$

Mais on a alors:

$$\rho(\zeta_1, 0) = a_{k+1}\zeta_1^{k+1} + \overline{a}_{k+1}\overline{\zeta}_1^{k+1} + \mathcal{O}(|\zeta_1|^{k+2})$$

Comme Ω est convexe, il est situé d'un même côté de son plan tangent, donc sur $\{\zeta_2 = 0\}$, qui est dans le plan tangent, on a: $\rho(\zeta_1, 0)$ doit être positif ou nul, car il ne peut y avoir aucun points de cette forme dans Ω, ce qui n'est possible que si $a_{k+1} = 0$. Ceci achève la preuve de H.R.($k+1$).

Le fait qu'il existe une dérivée d'ordre m qui n'est pas nulle tient au fait que 0 est type m exactement par hypothèse. ■

La (pseudo–)convexité de Ω donne alors la:

Proposition 2.2. *Soit $\Omega = \{\rho < 0\}$ un domaine convexe de $\mathbb{C}^2$ à bord lisse C^∞ et t.q. $0 \in \partial\Omega$ soit un point de type m, avec ρ convexe au voisinage de Ω; alors on a:*

$$\rho(\zeta) = -2Re\,\zeta_2 + F(\zeta_1) + \mathcal{O}(|\zeta_1\zeta_2| + |\zeta_2|^2),$$

où: $F(\zeta_1) := \rho(\zeta_1, 0) = Q_m(\zeta_1) + \mathcal{O}(|\zeta_1|^{m+1})$, et $Q_m(\zeta_1)$ est homogène de degré m en ζ_1 et $\overline{\zeta}_1$, $\partial\overline{\partial}Q_m \geq 0$ et $Q_m \geq 0$.

Preuve:

Il reste à prouver que Q_m et $\partial\overline{\partial}Q_m$ sont positifs. Voyons Q_m: on a: $\partial\rho(\zeta) = -d\zeta_2 + \partial Q_m/\partial\zeta_1.d\zeta_1 + \partial\mathcal{O}_{m+1}$ d'où:

$$-\rho(\zeta) + 2\mathrm{Re}\,\partial\rho(\zeta).\zeta = -Q_m(\zeta_1) + mQ_m(\zeta_1) + \mathcal{O}_{m+1}(\zeta)$$

car Q_m est homogène de degré m. On a donc par convexité, utilisant (1.8):

$$(m-1)Q_m(\zeta_1) + \mathcal{O}_{m+1}(\zeta) \geq 0, \text{ pour } (\zeta_1, \zeta_2) \in \overline{\Omega}.$$

On peut choisir un disque $|\zeta_1| < \delta$ et ζ_2 assez petit de sorte que $(\zeta_1, \zeta_2) \in \overline{\Omega}$ et que $\mathcal{O}_{m+1}$ soit petit devant Q_m; comme Q_m est homogène on en déduit que:

$$Q_m(\zeta_1) \geq 0, \forall\zeta_1 \in \mathbb{C}.$$

Voyons $\partial\overline{\partial}Q_m$: il suffit de remarquer que ρ étant convexe, elle est p.s.h., donc:

$$\partial\overline{\partial}\rho \geq 0 \Rightarrow \partial\overline{\partial}Q_m \geq 0 \text{ pour les mêmes raisons que ci-dessus. } \blacksquare$$

Ce qui a été fait pour 0 peut être fait pour n'importe quel point $z \in \partial\Omega$. Notons:

$$\mu := -\partial\rho(z).(\zeta - z), \text{ la variable normale complexe;}$$
$$\eta := \partial\rho(z).[(\zeta - z)], \text{ la variable tangente complexe.}$$

On a alors:

$$\rho'(\eta, \mu) := \rho(\zeta) = -2\mathrm{Re}\,\mu + F(z;\eta) + \mathcal{O}(|\eta\mu| + |\mu|^2);$$

avec:

$$F(z;\eta) := \rho'(\eta, 0) = Q_m(z;\eta) + ... + Q_\ell(z;\eta) + \mathcal{O}(|\eta|^{\ell+1}).$$

si m est le type de $z \in \partial\Omega$ et où on a poussé le développement de $F(z;.)$ jusqu'à l'ordre ℓ qui est le type maximum des points de $\partial\Omega$.

On a donc que $F(z;\eta)$ est $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs réelles de z et de η; de plus:

$$\partial Q_k(z;\eta)/\partial\zeta_1 = \partial Q_k/\partial\eta.\partial\eta/\partial\zeta_1 = \partial Q_k/\partial\eta.(-\partial_2\rho(z));$$

de même pour les autres dérivées, on en déduit, grace aux relations d'Euler appliquées aux Q_k:

$$-\rho(\zeta) + \mathrm{Re}\,\partial\rho(\zeta).(\zeta - z) = -\rho(\zeta)/2 + F'(z;\eta) + \mathcal{O}(|\eta\mu| + |\mu|^2),$$

avec:

$$2F'(z;\eta) = (m-1)Q_m(z;\eta) + ... + (\ell-1)Q_\ell(z;\eta) + \mathcal{O}(|\eta|^{\ell+1}).$$

Nous pouvons résumer ces résultats dans la proposition suivante:

Proposition 2.3. *Soit $z \in \partial\Omega$ un point de type m, on a:*

$$\rho(\zeta) = -2Re\,\mu + F(z;\eta) + \mathcal{O}(|\eta\mu| + |\mu|^2) \text{ et :}$$
$$-\rho(\zeta) + Re\,\partial\rho(\zeta).(\zeta - z) = -\frac{\rho(\zeta)}{2} + F'(z;\eta) + \mathcal{O}(|\eta\mu| + |\mu|^2).$$

Où μ et η sont les variables normale et tangente complexes en z et où les fonctions F et F' vérifient:

$$F'(z;\eta) = (m-1)Q_m(z;\eta) + \ldots + (\ell - 1)Q_\ell(z;\eta) + \mathcal{O}(|\eta|^{\ell+1}) \geq 0.$$
$$F(z;\eta) = Q_m(z;\eta) + \ldots + Q_\ell(z;\eta) + \mathcal{O}(|\eta|^{\ell+1}) \geq 0.$$

Et où le polynôme homogène en η et $\overline{\eta}$ Q_m vérifie: $Q_m \not\equiv 0$, $Q_m \geq 0$, $\partial\overline{\partial}Q_m \geq 0$.

Clairement les fonctions F et F' sont $\mathcal{C}^\infty$ en z et η, et le fait quelles soient positives tient au fait que Ω est convexe.

II. Noyaux de Skoda

1. H. Skoda a montré que, si f est une (0,1) forme $\overline{\partial}$ fermée dans Ω et $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ alors on a une solution de $\overline{\partial}u = f$ donnée au bord par les noyaux [**9**]:

$$(1.1)\qquad \forall z \in \partial\Omega,\; u(z) = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega K_i(z,\zeta) \wedge f(\zeta) + \int_\Omega K_3(z,\zeta) \wedge \overline{\partial}\rho(\zeta) \wedge f(\zeta)$$

avec:

(1.2)
$$K_1(z,\zeta) = \frac{-\rho(\zeta)}{D(z,\zeta)} \left[\frac{\partial\rho}{\partial z_2}(z)\frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta_1\partial\zeta_2}(\zeta) - \frac{\partial\rho}{\partial z_1}(z)\frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta_2\partial\zeta_2}(\zeta)\right] d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge d\overline{\zeta}_2$$
$$K_2(z,\zeta) = \frac{-\rho(\zeta)}{D(z,\zeta)} \left[\frac{\partial\rho}{\partial z_1}(z)\frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta_1\partial\zeta_1}(\zeta) - \frac{\partial\rho}{\partial z_2}(z)\frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta_2\partial\zeta_1}(\zeta)\right] d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge d\overline{\zeta}_1$$
$$K_3(z,\zeta) = \frac{\partial\rho(\zeta).[\partial\rho(z)]}{D(z,\zeta)}$$

où on a posé:

$$D(z,\zeta) = [-\rho(\zeta) + \partial\rho(\zeta).(\zeta - z)]^2(\partial\rho(z).(\zeta - z))$$

2. Soit $z \in \partial\Omega$ un point de type m, on a:

Proposition 2.1. *Si u est la solution de Skoda de $\overline{\partial}_b u = f$, alors:*

$$|u(z)| \lesssim \|f\|_\infty$$

Preuve: Voyons directement l'intégrale de K_3; elle est bornée par

$$\|f\|_\infty \int_\Omega \frac{|\partial\rho(\zeta)[\partial\rho(z)]|\, dv(\zeta)}{|[-\rho(\zeta) + \partial\rho(\zeta).(\zeta - z)]^2(\partial\rho(z).(\zeta - z)|} \tag{1.3}$$

Par le lemme 1.1 il vient:

$$|u(z)| \lesssim \|f\|_\infty \left\{ \int_\Omega \frac{|\zeta - z|^{-1} dv(\zeta)}{|-\rho(\zeta) + \partial\rho(\zeta).(\zeta - z)|^2} + \right. \tag{1.4}$$

$$\left. + \int_\Omega \frac{|\zeta - z|^{-1} dv(\zeta) z}{|-\rho(\zeta) + \partial\rho(\zeta).(\zeta - z)||\partial\rho(z).(\zeta - z)|} \right\}$$

Mais la proposition I.2.3 donne si z est de type m:

$$\rho(\zeta) = -2\mathrm{Re}\,\mu + F(z;\eta) + \mathcal{O}(|\eta\mu| + |\mu|^2) \tag{1.5}$$

et:

$$-\rho(\zeta) + \mathrm{Re}\,\partial\rho(\zeta).(\zeta - z) = -\rho(\zeta)/2 + F'(z;\eta) + \mathcal{O}(|\eta\mu| + |\mu|^2); \tag{1.6}$$

de même par (1.5):

$$\mathrm{Re}\,\mu = -\rho(\zeta)/2 + F(z;\eta) + \mathcal{O}(|\eta\mu| + |\mu|^2).$$

Faisons maintenant le changement de variables habituel:

$$t := -\rho(\zeta)/2;\ s := \ \mathrm{Im}\,\mu. \tag{1.7}$$

Ce changement vaut dans une boule de rayon uniformément minoré $B(z,\delta)$.

Il vient pour la 1[ère] intégrale de (1.4) en z:

$$I_1 := \int_{B(z,\,\delta)\cap\Omega} \frac{1}{|\zeta|} \frac{dt ds d\lambda(\zeta_1)}{[t + |s| + |F'(z;\eta) + \mathcal{O}(|\eta\mu| + |\mu|^2)|]^2} \tag{1.8}$$

mais on peut *absorber* les termes en $|\eta\mu|$ et $|\mu|^2$ par $s =$ Im μ et Reμ se majore par t uniformément.

On a donc:

$$I_1 \lesssim \int_{\substack{|\eta| < \delta \\ t < \delta \\ |s| < \delta}} \frac{dt ds d\lambda(\eta)}{(t + |s| + |\eta|)(t + |s| + |F'(z;\eta)|)^2} \tag{1.9}$$

Minorant $t + |s| + |\eta|$ par $|\eta|$, il vient:

$$I_1 \lesssim \int_{|\eta|<\delta} \frac{1}{|\eta|} |\ \mathrm{Log}\,|F'(z;\eta)|\,|d\lambda(\eta) + c(\delta) \tag{1.10}$$

en intégrant d'abord par rapport à t et s, et où $c(\delta)$ ne dépend que de δ.

Nous aurons besoin du lemme suivant pour continuer le calcul:

Lemme 2.2. *Soit $G(z,\eta)$ une fonction C^∞ de $z \in \partial\Omega$ et η dans $\mathbf{C}$, $G \geq 0$; avec $\eta = x+iy$, supposons que pour chaque $z_0 \in \partial\Omega$, on a (après une éventuelle rotation des axes Ox, Oy):*

$$\exists\alpha, \text{ avec } \alpha \leq \ell \text{ et } \partial^\alpha G/\partial y^\alpha(z_0;0) \neq 0;$$

alors il existe $\delta' = \delta'(z_0) > 0$ tel que:

$G(z;\eta) = a(z;\eta).\prod_{j=1}^{k}(y-\varphi_j(z;x))$; $k \leq \ell$, $|a(z;\eta)| > \gamma$ pour $|z-z_0| < \delta'$ et $|\eta| < \delta'$. De plus δ' et γ peuvent être choisis indépendants de z_0 par compacité de $\partial\Omega$.

Preuve: La direction y est régulière pour la fonction G des **3** variables x, y, z; on peut donc appliquer le théorème de préparation différentiable [**10**] à G:

$$G(z;\eta) = a(z;\eta).P_k(z;x;y)$$

avec $k \leq \ell$; $a(z;\eta)\,C^\infty$ dans un voisinage de $(0, z_0)$ et $a(0, z_0) \neq 0$; P_k un polynôme unitaire de degré k en y dont les coefficients (autres que celui de y^k) sont nuls pour $x = 0$, $z = z_0$. La factorisation de ce polynôme nous donne les φ_j réels ou conjugués deux à deux, d'où le lemme. ∎

Pour continuer le calcul, on prend le plus petit de δ et δ' comme taille de voisinage uniforme, appelons le encore δ. Appliquons le lemme à $F'(z;\eta)$: grace à la proposition I.2.3, on a bien qu'une dérivée d'ordre inférieure à ℓ de F' est non nulle; il vient alors:

$$(1.11) \qquad I_1 \leq c(\delta) + \int_{|\eta|<\delta} \operatorname{Log}\left| a(z;\eta)\prod_{j=1}^{k}(y-\varphi_j(z;x))\right| \frac{dxdy}{|\eta|}$$

Il suffit alors de majorer:

$$(1.12) \qquad \int_{|\eta|<\delta} \operatorname{Log}|y-\varphi_j(z;x)|\frac{dxdy}{|\eta|} \lesssim \int_{|\eta|<\delta} |\operatorname{Log}|y||\,drd\theta \lesssim 1$$

Car φ_j est bornée.

On a donc le résultat $I_1 \lesssim 1$ car j étant inférieur a ℓ, on a au plus ℓ tels termes.

La deuxième intégrale de (1.4) se traite exactement de la même manière.

Lorsque ζ est *loin* de z, les noyaux de Skoda ne sont pas singuliers, donc, si ζ est à une distance supérieure à δ de z, il n'y a aucun problème; d'où la solution pour le noyau K_3.

Pour K_1 et K_2 on majore aisément le numérateur par t d'où:

$$i = 1,\ 2: \int_{B(z,\delta)\cap\Omega} |K_i(z,\ \zeta)|\,dv(\zeta) \lesssim \int \frac{tdtdsd\lambda(\eta)}{[t+|s|+F'(z;\eta)]^2[t+|s|+F(z;\eta)]}$$

mais il suffit de voir que: $t \leq t+|s|+F$ car F est positive, pour être ramené au cas précédent, d'où la proposition 2.1. ∎

III. Estimations Lipschitz

1. Reprenant les notations de la partie II, on a la:

Proposition 1.1. *Soit $d\mu$ la mesure $drd\theta$, alors on a: $\exists C, \exists \delta_0$ tel que pour $\delta < \delta_0$:*

$$\mu\{(r,\theta) \in [0,\delta_0] \times [0,2\pi]\, t.q.\, |F(z; r\cos\theta, r\sin\theta)| < \delta\} \leq C\delta^{1/\ell} |\operatorname{Log} \delta|$$
$$\mu\{(r,\theta) \in [0,\delta_0] \times [0,2\pi]\, t.q.\, |F'(z; r\cos\theta, r\sin\theta)| < \delta\} \leq C\delta^{1/\ell} |\operatorname{Log} \delta|$$

De plus les constantes δ_0 et C peuvent être choisies indépendamment de $z \in \partial\Omega$.

Preuve: Quitte à faire une rotation des axes (réels) Ox et Oy on peut supposer que Oy est une direction régulière pour F. Appliquons le lemme II.2.2 il vient:

$$F(z; x, y) = a(z; x, y) \prod_{i \leq k} [y - \varphi_i(z; x)] \text{ avec } k \leq \ell. \tag{1.1}$$

Donc:

$$\{|F| < \delta\} \subset \{ \inf_i |y - \varphi_i(z; x)|^\ell \leq c\delta\} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \{|y - \varphi_i(z; x)|^k \leq c\delta\} \tag{1.2}$$

Il suffit donc de supposer $F(x, y) = [y - \varphi_i(z; x)]^k$ et le zéro de F est alors un graphe et l'estimation de la proposition s'obtient alors par simple calcul. Les constantes sont uniformes par compacité. ■

Remarque. Le terme en logarithme provient de ce que l'on prend la mesure $drd\theta$ et non la mesure d'aire.

2. Estimations

On reprend les mêmes idées que dans [**2**]:

$$|u(z) - u(w)| \leq \int_\Omega |K(z, \zeta) - K(w, \zeta)| \tag{2.1}$$

avec $\|f\|_\infty < 1$.

Introduisons les *pseudo-boules*:

$$\Delta(z, \gamma) = \{\zeta \in \mathbb{C}^2\, t.q.\, t < \gamma,\ |s| < \gamma,\ |F(z; \eta)| < \gamma\} \tag{2.2}$$

avec t, s, η les coordonnées locales introduites au II.

On a alors:

Proposition 2.1. :

$$\exists C > 0 \textit{ t.q. } \; si \; |z-w| < \gamma \; alors \; \Delta(z, C\gamma) \supset \Delta(w,\gamma).$$

La question se pose seulement pour η i.e. il faut montrer que:

(2.3)

$$\exists C > 0 \text{ t.q. si } |w| < \gamma \Rightarrow \{\zeta;\, |F(z;\eta(\zeta,z))| < C\gamma\} \supset \{\zeta;\, |F(w;\eta(\zeta,w))| < \gamma\}$$

On a:

$$\begin{aligned} &|F(z;\eta(\zeta,z))| \le |F(w;\eta(\zeta,w))| + |F(z;\eta(\zeta,z)) - F(w;\eta(\zeta,w))| \le \\ (2.4)\quad &\le \gamma + |F(z;\eta(\zeta,z)) - F(w;\eta(\zeta,w))|. \end{aligned}$$

Comme $|\eta(\zeta,z) - \eta(\zeta,w)| \le c|z-w| = c\gamma$ et F est C^∞ on obtient bien la Proposition. ■

On peut alors écrire, avec $\gamma = |z-w|$:

$$(2.5) \quad |u(z)-u(w)| \le \int_{\Omega\cap\Delta(z,C\gamma)} |K(z,\zeta)-K(w,\zeta)| + \int_{\Omega\cap\Delta^c} |K(z,\zeta)-K(w,\zeta)|$$

On va majorer le 1er terme brutalement par la somme des valeurs absolues:

$$(2.6) \qquad I_1 \lesssim \int_{\Omega\cap\Delta} |K(z,\zeta)| + \int_{\Omega\cap\Delta} |K(w,\zeta)| = J_1 + J_2$$

Reprenant les calculs de II il vient:

$$(2.7) \qquad J_1 \le \int_{\substack{t\le\gamma \\ |s|\le C\gamma \\ |F'(z;\eta)|\le\gamma}} \frac{dtdsd\lambda(\eta)}{|\eta|[t+|s|+F'(z;\eta))]^2}$$

d'où:

(2.8)

$$J_1 \le \int_{|F'(z;\eta)|\le\gamma} \left\{ \text{Log } \left[\frac{C\gamma + F'(z;\eta)}{F'(z;\eta)}\right] - \text{ Log } \left[\frac{2C\gamma + F'(z;\eta)}{C\gamma + F'(z;\eta)}\right]\right\} \frac{d\lambda(\eta)}{|\eta|}$$

Majorons encore en négligeant le 2^e terme, il vient utilisant la proposition 1.1:

$$(2.9) \qquad J_1 \le (\text{ Log } C\gamma)^2.(C\gamma)^{1/\ell} + \int_{|F(z;\eta)|\le C\gamma} \text{Log } \left[\frac{1}{F(z;\eta)}\right] drd\theta$$

Voyons le 2^e terme:

$$\begin{aligned} &\int_{|F(z;\eta)|\le C\gamma} \text{Log } \frac{1}{|F(z;\eta)|} drd\theta = \\ (2.10) \qquad &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{C\gamma 2^{-k} \le |F| \le C\gamma 2^{-k+1}} \text{Log } \frac{1}{|F(z;\eta)|} drd\theta = J_3 \end{aligned}$$

d'où:

$$J_3 \leq \sum_k \left[\text{Log } \frac{1}{K\gamma} + k \text{ Log } 2 \right] \mu(\{|F(z;\eta)| \leq K\gamma 2^{-k+1}\}) \tag{2.11}$$

d'où:

$$J_3 \leq \text{ const } \gamma^{1/\ell} \sum_k (2^{-k})^{1/\ell} (|\text{Log } C\gamma| + k \text{ Log } 2)^2 \leq \text{ const } \gamma^{1/\ell} |\text{ Log } \gamma|^2$$

d'où:

$$J_1 \lesssim (\text{Log } \gamma)^2 \gamma^{1/\ell} \tag{2.12}$$

Pour J_2, on remarque, que d'après la proposition 2.1, on a:

$$\Delta(w; C^2\gamma) \supset \Delta(z, C\gamma) \text{ car } |z - w| < \gamma < C\gamma \tag{2.13}$$

d'où:

$$J_2 \leq \int_{\Omega \cap \Delta(w; C^2\gamma)} |K(w, \zeta)| \tag{2.14}$$

et on a donc encore:

$$J_2 \lesssim (\text{Log } \gamma)^2 \gamma^{1/m} \tag{2.15}$$

d'où:

$$I_1 \leq (\text{Log } \gamma)^2 \gamma^{1/m} \tag{2.16}$$

Voyons maintenant $K(z, \zeta) - K(w, \zeta)$; par les accroissements finis, il vient:

$$|K(z, \zeta) - K(w, \zeta)| \leq |z - w| \, |K'(z, w, \zeta)| \tag{2.17}$$

avec K' la somme de dérivées des noyaux de Skoda. Voyons le plus singulier: avec les notations precedentes

$$|K'| \lesssim \frac{1}{[t + |s| + F(z; \eta)]^3} \frac{1}{|\zeta|}. \tag{2.18}$$

Posons

$$L_1 = \int_{\Omega \cap \Delta^c} |K'| dv(\zeta) \tag{2.19}$$

La partie de l'intégrale pour $|\zeta - z| \geq C\gamma$ ne pose aucun problème. D'autre coté

$$\int_{|F(z:\eta)|>C\gamma} \frac{d\mu(\eta)}{F(z:\eta)} \leq$$

(2.20)

$$\leq \sum_k \int_{\{C\gamma 2^{k+1} \geq |F| > C\gamma 2^k\}} \frac{1}{F(z;\eta)} d\lambda(\eta) \lesssim \sum_k \frac{\gamma^{1/\ell}}{\gamma 2^k} \left[\operatorname{Log} 1/\gamma . 2^{k/\ell} + k 2^{k/\ell} \right]$$

Les séries convergent et on obtient la bornée $\gamma^{1/\ell - 1} \operatorname{Log} 1/\gamma$.

Les intégrales sur les regions où $|s| > C\gamma$, $t > C\gamma$ sont traitées de façon similaire. D'où finalement

$$L_1 \lesssim \gamma^{1/\ell - 1} \operatorname{Log} 1/\gamma \tag{2.21}$$

Reportant dans (2.21) avec $|z - w| = \gamma$:

$$\int_{\Omega \cap \Delta^c} |K(z,\zeta) - K(z,\zeta)| \leq \gamma^{1/\ell} \operatorname{Log} 1/\gamma \tag{2.22}$$

On a donc prouvé

Théorème 2.2.

Si Ω est un convexe de $\mathbb{C}^2$ de type $\leq \ell$, si f est une (0,1)-forme $\overline{\partial}$-fermée dans Ω , la solution u donnée par les noyaux de Skoda vérifie:

i) $\overline{\partial}_b u = f$

ii) si $f \in L^\infty(\Omega)$, *on a :* $|u(z) - u(w)| \leq |z - w|^{1/\ell} (Log\ |z - w|)^2$

Appendice

Considérons le domaine:

$$\Omega' := \{\rho' < 0\} \text{ avec } \rho'(\zeta) = -2 \operatorname{Re} \zeta_2 + (\operatorname{Re} \zeta_1)^4$$

Il est convexe, réel analytique, mais non borné; on peut modifier ρ' de sorte à avoir un domaine borné convexe Ω, à bord $\mathcal{C}^\infty$ lisse, et qui coïncide avec Ω' dans un voisinage de 0. De plus les points de $\partial\Omega$ autres que ceux de $\partial\Omega'$ sont des points de stricte convexité [**1**], [**3**]. Soit ρ la fonction définissant ce nouveau domaine Ω. Clairement au voisinage de 0, Ω ne vérifie pas la condition de M. Range; en effet la condition $UTCPF$ dit:

$$UTCPF\ \exists c > 0,\ \exists m > 0,\ \forall \zeta, z \in \overline{\Omega},$$
$$\text{on a } \rho(\zeta) - \rho(z) + 2 \operatorname{Re} \partial\rho(\zeta).(\zeta - z) \geq c|\zeta - z|^m$$

Soit donc $\zeta = 0$, au voisinage de 0 en z on a ici:

$$(\text{Re } z_1)^4 + 2 \text{ Re } [z_2] \geq c|z|^m \tag{1}$$

Il suffit de prendre Re z_1 =0 et Re z_2 =0 avec z_1 et z_2 assez proches de 0 pour rester sur $\partial\overline{\Omega}$ et contredire (1). Le domaine Ω n'est donc pas $UTCPF$.

Il est quand même de type fini, 4; en effet loin de 0 il est strictement convexe donc ses points sont de type 2; près de 0 on a:

$$L = 2(\text{ Re } z_1)^3 \partial/\partial z_2 + \partial/\partial z_1 \text{ comme champs holomorphe tangent;}$$

donc on a: $L = \partial/\partial z_1$ dès que Re z_1 =0; on montre alors aisément, comme en II, que les points de $\partial\Omega$ sont de type 4.

Remarque: le domaine convexe défini au voisinage de 0 par:

$$\rho(\zeta) = -2 \text{ Re } \zeta_2 + (\text{ Re } \zeta_1)^4 + e^{-1/|\zeta|^2}$$

est aussi de type 4 en 0 et est strictement convexe en dehors de l'origine. Toutefois il ne vérifie pas $UTCPF$ mais notre théorème s'applique.

References

1. E. AMAR, Cohomologie complexe et Applications, *J. London Math. Soc.* **(2), 29** (1984), 127–140.
2. E. AMAR, A. BONAMI, Mesures de Carleson d'ordre α et solutions au bord ..., *Bull. Soc. Math. France,* **107** (1979), 23–48.
3. S. BELL, Differentiability of the Bergman kernel and pseudolocal estimates., *Math. Z.*
4. M. CHRIST, Regularity properties of the $\overline{\partial}_b$ equation on weakly pseudo-convex CR-manifolds of dimension three, *Preprint.*
5. K. DIEDERICH, J.E. FORNAESS, J. WIEGERINCK, Sharp Holder estimates for $\overline{\partial}$ on ellipsoids., *Manuscripta Math.* **56** (1986), 399–413.
6. C. FEFFERMAN, J. KOHN, Holder estimates on domains of complex dimension two, *Adv. in Math.* **69** (1988), 223–303.
7. J. KOHN, Boundary behavior of $\overline{\partial}$ on weakly pseudo-convex manifolds of dimension two, *J. Diff. Geom.* **6** (1972), 523–542.
8. M. RANGE, On Hölder estimates for $\overline{\partial}u = f$ on weakly pseudo-convexes domains, *Proc. Int. Conf. Corona,* (1976–1978), Scuola Normale Sup. Pisa (1978), 247–267.
9. H. SKODA, Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur $\overline{\partial}$ et caractérisation des zéros..., *Bull. Soc. Math. France,* **104** (1976), 225–299..

10. A. NAGEL, E. STEIN, S. WAINGER, Boundary behavior of functions holomorphic in domains of finite type., *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **78**, No 11 (1981), 6596–6599.
11. J.C. TOUGERON, Idéaux de fonctions différentiables, *Ergebnisse der Mathematik.*

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, Cours de la Libération 33405 Talence
FRANCE

Rebut el 2 de maig de 1988