Publicacions Matemàtiques, Vol 32 (1988), 289–291.

CORRECCIO A L'ARTICLE "ANALISI FORMALMENT RECURSIVA"

F. Tomas

En l'article citat en el títol, publicat en aquesta mateixa revista [**1**], es demostren, basats en el formalisme AFR (aritmètica formalment recursiva),els teoremes de Bolzano-Weierstrass [**4.8**, pp. 63–68] i els teoremes del màxim i del mínim i de Bolzano per a funcions contínues [**5.9 i 5.10**, pp. 71–74]. Però en les demostracions d'aquests teoremes s'utilitza sistemàticament, ja sigui de manera explícita o implícita, una forma del metateorema de minimització (p. 40) que no està justificada. Aquest metateorema afirma: per numerals $\underline{b}_i$, si

$$\bar{U} \vdash E\bar{h}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m) = S(0),$$

aleshores també tenim

$$M\bar{h}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m) \in N_{\bar{U}} \text{ i } \bar{U} \vdash \bar{h}(\underline{b}_i, M\bar{h}(\underline{b}_i)) = 0$$

En aquelles demostracions, però, es suposa que l'afirmació és certa per $\bar{U}$-nombres $\underline{b}_i$ que no són numerals, i aquesta és la forma no justificada del teorema a la que ens referim. Tant a [1] com en l'article precursor [**2**, p.48] s'omet senyalar que els $\underline{b}_i$ han de ser numerals; però en la demostració del metateorema a [**2**] i en la correcció b) de la p.42 de [**1**] es suposa que ho són. L'ús incorrecte del metateorema es fa, per exemple, en el pas de (11) a (12) o de (19) a (20) en la p. 65 de [**1**].

El fet és que no podem demostrar l'afirmació del metateorema si els $\underline{b}_i$ són, en general, $\bar{U}$-nombres. Per tant, les demostracions que dels teoremes esmentats es fan a [1] són incorrectes. Ara bé, els teoremes són essencialment veritables (amb enunciats un xic diferents), i sabem com demostrar–los, si únicament modifiquem la definició del formalismeAFR de la manera que explicarem desseguida.

La modificació consisteix en substituir PR.3 per el següent:

PR.3'. Si: 1) $\bar{U}$ és un segment de AFR i $\bar{f}(\underline{x}_i, \underline{y}) \in N_{\bar{U}}(\underline{x}_i, \underline{y})$; 2)$\underline{h}_i, \underline{k}_i, \underline{g}_j \in N_{\bar{U}}(\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_q)$ per $i \equiv 1, \ldots, p$ i $j \equiv 1, \ldots, n$; 3) podem demostrar, per a qualssevol numerals $\underline{d}_1, \ldots, \underline{d}_q, c$, que

$$\bar{U} \vdash (V_{i=1}^{p} \neg \underline{h}_i = \underline{k}_i \vee \neg \bar{f}(\underline{g}_i, \underline{c}) = 0) \mid (\underline{z}_i, \underline{d}_i);$$

4) sabem finitàriament que $\bar{U}$ és consistent amb l'esquema

$$(*) \qquad (V_{i=1}^{p} \neg \underline{h}_i = \underline{k}_i \vee \neg E\bar{f}(\underline{g}_i) = S(0) \mid (\underline{z}_i, \underline{d}_i),$$

per qualsevol numerals $\underline{d}_i$; aleshores també és un segment de $\bar{A}\bar{F}\bar{R}$ el que s'obté en afegir a $\bar{U}$ l'esquema de postulats (*).

En aquesta versió, més liberal que PR.3, cal, però, en cada aplicació, demostrar finitàriament la consistència del nou segment que s'obté en afegir a $\bar{U}$ l'esquema de postulats (*)

Si llegim els postulats en la forma

$$(E\bar{f}(\underline{g}_i) = S(0) \Rightarrow V_{i=1}^{p} \neg \underline{h}_i = \underline{k}_i) \mid (\underline{z}_i, \underline{d}_i)$$

veiem que PR.3' té l'aspecte de regla d'eliminació de $\exists$ (o "rule C"), ja que $E\bar{f}(\underline{g}_i) = S(0)$ té el significat aproximat de "existeix $\underline{c}$ tal que $\bar{f}(\underline{g}_i \cdot \underline{c}) = 0$. Això és important perquè el metateorema de minimització no és cert en aquesta versió correcta de AFR (ni tan sols per numerals). En lloc d'aquest metateorema tenim PR.3' i el següent

Lema. *Per* $\underline{a}_i \in N_{\bar{U}}$*:*
1) Si $\underline{c}$ *és numeral,* $\bar{U} \vdash \bar{f}(\underline{a}_i, \underline{c}) = 0 \Rightarrow M\bar{f}(\underline{a}_i) = 0 \vee \cdots \vee M\bar{f}(\underline{a}_i) = \underline{c}$
2) Si $\underline{c} \in N_{\bar{U}}$*,* $\bar{U} \vdash \bar{f}(\underline{a}_i, \underline{c}) = 0 \Rightarrow \bar{f}(\underline{a}_i, M\bar{f}(\underline{a}_i)) = 0$
3) Si $\bar{U} \vdash \bar{f}(\underline{a}_i)) = 0$*,* $M\bar{f}(\underline{a}_i) \in N_{\bar{U}}$*.*

Per a poder desenvolupar l'anàlisi es fa indispensable la introducció d'un llenguatge auxiliar, el *°–llenguatge*, o *°–lògica*, que ara descriurem. Partim del segment bàsic $\bar{B}$. Introduïm uns *quantificadors ideals* $\forall^\circ$ i $\exists^\circ$. Definim les *° -fórmules* com les expressions produïdes a partir de les fórmules atòmiques de AFR com si $\exists^\circ$ i $\forall^\circ$ fossin els quantificadors del càlcul predicats. Definirem per cada $\underline{A}$ el significat de "$\underline{m}$ és una traducció de $\underline{A}$", que escriurem $\underline{m} \in \mathcal{T}(\underline{A})$. Escriurem les definicions només per als símbols lògics $\neg, \wedge$ i $\exists^\circ$.

$$\begin{aligned}
\underline{m} \in \mathcal{T}_{\bar{V}}(\underline{a} = \underline{b}) &\equiv (\forall \underline{x}_i)[\bar{V} \vdash \underline{m} = \bar{b}(\mid \underline{a} - \underline{b} \mid)] \\
\underline{m} \in \mathcal{T}_{\bar{V}}(\neg \underline{A}) &\equiv (\exists \underline{m}')[\underline{m}' \in \mathcal{T}_{\bar{V}}(\underline{A}) \ \& \ (\forall \underline{x}_i)[\bar{V} \vdash \underline{m} = \bar{b}(\underline{m}')] \\
\underline{m} \in \mathcal{T}_{\bar{V}}(\underline{A} \wedge \underline{B}) &\equiv (\exists \underline{m}', \underline{m}'')[\underline{m}' \in \mathcal{T}_{\bar{V}}(\underline{A}) \ \& \ \underline{m}'' \in \mathcal{T}_{\bar{V}}(\underline{B}) \\
&\qquad \& \ (\forall \underline{x}_i)[\vdash \underline{m} = \underline{m}' \cdot \underline{m}'']] \\
\underline{m} \in \mathcal{T}_{\bar{V}}((\exists^\circ \underline{y})\underline{A}) &\equiv (\exists \underline{m}')(\exists \bar{f}(\underline{x}_i, \underline{y}))[\underline{m}' \in \mathcal{T}_{\bar{V}}(\underline{A}) \\
&\qquad \& \ (\forall \underline{x}_i, \underline{y})[\bar{V} \vdash \bar{f}(\underline{x}_i, y) = \bar{b}(\underline{m}') \ \& \ \underline{m} = E\bar{f}(\underline{x}_i)]
\end{aligned}$$

En la primera de les definicions anteriors, $\underline{x}_i$ són totes les variables que apareixen a $\underline{a}$ o $\underline{b}$, en la segona totes les que apareixen a $\underline{m}'$, etc.

Definim ara la noció $\overset{\circ}{\vdash}$ de *°–teorema* com

$$\bar{V} \overset{\circ}{\vdash} \underline{A} \equiv (\exists \underline{m})[\underline{m} \in T_{\bar{v}}(\underline{A}) \ \& \ (\forall \underline{x}_i)[\bar{V} \vdash \underline{m} = S(0)]]$$

No s'ha de pensar que la °–lògica auxiliar així descrita té les propietats del càlcul de predicats. No hi és vàlid ni tan sols el modus ponens, en general. De fet, no està demostrada la impossibilitat de tenir $\bar{V} \overset{\circ}{\vdash} \underline{A}$ i $\bar{V} \overset{\circ}{\vdash} \neg\underline{A}$ per alguns $\bar{V}$ i $\underline{A}$, mentre que és segur que no tenim mai $\bar{V} \overset{\circ}{\vdash} \neg 0 = 0$. Es a dir, que no està demostrat que no hi puguin haver "°–inconsistències locals".

Aquesta o–lògica és útil, per exemple, en el tractament de la tricotomia.

Els detalls de tot això apareixeran en un altre lloc.

Referències

1. F. TOMAS, Anàlisi formalment recursiva, *Pub. Mat. UAB* **30 n. 2–3** (1986), 35–75.
2. F. TOMAS, Aritmètica i anàlisi formalment recursives, *Pub. Mat. UAB* **28 n. 1** (1984), 19–78.

Instituto de Matemáticas UNAM
Circuito Exterior, C.U.
04510 México, D.F.
MEXICO.

Rebut el 20 de juny de 1988