

SOBRE LOS SUBGRUPOS \mathcal{F} -PREFRATTINI
DE UN GRUPO FINITO RESOLUBLE

M.^a Pilar Fdez.-Ferreirós Erviti

En la presente nota se consideran los subgrupos \mathcal{F} -prefrattini de un grupo finito resoluble G correspondientes a una formación \mathcal{F} localmente definida y a los distintos sistemas de Sylow del grupo. Estos subgrupos fueron introducidos y estudiados por Hawkes en [3] donde prueba que, en el caso en que la formación \mathcal{F} contenga a la formación de los grupos nilpotentes, se cumple que $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = W(\mathcal{G}) D^{\mathcal{F}}(\mathcal{G})$, siendo $W(\mathcal{G})$ y $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{G})$ los subgrupos prefrattini y \mathcal{F} -prefrattini correspondientes a un mismo sistema de Sylow \mathcal{G} del grupo y $D^{\mathcal{F}}(\mathcal{G})$ el \mathcal{F} -normalizador de dicho sistema de Sylow.

El objetivo de este trabajo es la obtención de una relación entre un subgrupo \mathcal{F} -prefrattini y el subgrupo prefrattini correspondiente, válida para cualquier formación \mathcal{F} de grupos finitos resolubles. La relación obtenida permite expresar el subgrupo \mathcal{F} -prefrattini de G relativo a un sistema de Sylow \mathcal{G} en función del subgrupo prefrattini relativo a \mathcal{G} , de ciertos p -subgrupos de Sylow en \mathcal{G} y de un \mathcal{F}' -normalizador de \mathcal{G} , siendo \mathcal{F}' una formación convenientemente elegida. Para ello, se prueba previamente una condición de permutabilidad referente al subgrupo \mathcal{F} -prefrattini relativo a \mathcal{G} y a cualquier colección de p -subgrupos de Sylow en \mathcal{G} , de donde se deduce además que cada sistema de Sylow se reduce en su correspondiente subgrupo \mathcal{F} -prefrattini.

Todos los grupos considerados son finitos y resolubles.

1.- Resultados preliminares. [3]

Sea G un grupo finito resoluble y \mathcal{F} una formación de grupos finitos resolubles definida localmente mediante una formación $f(p)$ para cada primo p . Un subgrupo maximal se dice p -maximal si su índice es una potencia del primo p . Un subgrupo p -maximal M de G se dice \mathcal{F} -normal si $M/\text{Core } M \in f(p)$, y se dice \mathcal{F} -anormal en caso contrario. Un p -factor principal H/K de G se dice \mathcal{F} -central cuando $G/C_G(H/K) \in f(p)$ y \mathcal{F} -excéntrico en caso contrario.

Sea ahora \mathcal{G} un sistema de Sylow de G , p un primo fijo divisor del orden de G y S^p el p -complemento de Sylow de G en \mathcal{G} . Sea \mathcal{M}_p el conjunto de todos los subgrupos maximales \mathcal{F} -anormales de G que contienen a S^p ; si se considera ahora un subconjunto de \mathcal{M}_p que contiene exactamente un complemento de cada p -factor principal \mathcal{F} -excéntrico complementado de una serie principal dada de G y se denota por M_p la intersección de todos los elementos de este subconjunto, resulta que

$$M_p = \bigcap \{ M / M \text{ es maximal } \mathcal{F}\text{-anormal y } M \supseteq S^p \}$$

Se define entonces el subgrupo \mathcal{F} -prefrattini relativo a \mathcal{G} , $w^{\mathcal{F}}(\mathcal{G})$ mediante

$$w^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = \bigcap_{p|G|} M_p$$

Como propiedades destacables de estos subgrupos, citaremos las siguientes:

- Al variar \mathcal{G} , los subgrupos \mathcal{F} -prefrattini de G forman una clase característica conjugada.
- Un subgrupo \mathcal{F} -prefrattini evita cada factor principal \mathcal{F} -excéntrico complementado de G y cubre el resto de los factores principales.
- Si \mathcal{F} contiene a la formación de los grupos nilpotentes y D es el \mathcal{F} -normalizador del sistema \mathcal{G} , se verifica

$$w^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = DW(\mathcal{G})$$

2.- Propiedades de permutabilidad.

(2.1) Proposición: Sea \mathcal{F} una formación localmente definida por $\{f(p)\}$ y sea \mathcal{F}' la formación definida localmente por

$$\begin{aligned} g(p) &= \mathcal{F} & \text{si } p \in \pi \\ g(p) &= f(p) & \text{si } p \notin \pi \end{aligned}$$

donde \mathcal{F} es la clase de todos los grupos finitos resolubles y π un conjunto de números primos. Entonces,

$$w^{\mathcal{F}}(G) \prod_{p \in \pi} S_p = w^{\mathcal{F}'}(G) \quad (S_p \text{ en } \mathcal{G})$$

Demostración:

Por definición de $w^{\mathcal{F}'}(G)$, es claro que $S_p \leq w^{\mathcal{F}'}(G)$ para todo $p \in \pi$ puesto que G no posee p -factores principales \mathcal{F}' -excéntricos para todo $p \in \pi$. Además, un p -factor principal con $p \notin \pi$ es \mathcal{F} -excéntrico si y solo si es \mathcal{F}' -excéntrico. Por tanto, $w^{\mathcal{F}}(G) \leq w^{\mathcal{F}'}(G)$.

Resulta así que

$$\langle w^{\mathcal{F}}(G), \prod_{p \in \pi} S_p \rangle \leq w^{\mathcal{F}'}(G).$$

Vamos a comparar ahora el número de elementos del conjunto $w^{\mathcal{F}}(G) \prod_{p \in \pi} S_p$ con el orden de $w^{\mathcal{F}'}(G)$:

El orden de $w^{\mathcal{F}'}(G)$ es el producto de los órdenes de todos los factores principales \mathcal{F}' -centrales y de todos los \mathcal{F}' -excéntricos no complementados.

Por otra parte,

$$\left| w^{\mathcal{F}}(G) \prod_{p \in \pi} S_p \right| = \frac{|w^{\mathcal{F}}(G)| \left| \prod_{p \in \pi} S_p \right|}{\left| w^{\mathcal{F}}(G) \cap \left(\prod_{p \in \pi} S_p \right) \right|} \quad (1)$$

y, como $w^{\mathcal{F}}(G) \cap \left(\prod_{p \in \pi} S_p \right)$ evita todos los q -factores ($q \notin \pi$) y todos los factores \mathcal{F} -excéntricos complementados, su orden es a lo sumo, el producto de los órdenes de los factores principa-

les que no evita, es decir, el producto de los órdenes de los p-factores ($p \in \pi$) que son, bien \mathcal{F} -centrales o bien \mathcal{F} -excéntricos no complementados.

Resulta entonces, que el número de elementos del conjunto $w^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) \prod_{p \in \pi} S_p$ es, al menos, el producto de los órdenes de los factores \mathcal{F}' -centrales y de los factores \mathcal{F}' -excéntricos no complementados, es decir, el orden de $w^{\mathcal{F}'}(\mathcal{G})$. Para comprobar esto, basta tener en cuenta que el producto que aparece en el numerador en (1), es el producto de los órdenes de los factores \mathcal{F} -centrales, de los \mathcal{F} -excéntricos no complementados y de los p-factores con $p \in \pi$, y dicho producto coincide con el producto de los órdenes de los factores \mathcal{F}' -centrales y de los \mathcal{F}' -excéntricos no complementados.

Se tiene así que

$$w^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) \prod_{p \in \pi} S_p = w^{\mathcal{F}'}(\mathcal{G})$$

y $w^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) \prod_{p \in \pi} S_p$ es subgrupo de \mathcal{G} .

(2.2) Consecuencias:

- a) $w^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) S_p = S_p w^{\mathcal{F}}(\mathcal{G})$ para todo S_p en \mathcal{G} . Con esto, y el resultado de Gillam dado en ([2], teorema 3.2), puede ser caracterizado un subgrupo \mathcal{F} -prefrattini mediante su propiedad cubre-evita y la condición anterior.
- b) Todo sistema de Sylow se reduce en su correspondiente subgrupo \mathcal{F} -prefrattini.

Demostración:

De la proposición anterior se deduce que $w^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) S_p = w^{\mathcal{F}'}(\mathcal{G})$ siendo \mathcal{F}' la formación definida por

$$\begin{cases} g(p) = \mathcal{F} \\ g(q) = f(q) \\ q \neq p \end{cases}$$

Como el orden de $w^{\mathcal{F}'}(\mathcal{G})$ es el producto de los órdenes de los factores \mathcal{F}' -centrales y de los \mathcal{F}' -excéntricos no complementados, se tiene que

$$|w^{\mathcal{F}}(G) \cap S_p| = \frac{|w^{\mathcal{F}}(G)| |S_p|}{|w^{\mathcal{F}'}(G)|}$$

y este último es el producto de los órdenes de los p -factores \mathcal{F} -centrales y de los p -factores \mathcal{F} -excéntricos no complementados. Entonces,

$$\left| \frac{w^{\mathcal{F}}(G)}{w^{\mathcal{F}}(G) \cap S_p} \right| = \frac{|w^{\mathcal{F}'}(G)|}{|S_p|} \quad \text{es primo con } p.$$

Resulta así que $w^{\mathcal{F}}(G) \cap S_p$ es un p -subgrupo de Sylow de $w^{\mathcal{F}}(G)$ que tiene la propiedad de evitar todos los q -factores ($q \neq p$) y todos los p -factores \mathcal{F} -excéntricos complementados y de cubrir el resto de los factores de cualquier serie principal de G .

3.- Determinación de $w^{\mathcal{F}}(G)$ en función de $w(G)$:

Como ya se ha mencionado en la introducción, este problema está resuelto en el caso en que \mathcal{F} contiene a la formación de los grupos nilpotentes, es decir, cuando $f(p) \neq \emptyset$ para todo primo p .

En lo que sigue, $\hat{\mathcal{F}}$ será una formación definida localmente mediante

$f(p) = \emptyset$ para todo primo p de un conjunto de primos π .

$f(p) \neq \emptyset$ si $p \in \pi$.

Antes de probar el resultado que hemos citado en la introducción, enunciaremos el siguiente

(3.1) Lema: $w(G) \prod_{p \in \pi} S_p$ es subgrupo de G , para cualquier colección de p -subgrupos de Sylow de G en G , y coincide con $w^{\mathcal{F}'}(G)$ siendo \mathcal{F}' la formación dada por

$$\begin{aligned} g(p) &= \mathcal{F} & (p \in \pi) \\ g(p) &= \emptyset & (p \notin \pi) \end{aligned}$$

Demostración:

Es inmediata sin más que aplicar la proposición (2.1) al ca-

so en que \mathcal{F} venga dada por $f(p) = \emptyset$ para todo primo p .

(3.2) Proposición: Si \mathcal{F}' es la formación definida por $g(p) = \mathcal{F}$ cuando $p \in \kappa$ y $g(p) = f(p)$ si $p \notin \kappa$, se tiene:

$$W^{\mathcal{F}}(G) = W(G) \cap W^{\mathcal{F}'}(G) \prod_{p \in \kappa} S_p$$

siendo \mathcal{F} la formación definida al comienzo de este párrafo.

Demostración:

Ya que cada factor \mathcal{F}' -excéntrico es \mathcal{F} -excéntrico y es un p -factor con $p \in \kappa$, se tiene que $W^{\mathcal{F}}(G) \subseteq W^{\mathcal{F}'}(G)$.

Por otra parte, $W^{\mathcal{F}'}(G) \subseteq W(G) \prod_{p \in \kappa} S_p$, pues éste último es, por el lema anterior, el subgrupo preferrattini relativo a la formación dada por

$$\begin{cases} h(p) = \mathcal{F} & (p \notin \kappa) \\ h(p) = \emptyset & (p \in \kappa) \end{cases}$$

Entonces,

$$W^{\mathcal{F}}(G) \subseteq W^{\mathcal{F}'}(G) \cap W(G) \prod_{p \in \kappa} S_p.$$

Comparando ahora los órdenes de ambos subgrupos por el procedimiento utilizado anteriormente, se tiene la igualdad:

En efecto, resulta que el orden de $W^{\mathcal{F}'}(G) \cap W(G) \prod_{p \in \kappa} S_p$ es, a lo sumo, el producto de los órdenes de los factores principales siguientes:

p -factores no complementados con $p \in \kappa$

\mathcal{F} -centrales y \mathcal{F} -excéntricos no complementados con $p \in \kappa$ y este producto coincide con el producto de los órdenes de los \mathcal{F} -excéntricos no complementados y de los \mathcal{F} -centrales, es decir, con el orden de $W^{\mathcal{F}}(G)$.

BIBLIOGRAFIA:

- [1] Gaschütz, W. "Praefrattinigruppen". Arch. Math. 13 (1962) 418-426.
- [2] Gillam, J.D. "Cover-avoid subgroups in finite solvable groups". J. Algebra 29 (1974), 324-329.
- [3] Hawkes, T. "Analogues of prefrattini subgroups". Proc. Inter. Conf. Theory of Groups. (Canberra, 1965), 145-150. Gordon and Breach, New York, 1967.

Rebut el 8 d'agost del 1983

M^a. Pilar Fdez.-Ferreirós Erviti
Departamento de Geometria y Topologia
Facultad de Ciencias
Universidad de Santander
SANTANDER
ESPAÑA