Pub. Mat. UAB
N° 23, Febrer 1981

CLASIFICACION DE PUNTOS DOBLES DE SUPERFICIES ALGEBROIDES SUMERGIDAS.

Ignacio Luengo Velasco

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad Complutense de Madrid

ABSTRACT

It is a well-known result that one can associate to each embedded algebroid surface (E.A.S.), such that mult(S) = 2, an algebroid curve C(V) (not necessarilly reduced). On the other hand, in [5] we associate to each E.A.S. W a finite weighted tree $A_k(W)$. In this work we prove that if S and S' are E.A.S. with $m(S) = m(S') = 2$, then $A_k(S') \approx A_k(S)$ if and only if C(S) and C(S') are equisingular as non-reduced curves.

---

1. Sea S una superficie algebroide sumergida (S.A.S.) definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica k, que consideramos fijo. Si mult.(S) = 2, se puede asociar a S una curva algebroide plana no reducida C(S), de tal forma que las superficies S y S' son k-isomorfas si y sólo si C(S) y C(S') son k-isomorfas, con lo que la clasificación por isomorfismo de puntos dobles de S.A.S. coincide con la de las curvas asociadas (para una formulación clásica de este hecho véase [2].)

A.M.S. Subject Classification: 14B05, 32C40.

Ahora bien, desde el punto de vista de la estructura geométrica de la singularidad, la clasificación por isomorfismo es demasiado fuerte, como se pone de manifiesto en el caso de curvas planas. Para clarificar la estructura geométrica de la singularidad nosotros asociamos a cada S.A.S. V un árbol pesado $A_k(V)$ que describe el proceso de resolución puntual (formal) de V mediante transformaciones monoidales y cuadráticas formales.

El objeto de este trabajo, que es un resumen, es comparar en puntos dobles de S.A.S. la clasificación mediante los árboles A_k y mediante la clase de equisingularidad de $C(V)$, obteniéndose (Teorema 2.4) que ambas coinciden.

2. Sea $S = \mathrm{Spec}(\square)$ una S.A.S. definida sobre un cuerpo $k \subseteq \square$; si $e(S) = 2$ se puede elegir en $\mathfrak{m} \subseteq \square$ un sistema de coordenadas $\{x, y, z\}$ tal que la ecuación de S respecto a $\{x, y, z\}$ sea de la forma $Z^2 + F(X,Y) \in k[[X,Y,Z]]$. Entonces se tiene (cf. [3], Teoremas 2 y 2a):

Lema 1. *Si S y S' son S.A.S. de ecuaciones $Z^2 + F(X,Y)$ y $Z^2 + F'(X,Y)$, $S \approx S'$ si y sólo si existe un k-isomorfismo de $k[[X,Y,Z]]$, tal que $\varphi(F) = F'.u$, con $u(0,0) \neq 0$.*

2.2. Definición. Dada S de ecuación $Z^2 + F(X,Y)$, a la variedad algebroide $\mathrm{Spec}(k[[X,Y]]/_{(F(X,Y))})$ la llamaremos *curva asociada a* S, y la designaremos por $C(S)$.

$C(S)$ es una curva algebroide no reducida y por el Lema 1, la clase de isomorfismo de $C(S)$ no depende del sistema de coordenadas elegido.

En la situación anterior, sean $F = \prod_{i=1}^{r} F_i^{\alpha_i}$ la descomposición en factores irreducibles de $F \in k[[X,Y]]$, γ_i la rama algebroide de $C(S)$ determinada por F_i, y $(C(S)) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ el conjunto de ramas de $C(S)$. Para cada i, sean $m(\gamma_i^1)$, $m(\gamma_i^2)$, ... las multiplicidades de las sucesivas transformadas cuadráticas de γ_i, y sea la aplicación

$$\delta : (C(S)) \longrightarrow N^N,$$

definida por $\delta(\gamma_i) = (m(\gamma_i^1), m(\gamma_i^2), \dots) \in N^N$. Designaremos por $m(\gamma_i, \gamma_j)$ la multiplicidad de intersección y $m: (C(S)) x (C(S)) \longrightarrow N$ la aplicación correspondiente. Consideremos, por último, la aplicación

$\alpha: (C(S)) \longrightarrow N$, definida por $\alpha(\gamma_i) = \alpha_i$. Definimos entonces:

2.3. <u>Definición</u>. A la cuaterna $[S] = ((C(S)), \delta, m, \alpha)$ la llamaremos *clase de* S. Diremos que dos clases $[S]$ y $[S']$ son *isomorfas* si existe una biyección $b: (C(S)) \longrightarrow (C(S'))$ que conmuta con las aplicaciones δ, m y α.

Si S es normal, entonces C(S) es reducida, con lo que $\alpha(\gamma_i) = 1$, para $1 \leq i \leq r$, y entonces $[S]$ representa la clase de equisingularidad de C(S) por [7], Proposición 4.5. Si S no es normal, C(S) no es reducida y en este caso $[S]$ representa la clase de equisingularidad de $(C(S))_{red}$ más la multiplicidad de cada componente (α_i).

Sea S una S.A.S. y $A_k(S) = (A, \alpha, \beta)$ el árbol pesado que describe el proceso de resolución de S mediante transformaciones monoidales y cuadráticas formales (cf. [5], Cap. II, para más detalle). Se tiene entonces:

2.4. <u>Teorema</u>. *Sean S y S' dos S.A.S. tales que* $m(S) = m(S') = 2$. *Entonces se cumple que* $[S] \approx [S']$ *si y sólo si* $A_k(S) \approx A_k(S')$.

La parte difícil de la demostración consiste en ver que $A_k(S)$ determina unívocamente $[S]$, lo cual se hace dando un algoritmo que permite calcular $[S]$ a partir de $A_k(S)$.

3. Consideremos ahora una superficie analítica compleja y sea P un punto doble <u>normal</u> de la superficie. Por ser P normal, $O_{X,P}$ es de Cohen-Macaulay (cf. [8], p. 397), con lo que por [1],

dim. inm. $(O_{X,P}) = $ mul.$(X,P) + 1 = 3$.

Denotemos por $(X,P) = \mathrm{Spec}\,(O_{X,P})$ la S.A.S. determinada por X en P, y por $C(X,P)$ la curva asociada a (X,P) que es reducida.

Sean $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ la resolución de X en un entorno de P obtenida mediante el proceso canónico de Zariski (cf. [6], p.668) y $N = \pi^{-1}(P)$ el divisor excepcional, que es una unión de curvas irreducibles E_i que son compactas ya que π es propia. Si se considera el tipo topológico o diferenciable de la inmersión de N en $\tilde{X}$, que viene dado por el tipo topológico de las singularidades de los E_k, el género de cada E_i y los números de intersección de (E_i,E_j) y (E_i,E_i), se obtiene otra posible clasificación de puntos dobles normales de superficies complejas. Ahora bien, Laufer en [4], demuestra que esta clasificación coincide con la obtenida mediante la clase de equisingularidad de $C(X,P)$ y el árbol de (X,P). Se tiene pues, que todas ellas dan una clasificación satisfactoria de puntos dobles de S.A.S.

Referencias

[1] S. S. ABHYANKAR: Local rings of high embedding dimension, Amer. J. Math., 89 (1967), p.1073-1077

[2] A. FRANCHETA: Sui punti doppi isolati delle superficie algebriche, Note I, Rend. Acad. dei Lincei, (1946), p. 49-57

[3] D. KIRBY: The structure of an isolated multiple point of a surface I, Proc. London Math. Soc., 6 (1956), p. 597-609

[4] H. LAUFER: On normal two-dimensional double point singularities, Israel J. Math., 31 (1978), p. 315-335

[5] I. LUENGO: Sobre la estructura de las singularidades de superficies algebroides sumergidas, Monografías de Matemática del Inst. "Jorge Juan" del C.S.I.C., Madrid, 1980

[6] O. ZARISKI: The reduction of the singularities of an algebraic surface, Ann. Math., 40 (1939), p. 639-689

[7] O. ZARISKI: Contributions to the problem of equisingularity, en: Questions on Algebraic Varieties, C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma, 1970

[8] O. ZARISKI y P. SAMUEL: Commutative Algebra, van Nostrand, Princeton, 1960.