N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

SISTEMAS DE INTERPOLACION EN R^2.

M. Gasca, V. Ramírez

Dpto. de Ecuaciones Funcionales
Universidad de Granada

We study the posing and resolution of Hermite-Lagrange interpolation problems in R^2, by extending the concepts of interpolation system, associated interpolation space and set of associated data which were introduced by Gasca-Maeztu [1].

Principally, the extension is done by sustituting the polinomials of degree one (straight lines) which originate the system by any functions f(x,y), preserving the same simplicity in the construction by recurrence of the interpolating function that in [1].

Definición 1

Denominamos sistema de interpolación en R^2 al siguiente conjunto

(1) $$S = \left\{ f_i : \left\{ (u_{ij}, f_{ij}, \alpha_{ij}) \right\}_{j=0\ldots m(i)} \right\}_{i=0\ldots n}$$

donde

i) f_i, f_{ij}, $i=0\ldots n$, $j=0\ldots m(i)$ son funciones de R^2 en R suficientemente regulares.

ii) u_{ij} es un punto de R^2 tal que $f_i(u_{ij}) = f_{ij}(u_{ij}) = 0$

iii) α_{ij} es una variable indicador, que puede tomar los valores cero ó uno, siendo $\alpha_{im(i)} = 1$, $i=0\ldots n$.

iv) f_i tiene gradiente distinto de cero en todo $u_{hk} \in S$ tal que $f_i(u_{hk}) = 0$, $\alpha_{hk} = 1$ e $i \leq h$.

v) f_{ij} tiene gradiente distinto de cero en cualquier $u_{ik} \in S$ tal que $f_{ij}(u_{ik}) = 0$, $\alpha_{ik} = 1$, $j \leq k$.

vi) Si $\alpha_{ij} = 1$, entonces $\nabla f_i\big|_{u_{ij}}$ no es proporcional a $\nabla f_{ij}\big|_{u_{ij}}$

Notemos por

$$I = \{(i,j) \in Z^+ \times Z^+,\ i = 0 \ldots n,\ j = 0 \ldots m(i)\}$$

$$I' = \{(i,j) \in I \ \text{ tales que } \alpha_{ij} = 1\}$$

En el conjunto I consideramos el siguiente orden

$$(2) \qquad (i,j) < (h,k) \Leftrightarrow \begin{cases} i < h \\ \text{ó} \\ i = h,\ j < k \end{cases}$$

<u>Definición 2</u>

Sea S un sistema de interpolación en R^2 y (i,j) un par de I'. Entonces notamos por

$$t_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ si } j = 0 \\ \text{el número de funciones } f_{io} \ldots f_{ij-1} \text{ nulas en } u_{ij} \text{ cuyo gra-} \\ \text{diente en } u_{ij} \text{ es proporcional al de } f_i, \text{ si } j \geq 1 \end{cases}$$

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ si } j = 0 \\ \text{el número de funciones } f_{io} \ldots f_{ij-1} \text{ nulas en } u_{ij}, \text{ cuyo gra-} \\ \text{diente en } u_{ij} \text{ no es proporcional al de } f_i, \text{ si } j \geq 1 \end{cases}$$

$$e_i = \max_{(i,j) \in I'} \left\{ t_{ij} + \left[\frac{p_{ij}}{2}\right] + 1 \right\} \quad i = 0, \ldots n-1$$

donde $[x]$ significa parte entera de x.

Denominamos <u>base asociada</u> al sistema S, B(S), al siguiente conjunto de funciones de R^2 en R

$$(3) \quad B(S) = \{\varphi_{ij}\}_{(ij) \in I'} = \{f_o^{e_o} \ldots f_{i-1}^{e_{i-1}} f_{io} \ldots f_{ij-1}\}_{(ij) \in I'}$$

Por $\overline{B(S)}$ entenderemos el espacio vectorial engendrado por las funciones de B(S)

<u>Definición 3</u>.-

Sea S un sistema de interpolación en R^2, y sea $(i,j) \in I'$, entonces notaremos por

$$T_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ si } i = 0 \\ \text{la suma de aquellos } e_h,\ h < i, \text{ tales que } f_h(u_{ij}) = 0 \text{ y} \\ \nabla f_h\big|_{u_{ij}} \text{ es proporcional a } \nabla f_i\big|_{u_{ij}}, \text{ si } i \geq 1 \end{cases}$$

(∇f indica, como es habitual, gradiente de f)

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ si } i = 0 \\ \text{la suma de aquellos } e_h,\ h < i, \text{ tales que } f_h(u_{ij}) = 0 \text{ y} \\ \nabla f_h\big|_{u_{ij}} \text{ no es proporcional a } \nabla f_i\big|_{u_{ij}}, \text{ si } i \geq 1 \end{cases}$$

$\rho_{\underline{i}j}$: al vector $\left(- \dfrac{\partial f_i}{\partial y}, \dfrac{\partial f_i}{\partial x}\right)_{u_{ij}}$

$\rho_{i\underline{j}}$: al vector $\left(- \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial y}, \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x}\right)_{u_{ij}}$

Denominamos <u>conjunto de datos</u>, L(S), asociado al sistema de interpolación en R^2 dado en (1) a

$$(4) \qquad L(S) = \{L_{ij}\}_{(ij) \in I'}$$

donde
$$L_{ij}(f) = \frac{\partial^{T_{ij} + t_{ij} + P_{ij} + p_{ij}}}{\partial \rho_{i\underline{j}}^{T_{ij} + t_{ij}}\, \partial \rho_{\underline{i}j}^{P_{ij} + p_{ij}}} f \Bigg|_{u_{ij}}$$

<u>Teorema 1</u>.

Sea S un sistema de interpolación en R^2, B(S) la base asociada y L(S) el conjunto de datos asociados a S, entonces el determinante

$$(1)\ \det\ (L_{ij}(\varphi_{hk}))_{(ij),\,(hk)\in I'}$$

es triangular inferior con todos los elementos de la diagonal principal distintos de cero.

Nota: Los elementos de B(S) y de L(S) los consideramos ordenados, en función de sus subindices con el orden establecido en (2)

Corolario I.- Los elementos de B(S) son una base de $\overline{B(S)}$ y las formas lineales $\{L_{ij}\}_{(ij)\in I'}$ son linealmente independientes sobre $\overline{B(S)}$

Teorema 2.

Dado un sistema de interpolación S y una función suficientemente regular g, el problema de encontrar otra función $\varphi\in\overline{B(S)}$ tal que

$$L_{ij}(\varphi)=L_{ij}(g),\ \forall (ij)\in I'$$

tiene una única solución.

Corolario II.- La función φ puede calcularse de forma iteriativa resolviendo un sistema triangular inferior de determinante (1).

BIBLIOGRAFIA

[1] GASCA,M. - MAEZTU,J.I. "On lagrange and Hermite interpolation in R^k" mandado a Numerische Mathematik, (1980)

[2] MAEZTU,J.I. "Interpolación de Lagrange y Hermite en R^k". Tesis doctoral (Granada, 1979).