Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

ALGUNOS RESULTADOS SOBRE LA p-ESPERANZA (MEDIDAS DE CENTRALIZACION INTRINSECAS EN ESPACIOS L^p)

Carlos Matrán Bea

Dpto. de Estadística
Colegio Universitario de Burgos

ABSTRACT: We study the p-mean as a metric projection of a random variable of L^{p+1} over the subspace of the constants, so as to generalize this concept to L^p in virtue of the characterization of the p-mean, as the constant E_p that verifies the equation $\int |X-E_p|^p \operatorname{sign}(X-E_p)\, d\mu = 0$. We obtain boundaries of the type $E_p(|X|) \leq K\|X\|_p$ and $\|X\|_p \leq K.E_p(|X|)$ and from these we prove that $E_p(\|\ \|)$ is a quasinorm in the space L^p that generates the usual topology of these spaces and also the continuity of the p-mean, and as a consequence several results of convergence.

INTRODUCCION: Como un caso particular de la generalización de la Esperanza Condicionada que intentábamos en [7], pretendemos hacer otro tanto con la Esperanza Matemática, estudiando medidas de centralización de variables aleatorias reales que consideramos intrínsecas a los espacios L^p en el sentido siguiente: En un espacio probabilístico (Ω,σ,μ) la esperanza de una v.a.r. X de cuadrado integrable es la constante π definida por la expresión $\|X-\pi\|_2 = \min_{k\in R} \|X-k\|_2$, ó teniendo en cuenta la estructura de espacio de Hilbert de $L^2(\Omega,\sigma,\mu)$, la proyección ortogonal de X sobre el subespacio de las variables constantes $L^2(\Omega,\alpha_0,\mu)$ (siendo α_0 la σ-álgebra trivial), y quedando así patente la interrelación entre media y varianza. En los espacios L^p $(p>1)$ no podemos hablar, en general, de proyección ortogonal, pero si de proyección métrica (Singer [9]), y así para una variable $X\in L^p(\Omega,\sigma,\mu)$ podremos definir una medida de centralización π_p como la proyección métrica de X sobre $L^p(\Omega,\alpha_0,\mu)$, verificando entonces la condición de mínimo $\|X-\pi_p\|_p = \min_{k\in R} \|X-k\|_p$ que a su vez queda caracterizada por $\int |X-\pi_p|^{p-1} \operatorname{sign}(X-\pi_p)\, d\mu = 0$ (Singer

[9],pag 56) y analogamente asociarle como medida de dispersión mas natural (por su analogía con la varianza) el valor $\|X-\pi_p\|_p^p$.

No obstante, al igual que la Esperanza Matemática no es definible tan solo para variables de cuadrado integrable, sino que, es una característica de las variables integrables: la caracterización que dábamos mas arriba y la posibilidad de utilizarla para variables (p-1)-integrables nos hará ampliar la definición a estas, coincidiendo entonces con el concepto de r-esperanza (ó r-media) con r=p-1, que aparece definido en [1], por lo que utilizaremos esta terminología desde un principio.

En [3], y en conexión con un problema de estimación robusta, Huber estudia los "M-estimadores", demostrando una ley fuerte de los grandes números para estos, válida para la p-esperanza; estudia igualmente el problema de normalidad asintótica. En [1], se trabaja con el concepto aún mas amplio de ϕ-medias, con resultados similares sobre las propiedades asintóticas de las ϕ-medias muestrales, y estudiándose el problema de las familias de distribuciones asociadas a estas "esperanzas generalizadas". Daniel, en [2] estudia el caso límite cuando $p\to\infty$.

En este trabajo se estudia en principio la p-esperanza como proyección métrica en L^{p+1}. Se observa que al igual que ocurre con la esperanza matemática, que determina la topología en L^1, la p-esperanza, si bien no determina en general una norma, si que determina una cuasinorma que define en L^p su topología usual. Probamos igualmente que la p-esperanza es continua en L^p (su continuidad en L^{p+1} es, en cambio, consecuencia de venir determinada por la proyección métrica), que junto con su carácter monótono asegura la validez para esta de los clásicos teoremas de convergencia (mayorada, etc)

DEFINICIONES Y PRIMERAS PROPIEDADES

Definición.1.1.: Dado un espacio probabilístico (Ω,σ,μ), llamaremos p-esperanza (p>0), a la aplicación $E_p : L^{p+1} \longrightarrow R$ que para cada variable (p+1)-integrable viene determinada por su proyección métrica sobre el subespacio de las constantes $L^{p+1}(\Omega,\alpha_o,\mu)$ (siendo α_o la σ-álgebra trivial $\{\emptyset,\Omega\}$).

Para cada $X\in L^{p+1}(\Omega,\sigma,\mu)$, $E_p(X)$ será entonces la constante de mínima distancia (por la métrica usual de L^{p+1}) a X, así como la esperanza condicionada de X de orden p+1 a α_o (definida en [7]). La existencia y unicidad, y propiedades mas características quedan igualmente justificadas en [7].

Proposición.1.2.: Sea $X \in L^{p+1}(\Omega,\sigma,\mu)$ $(0<p<\infty)$; la p-esperanza de X es la única constante $E_p(X)$ que verifica $\int |X-E_p(X)|^p \operatorname{sign}(X-E_p(X))d\mu = 0$. Además la p-esperanza verifica: a) $\| X-E_p(X)\|_{p+1} \leq \|X\|_{p+1}$ b) $E_p(X+k) = E_p(X)+k$ $\forall k \in R$ c) $E_p(kX) = kE_p(X)$ $\forall k \in R$ d) $E_p(k) = k$ $\forall k \in R$ e) La p-esperanza es continua en L^{p+1} f) Si $X \leq Y$ casi seguro y $X,Y \in L^{p+1}$ $E_p(X) \leq E_p(Y)$

Cabe destacar, en cambio, que la p-esperanza no es, en general, aditiva. De e) y f) se podrian deducir ya criterios de convergencia en L^{p+1}.

La definición siguiente, justificada en la introducción como medida de dispersión asociada a la p-esperanza, concede a esta la propiedad de mínimo de que goza la esperanza respecto de la varianza. Permite así mismo obtener desigualdades análogas a la de Tchebycheff para las p-esperanzas.

Definición.1.3.: Sea $X \in L^{p+1}(\Omega,\sigma,\mu)$ $(0<p<\infty)$; llamaremos varianza de orden p de X al valor $\Sigma_p(X) = \|X - E_p(X)\|_{p+1}^{p+1}$.

La caracterización que dábamos en la prop.1.2. de la p-esperanza, así como la observación que haciamos al comienzo, hacen que ampliemos la definición 1.1, para ver que la p-esperanza puede considerarse como una característica de las variables p-integrables: $\Phi_X(a)=\int |X-a|^p \operatorname{sign}(X-a)d\mu$ para una variable $X \in L^p$ fija, es una función continua, estrictamente decreciente y, $\lim_{a\to\infty} \Phi_X(a)=-\infty$, $\lim_{a\to-\infty} \Phi_X(a)=\infty$, por tanto toma, y sólo una vez, todo valor real, en particular tiene entonces un solo cero. Si X no es, en cambio, p-integrable, la ecuación $\Phi_X(a)=0$ no tiene sentido; por tanto en adelante utilizaremos la siguiente definición, característica pues de las variables p-integrables.

Definición.1.4.: Diremos que una variable X tiene p-esperanza $(p>0)$ si existe una constante $E_p(X)$ que verifique $\int |X-E_p(X)|^p \operatorname{sign}(X-E_p(X))d\mu=0$. Llamaremos entonces a tal constante p-esperanza de X.

Proposición.1.5.: Para cualesquiera $X,Y \in L^p(\Omega,\sigma,\mu)$ $(p>0)$, y para todo $k \in R$: a) $E_p(X+k)=E_p(X)+k$ b) $E_p(kX)=kE_p(X)$ c) $E_p(k)=k$ d) Si $X \leq Y$ c.s. $E_p(X) \leq E_p(Y)$ e) $|E_p(X)| \leq E_p(|X|)$.

Teorema.2.1.: Sea X una variable p-integrable ($0<p<\infty$), entonces:

a) Si $0<p\leq 1$ $\quad E_p(|X|)\leq 3^{1/p}\|X\|_p$ y $\|X\|_p\leq 3^{1/p}E_p(|X|)$

b) Si $1\leq p<\infty$ $\quad E_p(|X|)\leq\|X\|_p(1+2^{1/p})$ y $\|X\|_p\leq E_p(|X|)\ (1+2^{1/p})$

Demostración: Por definición de p-esperanza, si I(A) es el indicador de A:

$$\int(|X|-E_p(|X|))^p I(|X|>E_p(|X|))d\mu = \int(E_p(|X|)-|X|)^p I(|X|<E_p(|X|))d\mu \Longrightarrow$$

$$\||X|-E_p(|X|)\|_p^p=2\int(|X|-E_p(|X|))^p I(|X|>E_p(|X|))d\mu=2\int(E_p(|X|)-|X|)^p I(|X|<E_p(|X|))d\mu$$

y de la desigualdad $(a-b)^h\leq a^h$ si $a\geq b\geq 0$ y $h>0$ obtenemos

1) $\||X|-E_p(|X|)\|_p^p \leq 2\int|X|^p I(|X|>E_p(|X|))d\mu\leq 2\int|X|^p d\mu = 2\|X\|_p^p$

2) $\||X|-E_p(|X|)\|_p^p \leq 2\int(E_p(|X|))^p I(|X|<E_p(|X|))d\mu\leq 2\int(E_p(|X|))^p d\mu=2(E_p(|X|))^p$

Si se da a) entonces $\|X+Y\|_p^p\leq\|X\|_p^p+\|Y\|_p^p$ y por tanto:

$(E_p(|X|))^p\leq\||X|-E_p(|X|)\|_p^p+\|X\|_p^p\leq 3\|X\|_p^p$ por la desigualdad 1)

$\|X\|_p^p\leq\||X|-E_p(|X|)\|_p^p+(E_p(|X|))^p\leq 3(E_p(|X|))^p$ por la desigualdad 2)

En el caso b) $\|X+Y\|_p\leq\|X\|_p+\|Y\|_p$ y la aplicación de las desigualdades 1) y 2) demuestran igualmente el resultado.

De este teorema deducimos inmediatamente, recordando la definición de una cuasinorma ρ (Köthe [4]); así como la topología que esta determina, dando lugar a un espacio vectorial topológico, a partir de un sistema fundamental de entornos de 0 del tipo $V_\xi(0)=[x\ /\ \rho(x)<\xi]$:

Teorema.2.2.: $E_p(|\ |)$ es una cuasinorma en $L^p(\Omega,\sigma,\mu)$ para todo $p>0$, que genera la misma topología que $\|\ \ \|_p$.

Teorema.2.3.: La p-esperanza es continua en $L^p(\Omega,\sigma,\mu)$ ($p>0$).

Demostración: Sea (X_n) una sucesión de v.a.r. p-integrables, convergente en media de orden p a otra X. De esta convergencia se deduce la de la sucesión $(\|X_n\|_p)$, y de las desigualdades obtenidas en 2.1 obtenemos la acotación de $(E_p(X_n))$. Si a_o es, entonces, un valor de adherencia de esta sucesión, existirá una subsucesión (X_{n_m}) que converge casi seguro y en media de orden p a X, para la cual $E_p(X_{n_m})\longrightarrow a_o$. Entonces se deducen las convergencias:

$$\int(X_{n_m}-E_p(X_{n_m}))^p I(X_{n_m}>E_p(X_{n_m}))\,d\mu \longrightarrow \int(X-a_o)^p I(X>a_o)\,d\mu$$

$$\int(E_p(X_{n_m})-X_{n_m})^p I(X_{n_m}<E_p(X_{n_m}))\,d\mu \longrightarrow \int(a_o-X)^p I(X<a_o)\,d\mu$$

y por definición de p-esperanza, entonces $E_p(X)=a_o$ c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. K. BRØNS, H. D. BRUNK, W. E. FRANCK, D. L. HANSON (1969). Generalized means and associated families of distributions. Ann Math Statist 40. 339-355

[2] J. W. DANIEL (1971). Asymptotic behavior of high order means. Ann Math Statist 42. 1761-1762

[3] P. J. HUBER (1964). Robust estimation of a location parameter. Ann Math Statist 35. 73-101

[4] G. KÖTHE (1969). Topological vector spaces I. Springer Verlag

[5] M. LOEVE (1963). Probability theory. D. Van Nostrand

[6] C.-M. MARLE (1974). Mesures et probabilités. Hermann

[7] C. MATRAN (1980). Una generalización de la esperanza condicionada (Proyecciones de variables aleatorias en espacios L^p)

[8] J. NEVEU (1970). Bases mathematiques du calcul des probabilites. Masson

[9] I. SINGER (1970). Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. Springer Verlag