

ALGUNAS CUESTIONES SOBRE FUNCIONES DE PERDIDA GENERALIZADAS Y SU APLICACION A LA ESTIMACION DE PARAMETROS

María Pilar Lasala Calleja

Dpto. de Estadística Matemática e Investigación Operativa
 Universidad de Zaragoza

SUMMARY

In this paper, a loss function called g -divergence is defined, like a generalitaton of Kullback's divergence, which depends on a continuous and convexe function g . Its properties are also studied and its relations with the Fisher Information.

I.- g -DIVERGENCIA;PRIMERAS PROPIEDADES

Sea (E, Ω) un espacio medible y F_1, F_2 dos medidas de probabilidad definidas sobre Ω , absolutamente continuas respecto a una medida μ positiva y σ -finita sobre Ω . Además $F_1 \equiv F_2$. Sean f_1 y f_2 las derivadas de Radom-Nikodym de F_1 y F_2 respecto a μ . Sea C el conjunto de todas las funciones de R en R continuas y convexas. Sea $A_1 = \{f_1(x) > 0\}$.

DEFINICION.1.- Se define g -divergencia de F_1 respecto de F_2 como

$$I_g = \int_{A_2} g\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) f_2(x) d\mu(x)$$

Es fácil probar que I_g es independiente de la elección de ν .

PROPOSICION.1.- Si $A_1 = A_2$, se verifica: $I_g \geq g(1)$. Además, $I_g = g(1)$ si y sólo si $F_1 = F_2$.

Sin pérdida de generalidad podemos reducir el conjunto C con la restricción $g(1)=0$, con lo que I_g tiene una primera propiedad de las medidas, ya que se pretende utilizar I_g como una medida de la "diferencia" entre F_1 y F_2 .

Si se toma $g(x)=x \log x$, I_g es precisamente la divergencia funcional de Kullback.

II.-CANTIDAD DE INFORMACION DE FISHER Y SU RELACION CON LA g -DIVERGENCIA

Consideremos una familia de funciones de densidad respecto a ν , dependientes de un parámetro: $\Gamma=\{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$. Sea Θ un intervalo finito o no de R . Consideremos $I_g(\theta+\Delta \theta, \theta)$ la g -divergencia de $f(x, \theta+\Delta \theta)$ respecto a $f(x, \theta)$.

DEFINICION.2.- Se define la información de Fisher generalizada como el límite, si existe:

$$I_g(\theta) = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{I_g(\theta + \Delta \theta, \theta)}{(\Delta \theta)^2}$$

TEOREMA.1.- Bajo las condiciones de regularidad de Wolfowitz, y si g es tres veces diferenciable en un entorno de 1, se tiene:

$$I_g(\theta) = \frac{g''(1)}{2} I_F(\theta)$$

donde $I_F(\theta)$ es la información de Fisher para la función de densidad $f(x, \theta)$.

Consideremos una variable aleatoria η con valores en E y función de densidad respecto a μ $f(x, \theta)$. Sea $T = \psi(x_1, \dots, x_n)$ una aplicación medible de E^n en R , cuya función de densidad al considerarla como variable aleatoria es $h(t, \theta)$. Los valores $I_g^n(\theta)$ y $I_g^T(\theta)$ serán los valores de $I_g(\theta)$ para las densidades de η y T .

TEOREMA.2.- a) $nI_g^n(\theta) \geq I_g^T(\theta)$

b) $nI_g^n(\theta) = I_g^T(\theta)$ si y sólo si T es suficiente para θ .

III.- LA g -DIVERGENCIA COMO FUNCION DE PERDIDA

Sea $A = \{f(x, \theta) > 0\}$

DEFINICION.3.- Definimos la función de pérdida entre θ y $\hat{\theta}$ como

$$L_g(\theta, \hat{\theta}) = \int_A g\left(\frac{f(x, \theta)}{f(x, \hat{\theta})}\right) f(x, \hat{\theta}) d\mu(x)$$

Por los resultados anteriores se tiene:

$$L_g(\theta, \hat{\theta}) \geq 0 \quad \forall (\theta, \hat{\theta}) \in \Theta \times R$$

$$L_g(\theta, \hat{\theta}) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \hat{\theta} = \theta$$

IV.- CASO DE PARAMETRO K-DIMENSIONAL

La definición dada en II para la información de Fisher generalizada, sólo es válida para el caso de parámetro unidimensional. En el caso de parámetro k -dimensional, se podría generalizar la definición de la siguiente manera:

DEFINICION.4.- Se define la información de Fisher generalizada como el límite si existe:

$$I_g(\theta) = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{I_g(\theta + \Delta \theta, \theta)}{|\Delta \theta|^2}$$

TEOREMA.3.- En las hipótesis de Teorema 1, se tiene:

$$I_g(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{(\Delta\theta)' M \Delta\theta}{|\Delta\theta|^2}$$

donde $(\Delta\theta)'$ indica el transpuesto de $\Delta\theta$ y M es la matriz de información de Fisher.