Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE TRES EQUACIONS FUNCIONALS EN SEMIGRUPS $\tau_{T,L}$ DE FUNCIONS DE DISTRIBUCIÓ

Claudi Alsina

Dpt. Matemàtiques, E.T.S.A.V.
Universitat Politècnica de Barcelona

ABSTRACT: In this paper we solve some functional equations which characterize the semigroup $\tau_{Min,L}$ of probability distribution functions. Each functional equations is solved with a different method.

---

1. Introducció.

En aquest article resolem basicament tres equacions funcionals que caracteritzen el semigrup $\tau_{Min,L}$ de funcions de distribució ([1]). La primera equació és una equació en un domini restringit i el seu mètode de resolució generalitza a l'introduit en [2]. La segona equació resolt la distributivitat en el context dels semigrups $\tau_{T,L}$ i la tercera equació generalitza el teorema donat en [5], tot establint que si $T \neq Min$ els semigrups $\tau_{T,L}$ no deriven d'operacions entre variables aleatories. Pér definicions i conceptes previs vegi's [2,3,4,5]. Si $(a,b) \in [0,+\infty) \times [0,1]$ sigui G_a^b en D^+ donada per $G_a^b(t)=b$ si $0<t \leq a$ i $G_a^b(t)=1$ si $a<t$.

El conjunt $\mathcal{L}$ serà el conjunt de totes les operacions binàries L en $[0,\infty]$ contínues en $[0,\infty)^2$, associatives, commutatives, estrictament creixentes en $[0,\infty)^2$ i tals que en $L(0,0)=0$.

Sigui $\mathcal{L}_o = \{L \in \mathcal{L} \mid L(0,x)=x$, per tot $x \geq 0\}$ i $\mathcal{L}_1 = \{M \in \mathcal{L} \mid M(1,x)= =x$, $M(0,x)=0$, per tot $x \geq 0\}$. Qualsevol operació $L \in \mathcal{L}_o \cup \mathcal{L}_1$ admet la representació $L(x,y)=\ell^{-1}(\ell(x)+\ell(y))$, on el generador additiu $\ell:[0,\infty)\to[0,\infty)$ és contínuü i estrictament creixent. Si T es t-norma i $L\in\mathcal{L}_o\cup\mathcal{L}_1$, $F,G\in D^+$ es defineix per $x>0$,

$$\tau_{T,L}(F,G)(x)=\sup\{T(F(u),G(v));\ L(u,v)=x\}.$$

2. Una caracterització de $\tau_{Min,L}$ en un domini restringit $\{F\}$.

TEOREMA 2.1. Sigui $L\in\mathcal{L}_o$ i $F\in D^+$ estrictament creixent en $F^{-1}((0,1))$. Aleshores $\tau_{T,L}(F,F)=Foj_L^{-1}$, (EF1), sí i només si T=Mín en RanFxRanF$(j_L(x)=L(x,x))$.

Demostració. Sigui $x\in F^{-1}((0,1))$ i $\varepsilon\in(0,x-\inf F^{-1}((0,1)))$. Essent $j_L^{-1}(x)\geqslant x$,

$$0<F(j_L^{-1}(x-\varepsilon/2))-F(j_L^{-1}(x-\varepsilon))=A(x,\varepsilon),$$

$$0<F(j_L^{-1}(x-\varepsilon/2))-F(\ell^{-1}\{\ell(x-\varepsilon/2)-(\ell(x)|2)\})=B(x,\varepsilon).$$

Agafant $\delta\in(0,\text{Mín}(A(x,\varepsilon),B(x,\varepsilon)))$ i aplicant (EF1) en $x-\varepsilon/2$, per δ existiran $u_o,v_o>0$ tals que $L(u_o,v_o)=x-\varepsilon/2$ i tindrem

$$F(j_L^{-1}(x-\varepsilon/2))-T(F(u_o),F(v_o))<\delta,$$

$$(*)\quad F(j_L^{-1}(x-\varepsilon))<F(j_L^{-1}(x-\varepsilon/2))-\delta<T(F(u_o),F(v_o)).$$

Aleshores $u_o,v_o\leqslant j_L^{-1}(x)$. Si fos $u_o>j_L^{-1}(x)$ resultaría

$$x-\varepsilon/2=L(u_o,v_o)>L(j_L^{-1}(x),v_o)=\ell^{-1}(\ell(v_o)+\ell(x)/2),$$

$$v_o<\ell^{-1}(\ell(x-\varepsilon/2)-\ell(x)/2)\leqslant j_L^{-1}(x)<u_o,$$

d'on per (*)

$$F(j_L^{-1}(x-\varepsilon/2))-\delta<T(F(u_o),F(v_o))\leqslant F(v_o)\leqslant F(\ell^{-1}(\ell(x-\varepsilon/2)-\ell(x)/2)),$$

és a dir $B(x,\varepsilon)<\delta$, absurd. Així $u_o\leqslant j_L^{-1}(x)$ i analogament $v_o\leqslant j_L^{-1}(x)$. Per tant (*) mena a

$$F(j_L^{-1}(x-\varepsilon))<T(F(u_o),F(v_o))\leqslant T(F(j_L^{-1}(x)),F(j_L^{-1}(x)))\leqslant F(j_L^{-1}(x)),$$

d'on per l'arbitrarietat d'ε i la continuitat per l'esquerra de F, essent RanF=Ran(Foj_L^{-1}) podem concloure T=Min en RanFxRanF.

COROL.LARI 2.1. Si $F\in D^+$ és continua i estrictament creixent en $F^{-1}((0,1))$, aleshores $\tau_{T,L}(F,F)=Foj_L^{-1}$ si i només si T=Min.

3. Distributivitat entre semigrups $\tau_{T,L}$.

En aquest apartat resoldrem l'equació de la distributivitat:

$$\tau_{T,M}(F,\tau_{T',L}(G,H)) = \tau_{T',L}(\tau_{T,M}(F,G),\tau_{T,M}(F,H)), \qquad \text{(EF 2)}$$

on $F,G,H\in D^{+}$ són funcions de distribució arbitràries i les incognites són $T,T'\in \mathcal{T}$, $L\in\mathcal{L}_o$ i $M\in\mathcal{L}_1$.

LEMMA 3.1. Sigui $T\in\mathcal{T}$, $a,b\in[0,\infty)$ i $c,d\in[0,1]$. Aleshores

(i) Si $L\in\mathcal{L}$ és $\tau_{T,L}(\varepsilon_a,\varepsilon_b)=\varepsilon_{L(a,b)}$ i $\tau_{T,L}(\lambda_c,\lambda_d)=\lambda_{T(c,d)}$;

(ii) Si $L\in\mathcal{L}_o$ és $\tau_{T,L}(G_c^1,G_d^1) = \mathrm{Min}(G^1_{T(c,d)}, G^{L(1,1)}_{\mathrm{Max}(c,d)})$;

(iii) Si $M\in\mathcal{L}_1$ és $\tau_{T,M}(G_c^1,G_c^1)=G_c^1$.

TEOREMA 3.1. Siguin $T,T'\in\mathcal{T}$, $L\in\mathcal{L}_o$ i $M\in\mathcal{L}_1$. Aleshores $\tau_{T,M}$ és distributiva respecte $\tau_{T',L}$, (EF 2), si i només si $T' = \mathrm{Min}$ i M és distributiva respecte a L.

Demostració. Consideri's $a,b,c\in[0,\infty)$. Pel lemma 3.1 (i) i (EF 2) fent $F=\varepsilon_a$, $G=\varepsilon_b$ i $H=\varepsilon_c$ resulta $\varepsilon_{M(a,L(b,c))}=\varepsilon_{L(M(a,b),M(a,c))}$, d'on M distribueix a L. Agafant $c\in(0,1)$ i aplicant (EF 2) amb $F=G=H=G_c^1$, resulta pel lemma 3.1 (ii) i (iii) que

$$T'(c,c)=G^1_{T'(c,c)}(1)=\sup_{M(u,v)=1} T(G_c^1(u),\mathrm{Min}(G^1_{T'(c,c)}(v),G_c^{L(1,1)}(v)))$$

$$=T(c,1) = c,$$

donat que el darrer suprem s'atrapa en el punt $(1-t_o,L(1,1)+t_o)$, essent $t_o\in(0,1)$, doncs la funció $h(t)=M(1-t,L(1,1)+t)$ satisfà $h(0)=L(1,1)>1>h(1)=0$ i per tant admet el punt $t_o\in(0,1)$ on $h(t_o) = M(1,1)=1$. Per tant, si $T'(c,c)=c$ podem deduir $T'=\mathrm{Min}$.

4. $\tau_{-\mathrm{Min},L}$ i operacions entre variables aleatòries.

L'operació $\tau_{T,L}$ es diu derivable d'una operació entre variables aleatòries (v.a) si existeix una funció real de dues variables g que sigui mesurable Borel, de forma que $\tau_{T,L}(F_X,F_Y) = F_{g(X,Y)}$, per qualsevol parella F_X,F_Y.

En [5] es va demostrar que l'única operació de la classe $\tau_{T,\mathrm{Sum}}$ que és derivable en el sentit precedent és $\tau_{\mathrm{Min},\mathrm{Sum}}$. En aquest apartat demostrarem que la mateixa situació es presenta en la classe d'operacions $\tau_{T,L}$, és a dir, l'única solució de l'equació funcional $\sigma_{C,L} = \tau_{T,L}$ és C=T=Min, on $\sigma_{C,L}$ representa la sigma-operació definida en [3].

LEMMA 4.1. Sigui $L\in\mathcal{L}_o$ i $M\in\mathcal{L}_1$. Si C és còpula i $a,b\in(0,1)$,

(i) $\sigma_{C,L}(G_a^1, G_b^1)=\mathrm{Min}(G^1_{C(a,b)}, G^{L(1,1)}_{a+b-C(a,b)})$;

(ii) $\sigma_{C,M}(G_a^1, G_b^1)=G^1_{a+b-C(a,b)}$.

TEOREMA 4.2. Tant si $L\in\mathcal{L}_o\cup\mathcal{L}_1$, l'operació $\tau_{T,L}$ és derivable d'una operació entre v.a., si i només si T = Min.

REFERENCIES

[1] ALSINA, C., "Idempotent elements of $\tau_{T,L}$-semigroups". Abstracts AMS meeting 769 at New York City.

[2] ALSINA, C., "Some functional equations in the space of uniform distribution functions". Acceptat per a publicació en Aequationes Mathematicae (Canada).

[3] MOYNIHAN, R., SCHWEIZER, B. i SKLAR, A., "Inequalities among operations on probability distribution functions, en General Inequalities I", ed. E.F. Beckenbach, Birkhauser Verlag Basel, 133-149 (1978).

[4] SCHWEIZER, B., "Multiplications on the space of probability distribution functions. Aequat. Math. 12, 156-183 (1975).

[5] SCHWEIZER, B., i SKLAR, A., "Operations on distribution functions not derivable from operations on random variables", Studia Math. T.L. II, 43-52 (1974).