Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

SUMABILIDAD EN SUCESIONES TRANSFORMADAS DE UNA DADA POR OPERADORES UNITARIOS

Alvaro Angel Rodés Usán

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Zaragoza

Abstract

Let $\mathcal{H}$ be a real, separable, Hilbert space and let $\mathcal{B}$ be the set of bounded linear operators on $\mathcal{H}$. Let S be a fixed sequence of elements of $\mathcal{H}$. Let G_S (resp. G_S') be the subset of $\mathcal{B}$ which gives summability on U(S), for some (resp. all) unitarian operator. In this paper, the coincidence of G_S with the set of operators whose range has dimension $\leq p$, is characterized. It is shown that $G_S' = \{0\}$ iff S is not summable; otherwise $G_S' = \mathcal{B}$.

Sea $\mathcal{H}$ el espacio de Hilbert separable real, $\mathcal{B}$ el álgebra de operadores lineales acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{U}$ el grupo de operadores unitarios.

Dada $S = \{a_n \; ; \; n \in N\}$ una sucesión completa en $\mathcal{H}$, se definen los conjuntos D_S y M_S como

$$D_S = \{A \in \mathcal{B} \; ; \; AS \text{ sumable}\},$$
$$M_S = \{x \in \mathcal{H} \; ; \; \sum_1^\infty |(a_n,x)| < \infty\}. \qquad [1] *$$

Indicaremos por $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia unitaria en $\mathcal{B}$,

$$A \,\mathcal{R}\, B \iff \exists\, U \in \mathcal{U} \; ; \; B = U^* A U ,$$

y denotaremos por [ ] las clases de equivalencia de la relación $\mathcal{R}$.

1.- El Conjunto de operadores G_S

Definición 1.- Definimos el conjunto de operadores de $\mathcal{B}$, G_S, como

$$A \in G_S \iff [A] \cap D_S \neq \emptyset .$$

Proposición 1.- $A \in G_S \iff A$ da sumabilidad en alguna sucesión igual a S. (Transformada por algún operador unitario)

Proposición 2.- El conjunto G_S cumple :

a) $G_S = \text{Sat. } D_S$ (Saturado en $\mathcal{R}$),

b) $G_S = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} D_{US}$,

c) $A_S \subset G_S$. [3]

El conjunto G_S no es en general ideal a la izquierda de $\mathcal{B}$, pero en algún caso puede ser incluso bilátero, como en los siguientes:

$$S \text{ sumable} \iff G_S = \mathcal{B} ,$$

$$S \text{ base ortonormal} \iff G_S = \mathfrak{S}_2 . \qquad [1]$$

Pasemos a estudiar la influencia de la dimensión del subespacio de $\mathcal{H}$, M_S,dominio de sumabilidad débil, sobre el conjunto G_S.

Teorema 1.- Se verifica

$$\dim M_S = p \iff G_S = \mathfrak{S}^{(p)}.$$

(Con $\mathfrak{S}^{(p)}$ nos referiremos a los operadores de $\mathcal{B}$ de rango $\leq p$).

Para la demostración de este teorema se parte del resultado

$$\dim M_S = p \iff A_S = \mathfrak{S}^{(p)} , \qquad [3]$$

comprobándose después la imposibilidad de encontrar operadores de rango infinito en G_S. Por ello coincide para estos operadores la sumabilidad y la sumabilidad absoluta sobre sucesiones, obteniéndose de ello el resultado del teorema. [4]

Teorema 2.-Se cumple

$$\dim M_S = \infty \iff \mathfrak{S}_o \subset G_S \text{ (estrictamente).}$$

2.- El Conjunto de operadores G_S^*.

Definición 2.- Definimos G_S^* como

$$A \in G_S^* \iff [A] \subset D_S .$$

Proposición 2.- El conjunto G_S^* satisface las siguientes condiciones;

a) Es el conjunto de operadores de $\mathcal{B}$ que dan sumabilidad en todas las sucesiones iguales a S,

b) Es el máximo conjunto $\mathcal{R}$-saturado contenido en D_S,

c) $G'_S = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} D_{US}$,

d) $A'_S \subset G'_S$,

e) G'_S es un ideal a la izquierda de $\mathcal{B}$. [4]

Proposición 3.- El conjunto D_S nunca es un ideal bilátero propio de $\mathcal{B}$.

Para demostrarlo tener en cuenta que si D_S fuera bilátero, debería contener a todos los operadores de rango finito, lo que haría que S fuera sumable y por tanto $D_S = \mathcal{B}$. [5]

Pasemos ahora a demostrar que G'_S siempre es el conjunto total $\mathcal{B}$ ó el conjunto formado únicamente por el operador nulo.

Lema 1.- Si existe un proyector sobre un rayo, $P_{w(x)}$, no contenido en D_S , el conjunto G'_S no contiene ningún proyector unidimensional.

Teorema 3.-Las siguientes condiciones son equivalentes :

a) S es no sumable,

b) $G'_S = \{0\}$.

Para la demostración, aplicar el lema anterior y tener en cuenta el resultado de [2] que afirma que $\{0\}$ es el único ideal a la izquierda de $\mathcal{B}$ que no contiene proyectores unidimensionales.

Corolario 3.1.- Si S es no sumable, no hay ningún operador lineal acotado, aparte del nulo, que dé sumabilidad en todas las sucesiones iguales a S.

Este corolario generaliza un resultado de [1] que aseguraba que el operador nulo era el único que daba sumabilidad en todas las bases ortonormales.

Corolario 3.2.- G'_S es siempre ideal bilátero trivial, pues

a) S no sumable $\Longleftrightarrow$ $G'_S = \{0\}$,

b) S sumable $\Longleftrightarrow$ $G'_S = \mathcal{B}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] MARTIN, E. "La sumabilidad absoluta en los operadores lineales acotados del espacio de Hilbert". Tesis Doctoral. Zaragoza (1977).

[2] NAIMARK, M.A. "Normed rings". Wolters Noordhoff publishing Groningen (1970) The Netherlands.

[3] RODES, A. "Sumabilidad absoluta en sucesiones unitariamente equivalentes". VI Jornadas de Matemáticas Hispano - Lusas Santander (1979).

[4] RODES, A. "Ideales de operadores lineales acotados y sumabilidad en el espacio de Hilbert". Tesis Doctoral. Zaragoza.(1980).

[5] CALKIN, J.W. "Two sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space" Ann. of Math. (2), 42, 839-873 (1941).