Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

EXPRESIONES DE p-RECURRENCIA

Enrique Atencia de Burgos, Francisco Marcellán Español

Facultad de Ciencias. Universidad de Malaga
E.T.S.I.I. Universidad de Zaragoza

Abstract: In this paper, a generalization of the recurrence relations for orthogonal polynomials on lemniscates is given. Several recurrence formulas deduced of the descomposition: $T_{n,p} \oplus K[A^p P_{n-hp}(z)] = T_{n-1,p} \oplus K[P_n(z)]$ where $T_{n,p}$ is the orthogonal suplementary subspace from the subspace $A^p\Pi_{n-hp}$ in Π_n are obtained. Finally, two open problems in relation with the theory of the n-kernels and the development in Fourier-Jacobi series for rational functions, respectively, are posed.

En la teoría de polinomios ortogonales sobre lemniscatas (véase [3]) hemos proporcionado una interpretación de tipo geométrico para la relación de recurrencia que satisfacen dichos polinomios basada en la consideración del complemento ortogonal del subespacio $A\Pi_{n-h}$ respecto a Π_n, donde Π_n es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n y $|A(z)| = R$ es la ecuación de la lemniscata considerada, donde $A(z)$ es un polinomio de grado h con raíces simples y coeficiente conductor unidad.

Reiterando la descomposición $\Pi_n = A\Pi_{n-h} \oplus (A\Pi_{n-h})^{\perp n}$ resulta:

$$\Pi_n = A^p\Pi_{n-hp} \oplus (A\Pi_{n-h})^{\perp n} \oplus A(A\Pi_{n-2h})^{\perp n-h} \oplus \ldots \oplus A^{p-1}(A\Pi_{n-ph})^{\perp n-(p-1)h} \qquad (1)$$

donde, a efectos de notación designaremos mediante $T_{n,p}$ la suma de los p últimos subespacios.

De (1) se sigue que $\Pi_n = A^p\Pi_{n-hp-1} \oplus K[A^p\, P_{n-hp}(z)] \oplus T_{n,p}$ (2)

donde $P_{n-hp}(z)$ es el polinomio ortogonal mónico de grado n-hp relativo a una distribución definida sobre la curva.

Por otra parte, si en la descomposición $\Pi_n = \Pi_{n-1} \oplus$ $\oplus K[P_n(z)]$ aplicamos (1) al primer sumando, resulta

$$\Pi_n = A^p \Pi_{n-hp-1} \oplus K[P_n(z)] \oplus T_{n-1,p} \qquad (3)$$

De (2) y (3), considerando el complemento ortogonal de $A^p \Pi_{n-hp-1}$ respecto a Π_n, se sigue

$$K[A^p \; P_{n-hp}(z)] \oplus T_{n,p} = K[P_n(z)] \oplus T_{n-1,p} \qquad (4)$$

La existencia de una base natural de $(A\Pi_{n-h})^{\perp n}$ ha sido probada en [3]. Dicha base está formada por los h n-núcleos $K_n(z,\alpha_i)$ asociados a las raíces α_i i=1,..h de A(z). Asimismo se ha obtenido otra base de dicho complemento ortogonal, que designamos $\phi_n^{(i}(z)$ i=1,..h caracterizada por la condición geométrica siguiente: $K_n(z,\alpha_i) \circ \phi_j^{(n}(z) = \delta_{i,j}$. Una interpretación de esta base en términos de la teoría de interpolación aparece en [3].

Con estos aspectos previos, planteamos varias cuestiones abiertas de las que en el presente trabajo damos solución a la primera de ellas:

a) De la descomposición (4), obtener expresiones de recurrencia entre elementos de cada uno de los sumandos. Aparece una generalización de las expresiones de recurrencia obtenidas en [2] y [3] que denominaremos fórmulas de p-recurrencia.

b) De la descomposición (1), estudiar fórmulas análogas de p-sumación que generalicen las obtenidas en [2] y [3] y analizar consecuencias relativas a la distribución de los ceros de los polinomios ortogonales.

c) De acuerdo con la descomposición (1), estudiar el desarrollo en serie de Fourier-Jacobi para funciones racionales del tipo $\frac{P(z)}{(A(z))^k}$ donde grad $P(z) < h$. Esta cuestión presenta un gran interés desde un punto de vista teórico funcional dada su estrecha relación con los desarrollos en serie de Laurent-Jacobi (vease [5]). Algunos aspectos de este problema han sido estudiados en [1] para polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad.

Así pues, en los términos planteados en a), nuestro problema se centra en el estudio de los siguientes desarrollos:

i) $A(z)^p \; P_{n-hp}(z) = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^{h} B_{j,i} A(z)^j K_{n-hj-1}(z,\alpha_i) + B_n P_n(z)$

La determinación de los coeficientes se efectúa considerando productos escalares y aplicando el hecho de que los p+1 sumandos son ortogonales, de forma que

$$A(z)^p P_{n-hp}(z)=\sum_{j=0}^{p-1} A(z)^j \left(\sum_{q=1}^{h} P_{n-hj}(\alpha_q)\, \phi^{(q}_{n-hj-1}(z)\right)+P_n(z)$$

En el caso p=1, por normalización de los polinomios ortogonales, se obtiene la expresión R-II de [3]. En el caso A(z)=z aparece la expresión I-14 de [2].

De forma análoga resulta:

ii)
$$A(z)^l K_{n-hl}(z,\alpha_r)=A(z)^l K_{n-hl-1}(z,\alpha_r)+\overline{P_{n-hl}(\alpha_r)}\,\frac{P_n(z)}{\sqrt{e_{n-hl}}}+$$
$$+\overline{P_{n-hl}(\alpha_r)}\left[\sum_{j<l} A(z)^j \sum_{k=1}^{h} P_{n-hj}(\alpha_k)\phi^{(k}_{n-hj-1}(z)\right] \quad 0\leq l\leq p-1,\ 1\leq r\leq h$$

Efectuando cálculos sencillos se prueba que i ii.

iii)
$$\frac{1}{e_n} P_n(z)=\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{e_{n-hj}R^{2j}} A(z)^j \sum_{q=1}^{h} P_{n-hj}(\alpha_q)\phi^{(q}_{n-hj}(z) +$$
$$+\frac{1}{e_{n-hp}R^{2p}} A(z)^p P_{n-hp}(z)$$

De nuevo, como casos especialmente interesantes, obtenemos para p=1 y por normalización de los polinomios ortogonales, la expresión R-I de [3]. En el caso A(z)=z aparece la relación I-15 de [2]. Hemos de señalar el caracter independiente de esta expresión respecto a i)

iv)
$$A(z)^l K_{n-hl-1}(z,\alpha_r)=\sum_{k=1}^{h} K_{n-hl-1}(\alpha_k,\alpha_r)A(z)^l\phi^{(k}_{n-hl}(z) -$$
$$-\overline{P_{n-hl}(\alpha_r)}\left[\frac{R^{2l}}{R^{2p}e_{n-hp}} A(z)^p P_{n-hp}(z)+\sum_{j\geq l}^{p-1} \frac{R^{2l}}{R^{2j}e_{n-hj}} A(z)^j \sum_{k=1}^{h} P_{n-hj}(\alpha_k)\phi^{(k}_{n-hj}(z)\right]$$

donde $0\leq l\leq p-1$ $1\leq r\leq h$.

Efectuando un desarrollo para el primer sumando, resulta una nueva expresión de recurrencia que es equivalente a iii)

$$\frac{A(z)^l P_{n-hl}(z)}{R^{2l}e_{n-hl}}=\frac{A(z)^p P_{n-hp}(z)}{R^{2p}e_{n-hp}}+\sum_{j\geq l}\frac{A(z)^j}{R^{2j}e_{n-hj}}\left(\sum_{k=1}^{h} P_{n-hj}(\alpha_k)\phi^{(k}_{n-hj}(z)\right)$$

donde $0\leq l\leq p-1$ $1\leq r\leq h$.

De la consideración de i)-..-iv) surgen 2(hp+1) expresiones de p-recurrencia que en esencia se reducen a dos modelos.

Como aplicación interesante, de i) se sigue que $\|P_n(z)-A(z)^p P_{n-hp}(z)\|^2 = R^{2p} e_{n-hp} - e_n$. Teniendo presente que las h sucesiones e_{kh+i}/R^{2k} donde $0 \leq i \leq h-1$ son convergentes (véase [3]) podemos enunciar el siguiente resultado

Proposición.-La sucesión de polinomios $Q_{n-1}(z)=P_n(z)-A(z)P_{n-hp}(z)$ converge a la función cero a.e. sobre la lemniscata si y sólo si las h sucesiones $a_k = \frac{e_{i+hk}}{R^{2k}}$ donde $0 \leq i \leq p-1$ satisfacen la condición $(-\Delta)a_k = o(\frac{1}{R^{2k}})$.

Observamos que la condición de convergencia a cero viene determinada por la configuración geométrica de la curva.

Si R es suficientemente grande, es un hecho conocido (vease [5]) que el recinto interior a la lemniscata es simplemente conexo, en cuyo caso y de acuerdo con un resultado que figura en [4], las raices de los polinomios se encuentran en el interior de la envoltura convexa del recinto, por lo que parece razonable enunciar la siguiente conjetura:

$$\lim \frac{P_n(z)}{P_{n-h}(z)} = A(z) \text{ si y solo si } e_{i+hk} = o(\frac{1}{R^{2k}}).$$

Este resultado es la generalización de uno clásico para la circunferencia unidad, que caso de verificarse para lemniscatas extendería la información sobre propiedades de convergencia.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALFARO M.:"Desarrollo en serie de Fourier-Toeplitz de $\frac{1}{z^h}$" Revista de la Academia de Ciencias (1-2) 32 pag 11-23. Zaragoza. 1977

[2] ALFARO M.P.:"Polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad. Estudio del caso C" Tesis Doctoral. Publicaciones Departamento de Teoría de Funciones. Zaragoza. 1978.

[3] MARCELLAN F.:"Polinomios ortogonales sobre cassinianas". Publicaciones Departamento de Teoría de Funciones. Zaragoza. 1976.

[4] SZEGO G.:"Orthogonal Polynomials" A.M.S. Colloquium Publications. Proviedence. Rhode Island. 1939.

[5] WALSH J.:"Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain". A.M.S. Colloquium Publications. Providence. Rhode Island. 1960.