Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

CLASES DE CHERN DE VARIEDADES PROYECTIVAS

Juan A. Navarro González

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Salamanca

ABSTRACT. Let X be a smooth scheme, projective over a base field, and let F, E be locally free $\mathcal{O}_X$-modules of finite rank. It is shown the relation between the graphic of any morphism $F \longrightarrow E$ and the Chern class $c_{n-r+1}(E-F)$, $(n = \operatorname{rank} E,\ r = \operatorname{rank} F)$; and, when the morphism is quite good $c_{n-r+1}(E-F)$ is computed in terms of linear data on X. As a consequence, a method is given to calculate the Chern classes of X. Finally, it is applied to the Zeuthen-Segre invariant and to Pfaff systems.

Sea X un esquema liso y proyectivo sobre un cuerpo base, y F, E dos haces localmente libres, de $\mathcal{O}_X$-módulos, de rangos r y n respectivamente. Todo morfismo $f : F \longrightarrow E$ define, de modo natural, una gráfica proyectiva en $\mathbb{P}(F \oplus E)$; la clase de cohomología de dicha gráfica, en el graduado de la teoría K, se denota Γ_f.

Γ_f es un elemento de $GK(\mathbb{P}(F \oplus E))$ homogéneo de grado n; y se verifica, siendo $\pi : \mathbb{P}(F \oplus E) \longrightarrow X$ la proyección natural:

Teorema: en $GK(X) : \pi_*(\Gamma_f \cdot \Gamma_0) = c_{n-r+1}(E-F)$.

La demostración está basada en el teorema de periodicidad, que determina la estructura del graduado de la teoría K de un fibrado proyectivo, y en la consideración de la zona del infinito de $\mathbb{P}(F \oplus E)$.

Cuando f es inyectivo, $0 \longrightarrow F \xrightarrow{f} E \longrightarrow E/F \longrightarrow 0$, la clase de Chern $c_{n-r+1}(E/F)$ se puede calcular mediante haces coherentes, bajo ciertas condiciones (más débiles que imponer la transversalidad de f respecto del morfismo nulo):

Teorema: Si el haz $\underline{Ext}^1(E/F, \mathcal{O}_X)$ está concentrado en codimensión $n-r+1$, y es 1-generado en los puntos genéricos de su soporte, se verifica:

$$c_{n-r+1}(E/F) = \sum_{p} \ell(\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^1(E/F, \mathcal{O}_X)_p) \cdot p$$

la suma extendida a los puntos genéricos del soporte de $\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^1(E/F, \mathcal{O}_X)$.

Este teorema es consecuencia del anterior, porque, con las condiciones impuestas, la gráfica proyectiva de f y del morfismo nulo se cortan sin torres. En consecuencia $\Gamma_f \cdot \Gamma_0$ es fácil de calcular en teoría K .
La condición de que $\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^1(E/F, \mathcal{O}_X)$ sea 1-generado, en los puntos genéricos de su soporte, es necesaria para que el corte de las gráficas proyectivas mencionadas sea de igual dimensión que su proyección por π ; y, en consecuencia, poder calcular con facilidad $\pi_*(\Gamma_f \cdot \Gamma_0)$.

La aplicación más importante de este método es el cálculo de las clases de Chern de cualquier variedad proyectiva X :
Proyectando desde una cadena de subvariedades lineales del espacio ambiente, se obtienen aplicaciones racionales $X \longrightarrow \mathbb{P}_r$, $1 \leqslant r \leqslant \dim X = n$.
Si U_r es el abierto más grande en que está definida la proyección racional $X \longrightarrow \mathbb{P}_r$, se imponen las condiciones:

a) $U_r \longrightarrow \mathbb{P}_r$ es un morfismo denso y separable.

b) La ramificación de $U_r \longrightarrow \mathbb{P}_r$ tiene codimensión $n-r+1$; y la variedad lineal que se utiliza para proyectar sobre $\mathbb{P}_r$, no corta a la ramificación de $U_{r+1} \longrightarrow \mathbb{P}_{r+1}$.

c) $\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_{U_r/\mathbb{P}_r}, \mathcal{O}_{U_r})$ es 1-generado en los puntos genéricos de su soporte.

Con las condiciones impuestas, si δ_{n-r+1} es la clase de equivalencia racional del ciclo definido por $\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_{U_r/\mathbb{P}_r}, \mathcal{O}_{U_r})$, se verifica:

$$c_{n-r+1}(\Omega^1_X) = \delta_{n-r+1} - \sum_{i=1}^{n-r+1} \binom{r}{i}\left(\frac{H}{1-H}\right)^i c_{n-r+1-i}(\Omega^1_X)$$

siendo H una sección hiperplana de X .
En particular, si para cada número natural m , Z_m es un subesquema cerrado y liso de X , contenido en Z_{m-1} y cuya clase de equivalencia racional es H^m , se verifica:

$$c_{n-r+1}(X) = \left[\sum_{i=1}^{n-r+1} (-1)^{i+1} \binom{r}{i} c_{n-r+1-i}(Z_i)\right] + (-1)^{n-r+1}\delta_{n-r+1}$$

Estas fórmulas permiten computar las clases de Chern de X en función de los ciclos de ramificación de las proyecciones racionales $X \longrightarrow \mathbb{P}_r$, de la sección hiperplana H , y de sus intersecciones.

Definiciones: Si D es un divisor de X, se define $c_k(D)$ como el elemento de grado $k+1$ de $GK(X)$ definido por:

$$c_k(D) = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j\, c_j(X) \cdot D^{k+1-j}$$

cuando D es una hipersuperficie lisa de X, coinciden con las clases de Chern de D, consideradas en X.

Si ω es una 1-forma sobre X, su haz de línea asociado (ω) es:

$$(\omega)(U) = \{f \in \Sigma(U) : f \cdot \omega \in \Omega^1_X(U)\}$$

siendo Σ el haz de funciones racionales sobre X. El divisor asociado a (ω) se llama divisor de ω.

Si ω es una 1-forma sobre X con singularidades aisladas, y D es su divisor, se verifica:

$$c_n(X) = (-1)^n \Big(\sum_{p \in X} n_p \cdot p \Big) + c_{n-1}(-D)$$

siendo n_p la longitud de $\mathrm{Ext}^1((\Omega^1_X/(\omega))_p, \mathcal{O}_p)$ sobre $\mathcal{O}_p$.

Este número n_p, cuando ω es una diferencial exacta: $\omega = df$, coincide con el número de Milnor de f en p. En particular, para diferenciales exactas sobre superficies, se obtiene el clásico invariante de Zeuthen-Segre:

Si f es una función racional sobre la superficie X, cuyas fibras son reducidas, y tal que el divisor de polos es una curva γ de género g:

$$\mathrm{gr}\ c_2(X) = \sum_p n_p - 2\gamma^2 + 4g-4$$

Los números de Milnor n_p se pueden calcular fácilmente en este caso:

a) Si p es un punto singular de una curva de nivel de f, $n_p = \ell(\mathcal{O}_p/(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}))$, siendo x, y coordenadas locales en p.
Este número puede calcularse siempre mediante la teoría italiana de intersección de curvas planas, utilizando transformaciones cuadráticas ([1]).

b) Si p es un punto base de f, y $f = g/h$ siendo g, h funciones regulares en p sin ceros comunes, se verifica:

$$n_p = \ell\Big(\mathcal{O}_p/\Big(h\frac{\partial g}{\partial x} - g\frac{\partial h}{\partial x},\ h\frac{\partial g}{\partial y} - g\frac{\partial h}{\partial y}\Big)\Big)$$

y este número se puede calcular, a su vez, por transformaciones cuadráticas.

Volviendo al caso general $(\dim X = n)$, cuando se consideran 1-formas exactas, se obtiene:

Si f es una función racional, sus fibras son reducidas, las singularidades de df son aisladas, y su divisor de ceros D es simple y corta transversalmente al de polos, se verifica:

$$c_n(X) = (-1)^n\left(\sum_{p\in X} n_p \cdot p\right) + 2c_{n-1}(D) - c_{n-2}(D \cap D)$$

siendo n_p el número asociado a df .

Todas las demostraciones de los enunciados anteriores se obtienen al considerar la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow (\omega) \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1/(\omega) \longrightarrow 0$$

y determinar $c_n(\Omega_X^1/(\omega))$ mediante datos lineales sobre X , tal y como hemos mostrado que se puede hacer. $\bullet$

REFERENCIAS:

[1] F. Enriques - *Teoría geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Ed. Nicola Zanichelli. Bologna, 1918.

[2] J. Milnor - *Singular points of complex hipersurfaces*. Annals of Math. Studies, 61, Princeton University Press, 1968.

[3] R. Thom - *Les ensembles singuliers d'une application* ... Séminaire de Topologie de Strasbourg, Dec. 1957.

[4] I.R. Porteous - *Todd's canonical classes*. Proceedings of Liverpol singularities. L.N.M., n° 192, Springer-Verlag. Berlín.