Pub. Mat. UAB
N°20 Set. 1980
Actes VII JMHL

INTERSECCIONS DE GERMES DE GORENSTEIN I CODIMENSIÓ TRES

Francisco Guillén Santos, Pere Pascual Gainza

Dpt. de Matemàtiques, E.T.S.E.I.B.
Universitat Politècnica de Barcelona

ABSTRACT Here we study the deformations of germs that are proper intersection of Gorenstein germs of codimension 3, obtaining generalizations of the results proved by Mandelbaum and Schaps for perfect varieties and codimension two.

1. En aquest treball centrem el nostre interés en el problema de l'allisabilitat d'un germe d'espai analític i en determinar la seva deformació semiuniversal. Es conegut que: els germes de hipersuperfície i les seves interseccions pròpies, i.e. interseccions completes, són allisables i la base de la seva deformació semiuniversal és llisa; el germes perfectes i en codimensió dos també tenen la base llisa i són allisables si la seva dimensió és més petita que quatre cf. (4), resultats que Mandelbaum i Schaps van extendre posteriorment a les interseccions pròpies d'aquests germes, cf. (3). En (1) es va provar que per germes de Gorenstein i codimensió tres la base de la deformació semiuniversal és llisa, i en (2)que aquests germes són allisables si la seva dimensió és més petita que set.

Tot seguit presentem els resultats corresponents per interseccions pròpies de germes de Gorenstein i codimensió tres.

2. Una deformació d'un germe X_o d'espai analític és un morfisme $f:X\to Y$ pla de germes d'espais analítics amb fibra analíticament equivalent a X_o.

Lema: Si $f:X\to Y$ és un morfisme pla d'espais analítics, existeix un obert dens U de Y tal que si X_y és la fibra de f en $y\in Y$ i Σ_y designa el seu lloc singular, la codimensió de Σ_y en X_y és constant per tot $y\in U$.

Aquest lema ens permet parlar de la codimensió genèrica de Σ_y en X_y per un tal morfisme, codimensió que anomenarem grau de allisabilitat del morfisme. Es defineix aleshores el grau de allisabilitat $al(X_o)$ d'un germe X_o d'espai analític com el mínim dels graus d'allisabilitat de les deformacions analítiques de X_o.

Cal observar que amb aquesta definició X_o és allisable si, i només si, $al\,(X_o)>\dim X_o$.

Direm que la intersecció de dos germes d'espai analitic X_1, X_2 a $\mathbb{C}^n$ és pròpia si

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_n}(\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2) = 0$$

on $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ són les algebres locals corresponents a X_1, X_2. Amb aquestes condicions en (3) es demostra que

$$al(X_1\cap X_2) \geqslant \min(al(X_1),al(X_2)).$$

Llavors es despren d'un resultat d'en Kleppe cf. (2), el seguent

Teorema: Si X_1 i X_2 són dos germes d'espai analític a $\mathbb{C}^n$ de intersecció completa o Gorenstein i codimensió tres, i si $\dim X_1\cap X_2 \leqslant 6$ aleshores $X_1\cap X_2$ és allisable.

Aquest teorema s'exten de forma natural al cas d'una intersecció finita.

Exemple: En (1) varem veure que el con $G\subset\mathbb{C}^{10}$ sobre la grasmaniana $\mathbb{G}(1,4)\subset\mathbb{P}^9$ és un germe rígid de Gorenstein i codimensió tres. Prenent $g\in GL(10,\mathbb{C})$ genericament aleshores $G'=g(G)$ tallarà propiament a G, i $G\cap G'$ serà una singularitat de dimensió $\leqslant 6$ i per tant allisable.

3. Per la deformació semiuniversal d'un germe intersecció prò pia de germes de Gorenstein i codimensió tres, obtenim el

<u>Teorema</u>: Siguin X_1, X_2 germes d'espai analític a $\mathbb{C}^n$ de Gorenstein i codimensió tres que es tallen propiament. Si existeix la deformació semiuniversal de $X_1 \cap X_2$ aleshores és a base llisa.

Aquest resultat es pot extendre a una intersecció finita molt pròpia de germes del tipus intersecció completa, perfecte i codimensió dos o Gorenstein i codimensió tres.

BIBLIOGRAFIA

(1) F.Guillén - V.Navarro: Deformaciones de singularidades de Gorenstein y codimensión tres, Actas VI Jornadas Hisp.-Lus. Santander (1979), pendent de publicació.
(2) H.Kleppe: Deformation of schemes defined by vanishing of Pfaffians. J. of Alg. 53 (1978), 84-92.
(3) R.Mandelbaum - M.Schaps: On the smoothing and deformations of perfect varieties. Math. Ann. 226 (1977), 67-80.
(4) M.Schaps: Deformations of Cohen-Macaulay schemes of codimension 2 and non-singular deformations of space curves. Amer. J. Math. 99 (1977), 669-685.