PUBL.Mat.UAB
Nº 18 Abril 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y
Aplicaciones. Valldoreix, Mayo 1979

DIFUSION DE ARNOL'D

Carles Simó *

Abstract.- A description is made of the behaviour of hamiltonian systems near integrable ones. Besides invariant tori of the perturbed systems there is the posibility of slow escape if the system has more than two degrees of freedom. The classical example of Arnol'd [2] is presented. We remark the multiple special features that it presents. An analysis of the passage through ressonances [3] leads in a natural way to the estimates of Nekhorosev of the rate of escape [15]. The role of transition chains and heteroclinic points is stressed. The channels of superconductivity of Nekhorosev are related to previous work of the author [18]. Some open problems and the difficulties encountered in solving them end the paper.

§1. Introducción.- Los sistemas hamiltonianos juegan un papel fundamental en la descripción de la mecánica clásica. Consideremos una función real $H(x,y)$ (hamiltoniano) definida en el fibrado cotangente T^*C (espacio de las fases de posiciones y momentos) de una variedad diferenciable C (espacio de configuraciones). De manera más general podemos considerar $H(z)$ definida en una variedad simpléctica M (esto es, una v. diferenciable 2n-dimensional provista de una 2-forma cerrada, α, tal que sea no degenerada, esto es, $\overbrace{\alpha \wedge \cdots \wedge \alpha}^{n}$ sea un elemento de volumen). Dado v, vector tangente a M en z, le asociamos una forma v^b mediante $\alpha(v,w) = v^b(w)$ $\forall w \in T_zM$. Esta aplicación es un isomorfismo si α es no degenerada. Sea $\# : \eta \in T_z^*M \longrightarrow \eta^\# \in T_zM$ el isomorfismo inverso. Entonces las ecuaciones de Hamilton se escriben $\dot{z} = (DH)^\#$, siendo DH la diferencial de H. Si $M = R^{2n}$, $z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$, $q,p \in R^n$ y $\alpha = dq \wedge dp$, se obtiene

$$\dot{q} = D_pH \ , \quad \dot{p} = -D_qH \qquad (1)$$

* Facultat de Matemàtiques i Laboratori de Càlcul, Universitat de Barcelona.

ya que, identificando vectores con formas mediante la métrica euclídea, $\#$ viene dado por $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ donde I es la matriz identidad en R^n. Obviamente H es integral primera de (1) (teorema de Liouville [4]).

Un hamiltoniano H se dice *integrable* si existen n integrales primeras $F_1,\dots,F_n$, funcionalmente independientes, en involución (esto es, $\alpha((DF_i)^{\#}, (DF_j)^{\#}) = 0$). Entonces, si $N(C_1,\dots,C_n) = \{x\in M \mid F_i(x)=C_i, \text{cte}, i=1\div n\}$ es una variedad compacta (puede dejar de ser variedad para ciertos valores de C_i dando lugar a *separatrices*), es un toro n-dimensional T^n (teorema de Liouville-Arnol'd [5]). Si no es compacta es $T^d \times R^{n-d}$, $d < n$.

En variables (I, φ) adecuadas (variables de acción-ángulo, equivalentes a momentos y posiciones) un hamiltoniano integrable depende sólo de las variables de acción $H = H_o(I)$. Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{I} = 0 \;, \qquad \dot{\varphi} = (D_I\, H_o)^T = \omega(I) \text{ (vector de frecuencias)}$$

y por tanto $I = I^{(o)}$, $\varphi = \varphi^{(o)} + \omega t$. Las funciones $I_1,\dots,I_n$ son las integrales primeras independientes en involución. A cada valor de $I^{(o)}$ corresponde un T^n invariante. La parte del espacio de fases para la que $N(C_1,\dots, C_n)$ es compacta está foliada por toros n-dimensionales invariantes. Un toro asociado a $I^{(o)}$ se llama racional o *resonante* si $\exists\, k \in Z^n$ tal que $(k, \omega(I^{(o)})) = 0$ e irracional o *no resonante* en caso contrario. Por supuesto un toro puede tener diversas resonancias independientes. El flujo en un toro resonante es periódico y en uno no resonante es quasiperiódico y ergódico.

Consideremos una perturbación hamiltoniana de un sistema integrable

$$H = H_o(I) + \epsilon\, H_1(I, \varphi, \epsilon) \tag{2}$$

siendo H_1 una función 2π-periódica respecto a φ. Supondremos en toda la exposición que las funciones manejadas son analíticas aunque las técnicas de filtro pasa baja permiten trabajar con funciones suficientemente diferenciables (véase [13], [22], [17]).

Un resultado fundamental relativo a sistemas próximos a integrables es el obtenido por Kolmogorov, Arnol'd y Moser ([11], [1], [13]).

TEOREMA KAM.- *Dado el hamiltoniano (2) con* ϵ *suficientemente pequeña cumpliendo una de las dos condiciones:* a) $|D_I \omega_0| = |D_I^2 H_0| \neq 0$,

b) $\begin{vmatrix} D_I \omega_0 & \omega_0 \\ \omega_0^T & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ *con* $\omega_0 = (D_I H_0)^T$, *para todos los* ω *satisfaciendo la condición diofántica* $|(k,\omega)| > \dfrac{c(r,\epsilon)}{|k|^r}$ *(donde* $r \geqslant n+1$, $|k| = \sum_{i=1}^{n} |k_i|$ *), existe* $\tilde{T}_\omega$, *toro invariante de (2), cercano al toro invariante* T_ω *del sistema no perturbado, sobre el que el flujo es conjugado del que se tenía en* T_ω. *Dado un compacto foliado por toros de* H_0 *el conjunto de puntos de él no pertenecientes a algún* $\tilde{T}_\omega$ *tiene medida relativa que tiende a cero si* ϵ *lo hace.*

Es claro que la condición a) significa que el Hessiano de H_0 es no degenerado. Toda variación del punto I provoca una variación de la frecuencia ω. La condición b) signfica que el sistema H_0 es isoenergéticamente no degenerado, esto es, sobre la variedad $H_0 = h$ una variación del punto I provoca una variación de la relación de frecuencias. En efecto, para todo ΔI tal que $DH_0 \cdot \Delta I = 0$ debe cumplirse $D^2 H_0 \cdot \Delta I \neq \lambda \omega_0$, $\forall \lambda \in R$. Esto equivale a que el sistema $\begin{pmatrix} D^2 H_0 & \omega_0 \\ \omega_0^T & 0 \end{pmatrix}$ no tenga otra solución que la nula, es decir $\begin{vmatrix} D_I \omega_0 & \omega_0 \\ \omega_0^T & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

La demostración del teorema utiliza dos ideas fundamentales: En lugar de cambiar la frecuencia en las sucesivas aproximaciones a la solución como en la teoría clásica de perturbaciones, se busca un *toro invariante* manteniendo fijas las frecuencias que verifiquen las desigualdades diofánticas. Para ello se utiliza una sucesión de cambios de variable de convergencia rápida (análogos al método de Newton en Análisis Numérico) variando de toro a cada paso. Ello es posible por la condición de no degeneración impuesta. Los dominios en los que la sucesión de cambios es convergente se van estrechando y en el límite se reducen al propio toro invariante. Es decir, el cambio de variables global pasa del toro invariante de H_0 al de H con la misma ω *y sólo es válida en dicho toro.*

La teoría de KAM tiene consecuencias básicas sobre la estabilidad de sistemas hamiltonianos. Tomemos un problema con $n=2$ grados de libertad. La variedad H = cte. es 3-dimensional y en ella hay toros invariantes 2-

dimensionales encajados que, si bien no llenan todo el espacio de configuración, si que *separan* la variedad de energía constante en parte interior y exterior al toro. Los puntos inicialmente situados entre dos toros invariantes no pueden escapar del recinto que los tiene por frontera.

La situación es distinta si $n \geqslant 3$. Entonces en una variedad $(2n-1)$-dimensional los toros T^n *no separan* $H = cte.$ y para puntos que no estén en toros invariantes puede producirse un alejamiento de la variable I respecto al $I^{(o)}$ inicial. Este posible alejamiento es el que se conoce como *difusion de Arnol'd*.

Resultados paralelos se tienen en el caso de sustituir un sistema hamiltoniano por un difeomorfismo canónico y no entramos en detalles [4].

§2. Cadenas de transición.- Para explicar la manera de escapar de entre toros invariantes dados por la teoría KAM Arnol'd [2] propuso el mecanismo de las cadenas de transición.

Sea T un toro invariante por un flujo ϕ_t. Diremos que T es un *toro bigotudo* si existen dos variedades invariantes W^sT, W^uT (ó W^s, W^u si no hay peligro de confusión) tales que $\forall y \in W^s$ se tiene $\phi_t y \longrightarrow T$ cuando $t \longrightarrow +\infty$ (bigote de entrada), $\forall y \in W^u$ se tiene $\phi_t y \longrightarrow T$ cuando $t \longrightarrow -\infty$ (bigote de salida) y T es una componente de $W^u \cap W^s$. Es claro que W^uT, W^sT son las variedades invariantes inestable y estable de T (véase [21]).

Consideremos el ejemplo llamado *toro standard*. En $R^{d_s+d_u+d_c} \times S_1^{d_t}$ un punto descrito por las componentes (x,y,z,φ), $x \in R^{d_s}$, etc., se mueve sometido a las ecuaciones $\dot{x} = -\lambda x$, $\dot{y} = \mu y$, $\dot{z} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$, siendo $\lambda, \mu \in R_+$ y $\omega \in R^{d_t}$ racionalmente independiente (esto es $(k,\omega) = 0$, $k \in Z^{d_t} \Longrightarrow k = 0$). Entonces los puntos de la forma $\{x = 0;\ y = 0;\ z = 0\}$ constituyen un toro bigotudo con $W^s = \{y = 0;\ z = 0\}$ y $W^u = \{x = 0;\ z = 0\}$. Este toro se llama el toro standard.

Sea M una subvariedad diferenciable de una variedad X. Diremos que Ω *obstruye* a M en $x \in M$ si toda variedad transversal a M en x corta a Ω.

LEMA.- *En el toro standard sea* U *entorno de* $\xi \in W^s$ *y* $\Omega = \bigcup_{t>0} \phi_t U$. *Entonces* Ω *obstruye a* W^u *en todo punto de* W^u.

Si la afirmación del lema es cierta $\forall \xi \in W^s$, para todo entorno de ξ y $\forall y \in W^u$ diremos que T es un *toro de transición*. Este es el caso para el toro standard.

La demostración del lema usa de manera esencial la hipótesis de no resonancia. Si ω es resonante entonces Ω sólo obstruye delgadas bandas alrededor de subvariedades lineales de W^u cuya codimensión es la multiplicidad de la resonancia de ω.

Si existen toros de transición $T_1,\ldots,T_k$ tales que $W^u T_k \pitchfork_{x_k} W^s T_{k+1}$ (intersección transversal) diremos que esos toros forman una *cadena de transición*.

TEOREMA.- *Sean* $\xi \in W^s T_1$ *y* $\eta \in W^u T_k$ *arbitrarios. Entonces para todo* U *entorno de* ξ *y para todo* V *entorno de* η *el flujo* ϕ_t *conecta ambos entornos, esto es,* $\bigcup_{t>0} \phi_t U \cap V \neq \phi$.

La demostración es inmediata usando la definición de toro de transición y la continuidad respecto a las condiciones iniciales.

La existencia de cadenas de transición permite cierta inestabilidad al conectar entornos de toros alejados. Si $d_t = 0$ los toros invariantes se reducen a puntos. Si $d_t = 1$ se tienen órbitas periódicas. Tomando una sección de Poincaré conveniente una órbita periódica se traduce en un punto fijo o una órbita periódica. En este caso para tener una cadena de transición es suficiente tener una cadena de *puntos heteroclínicos transversales* (también llamados doblemente asintóticos [16]).

En el caso de difeomorfismos del plano la existencia de puntos heteroclínicos transversales pone fin a la existencia de curvas invariantes.

Un ejemplo numérico de tal cadena puede verse en [20]. El inicio de la existencia de puntos heteroclínicos transversales es una cuestión delicada y no resuelta. Una descripción heurística se halla en [7] bajo el nombre de *solape de resonancias*.

Destaquemos que la no existencia (global) de integrales primeras analíticas (además de las clásicas) que fue probada por Poincaré se debe esencialmente a la existencia de puntos heteroclínicos (y homoclínicos) transversales. En otro lenguaje esta no existencia es lo que Wintner [23] llamaba presencia de *integrales no aislantes*. En un lenguaje moderno diriamos que la citada transversalidad implica que las variedades invariantes W^uT, W^sT no son subvariedades de la variedad total. Se tiene un plegado de las mismas que provoca que cortes transversales adecuados de las variedades tengan *caracter cantoriano*.

§3. El ejemplo clásico.- El único ejemplo rigurosamente estudiado de difusión entre toros invariantes fue dado por Arnol'd [2]. Sean $H_0=\frac{1}{2}(I_1^2+I_2^2)$, $\epsilon H_1 = \epsilon(\cos\varphi_1 - 1)(1+\mu B)$, donde $B=\sin\varphi_2+\cos t$. Destaquemos que el sistema tiene dos pequeños parámetros ϵ y μ y que cuenta con 2 g.d.l. y el tiempo. Equivalentemente puede convertirse en sistema autónomo de 3 g.d.l. mediante $H_0=\frac{1}{2}(I_1^2+I_2^2)+I_3$, $B=\sin\varphi_2+\cos\varphi_3$.

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= I_1 \quad , & \dot{\varphi}_2 &= I_2 \quad , \\ \dot{I}_1 &= \epsilon\sin\varphi_1(1+\mu B) \ , & \dot{I}_2 &= \epsilon(1-\cos\varphi_1)\mu\cos\varphi_2 . \end{aligned} \tag{3}$$

Si $\epsilon=0$ todo toro con $I=\omega\in R^2$ es invariante y no resonante si $(n,\omega)\notin N$. Consideramos el caso $0<\epsilon\mu<<\epsilon<<1$. A partir de la teoría KAM se tiene que para la mayoría de las condiciones iniciales I varía poco al añadir la perturbación. Sin embargo se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA.- *Sean* $0<A<B$. *Para todo* $\epsilon>0$ *existe* $\mu_0>0$ *tal que* $\forall\mu\in(0,\mu_0)$ *existe una trayectoria del sistema* (3) *que conecta* $I_2<A$ *con* $I_2>B$.

Demostración.- Consideramos ya de partida ϵ no nulo fijo. Si $\mu=0$ se tiene $H=\frac{1}{2}I_1^2+\epsilon(\cos\varphi_1-1)+\frac{1}{2}I_2^2$ con lo que los dos grados de libertad están desacoplados. El sistema equivale a $\dot{I}_2=0$, $\dot{\varphi}_2=I_2$ (oscila--

dor armónico) y a un péndulo en las variables I_1, φ_1. Destaquemos que esas variables *no son acción-ángulo*.

Es inmediato que $T_{\omega_2} = \{I_1 = \varphi_1 = 0,\ I_2 = \omega_2\}$ es un toro bigotudo y que los bigotes son tridimensionales dados por $I_1 = \pm 2\sqrt{\epsilon}\ \sin\frac{\varphi_1}{2}$, $I_2 = \omega_2$. Sobre las variedades invariantes las trayectorias son

$$I_1(t) = \pm 2\sqrt{\epsilon}/\mathrm{Ch}\ \tau,\quad \varphi_1(t) = \pm 2\,\mathrm{arcctg}\,(-\mathrm{Sh}\ \tau),\quad \varphi_2(t) = \varphi_2^0 + \omega_2(t-t_0) \tag{4}$$

donde $\tau = \sqrt{\epsilon}\,(t-t_0)$ e inicialmente $I_1(t_0) = \pm 2\sqrt{\epsilon}$, $\varphi_1(t_0) = \pm\pi$, $\varphi_2(t_0) = \varphi_2^0$. En realidad la teoría KAM se aplica a la región en la que, con $\mu = 0$, el espacio de fases está foliado por toros invariantes. El toro bigotudo que ahora consideramos *no pertenece a esta región* pues es el producto de un toro 2-dimensional (variables φ_2, t) por el punto crítico hiperbólico del péndulo y sus variedades invariantes son el producto del toro 2-dimensional por las separatrices del péndulo.

Es claro que $W^u T_{\omega_2} \equiv W^s T_{\omega_2}$ teniendo así órbitas homoclínicas *no transversales*. La idea clave es que al hacer $\mu \neq 0$ W^u, W^s dejarán de coincidir y serán *transversales*, y por tanto si ω' está suficientemente cerca de ω (precisaremos cuánto luego) también será $W^u T_{\omega_2} \pitchfork W^s T_{\omega_2'}$ dando así las órbitas *heteroclínicas transversales* que originarán la cadena de transición, si los toros T_{ω_2} son toros de transición.

Tomemos, pues, $\mu \neq 0$. Los toros T_{ω_2} continuan siendo invariantes por el sistema perturbado, esto es, *la perturbación se anula en los toros invariantes*. Esa es otra idea clave en la elección de la perturbación por Arnol'd. Equivalentemente podemos decir que φ_1 se encuentra *bloqueada* en cero.

Un razonamiento standard mediante iteración funcional usando la hiperbolicidad de T_{ω_2} permite probar que $W^u T_{\omega_2}$ y $W^s T_{\omega_2}$ continuan existiendo al hacer $\mu \neq 0$ suficientemente pequeño y que dichas variedades dependen analíticamente de μ. Si en T_{ω_2} tenemos un flujo irracional, para lo que bastará que $\omega_2 \notin Q$, el toro será de transición, lo que se prueba por analogía con el toro standard.

La cuestión delicada se encuentra en la transversalidad. Veamos las ecuaciones de las variedades perturbadas. Sean $H^{(1)} = \frac{1}{2} I_1^2 + \epsilon(\cos\varphi_1 - 1)$, $H^{(2)} = \frac{1}{2} I_2^2 = \frac{1}{2}\omega^2$ los bigotes no perturbados. Escribimos

$$H^{(1)} = \Delta_1^{u,s} \ (\varphi_1; \varphi_2, \ t; \omega_2)$$

$$H^{(2)} = \frac{1}{2} \ \omega_2^2 + \Delta_2^{u,s} \ (\varphi_1; \varphi_2, \ t; \omega_2)$$

para las variedades inestable y estable, respectivamente, con $\Delta = O(\mu)$, Δ funciones 2π-periódicas en t y pudiendo limitarnos (para tener perturbaciones pequeñas) a $|\varphi_1| < 3\pi/2$ (o, si se prefiere, $|\varphi_1| < 3\pi/2$ para W^u y $|2\pi - \varphi_1| < 3\pi/2$ para W^s).

Como una órbita heteroclínica conectará $\varphi_1 = 0$ con $\varphi_2 = 2\pi$, podemos buscarla en $\varphi_1 = \pi$. Debemos calcular φ_2, t solución del sistema:

$$\Delta_1^u \ (\pi; \ \varphi_2, \ t; \ \omega_2) = \Delta_1^s \ (\pi; \ \varphi_2, \ t; \ \omega_2')$$

$$\frac{1}{2}\omega_2^2 + \Delta_2^u \ (\pi; \ \varphi_2, \ t; \ \omega_2) = \frac{1}{2}\omega_2'^2 + \Delta_2^s \ (\pi; \ \varphi_2, \ t, \omega_2')$$

Usando *ecuaciones variacionales de primer orden* respecto a μ: $\Delta_i^{u,s} = \mu\delta_i^{u,s} + O(\mu^2)$, quedará (hasta primer orden en μ): $\delta_1 = 0$, $\mu\delta_2 = -\frac{1}{2}(\omega_2^2 - \omega_2'^2)$, donde $\delta_i = \delta_i^u - \delta_i^s$.

Es inmediato que $(H^{(1)})^{\cdot} = \mu \, \epsilon \, I_1 \, B$, de donde

$$\delta_1 = -2\epsilon \int_R \frac{\partial B / \partial t}{Ch^2(\sqrt{\epsilon}(t - t_0))} \ dt,$$

y que $(H^{(2)})^{\cdot} = 2\,\omega_2 \epsilon\mu \cos\varphi_2 / Ch^2\tau$, de donde

$$\delta_2 = 2\,\epsilon\,\omega_2 \int_R \frac{\partial B / \partial \varphi_2}{Ch^2 \tau} \, dt.$$

Un cálculo por el método de residuos suministra los valores

$$\delta_1 = 2\pi \sin t_0 \ / \ Sh(\pi/2\sqrt{\epsilon}) \quad ,$$

$$\delta_2 = 2\pi\omega_2^2 \cos \varphi_2^0 \,/\, \mathrm{Sh}(\omega_2\pi/2\sqrt{\epsilon}).$$

Notemos que las integrales se han hecho con *el mismo valor de* ω_2 y no tomando ω_2 para δ_i^u y ω_2' para δ_i^s, ya que si $|\omega_2-\omega_2'|$ es pequeño el error relativo lo es.

Las condiciones de heteroclínico exigen $t_0=0$ y por tanto hallaremos un valor adecuado de φ_2^0 si $|\omega_2^2 - \omega_2'^2| < 4\pi\mu\omega_2^2/\mathrm{Sh}(\omega_2\pi/2\sqrt{\epsilon}) = 0(\mu e^{-1/\sqrt{\epsilon}})$. Escogiendo, entre los valores de I_2 inicial y final deseados, valores de ω_2 irracionales cumpliendo la condición anterior obtendremos la cadena de transición buscada.

Notemos aquí algunas *ideas esenciales* para la obtención de difusión de Arnol'd:

a) Se han empleado dos parámetros pequeños, uno de los cuales ya está incorporado al sistema no perturbado (ϵ) y el otro se utiliza para los cómputos variacionales (μ). El motivo de hacerlo así es que la transversalidad (o, cuantitativamente, el ángulo que la mide) es de *orden exponencial negativo* respecto a ϵ. Por tanto *ninguna teoría de perturbaciones*, por elevado que sea su orden, *detectaría la transversalidad*. Este hecho ha sido detectado de manera explícita en el problema restringido circular de tres cuerpos [12], donde los parámetros ϵ y μ se ven reemplazados por el inverso de la constante de Jacobi y el parámetro de masas. Un fenómeno parecido se tiene en el problema de Hénon-Heiles [10], donde la detección del carácter de cadena heteroclínica transversal relativa a las tres órbitas periódicas hiperbólicas es numéricamente inviable para energías pequeñas.

b) El problema es más arduo en el caso de *transformaciones canónicas* ya que en este caso las ecuaciones variacionales son del tipo sumatorio que sólo pueden ser *aproximadas mediante integrales*. En los ejemplos numéricos de que se dispone, no ya de difusión de Arnol'd (de la que propiamente no tenemos ejemplos explícitos), sino de transversalidad de homoclínicos, el ángulo de las variedades invariantes decrece rápidamente con los parámetros del difeomorfismo (véase [6]). En el caso más sencillo posible de las aplicaciones cuadráticas conservando area [9] el autor realizó algunos experimentos [19]. Convenientemente completados muestran que la apli cación $(x,y) \to (x\cos\alpha - (y-x^2)\sin\alpha,\ x\sin\alpha + (y-x^2)\cos\alpha)$ tiene un punto hiperbólico cuyas variedades invariantes se cortan con un ángulo del orden de e^{-5/α^2}. Si esta apreciación (correcta para α alrededor de $[0.5, 1.5]$) es válida para $\alpha = 0.1$, se tendría un ángulo, absolutamente indetectable por métodos numéricos, de 10^{-217}, y de 10^{-21715} para $\alpha = 0.01$.

§4. Acotaciones de la velocidad de difusión. Teoría de Nekhorosev.- Hemos visto en el ejemplo anterior una expresión de la *velocidad* con que se *difundía* I_2 en función de ϵ. En general, si $H = H_0(I) + \epsilon H_1(I,\varphi)$ se tiene de manera trivial que $\dot{I} = O(\epsilon)$ y por tanto $|I(t)-I(o)| = O(\epsilon|t|)$. Sin embargo bajo condiciones adecuadas (que explicaremos posteriormente) pueden darse mejores acotaciones [2], [14], [18], [15]. Exponemos aquí el resultado de Nekhorosev y una idea de sus técnicas (usadas ya en [2], [18]).

TEOREMA.- *Si* H_0 *satisface las "condiciones de escarpamiento" existen* a, b, ϵ_0 *tales que* $\forall \epsilon \in (0,\epsilon_0)$ *toda solución de* $H_0 + \epsilon H_1$ *satisface* $|I(t)-I(o)| < \epsilon^b$, $\forall t \in [0,T]$ *con* $T = \frac{1}{\epsilon}\exp(1/\epsilon^a)$.

Sea H_0 una función definida en un abierto G de R^s, $s \geq 2$. Si $I \in G$ y λ es una variedad lineal que contiene a I, $\dim \lambda \neq 0$ definimos

$$m_{I,\lambda}(\eta) = \min_{I'\in\lambda,\ \|I'-I\| = \eta} \|D(H_0|_\lambda)(I')\| .$$

Diremos que H_0 es *escarpada en* I *sobre* λ si $\exists\ C, \delta > 0, \alpha \geq 0$ tales que

$$\forall \xi \in (0,\delta] \quad , \max_{0 \leq \eta \leq \xi} m_{I,\lambda}(\eta) > C\,\xi^\alpha .$$

Las constantes C y α se llaman, respectivamente, coeficiente e índice de escarpamiento.

Sea $\Lambda^r(I)$ la grassmaniana r-dimensional en R^s pasando por I. Diremos que H_0 es *escarpada en* I si:

1) $\|D\, H_0(I)\| \geq g > 0$.

2) $\forall r \in [1,s)$, $\exists C_r, \delta_r > 0$, $\alpha_r \geq 1$ tales que H_o es escarpada en I sobre todo $\lambda \in \Lambda^r(I)$ que sea ortogonal a $DH_o(I)$.

Por último se dice que H_o es *escarpada en* G con coeficientes g, C_i, δ_i e índice α_i, $i = 1 \div s-1$, si lo es en cada $I \in G$.

De manera intuitiva la condición de escarpamiento en un punto significa que por toda variedad lineal que pase por él al movernos a una distancia $d < \delta$ debemos superar "pendientes" mayores que $C\, d^\alpha$.

Destaquemos que si $\beta_2 = s\cdot\alpha_{s-2} + s-2$, $\beta_j = \beta_{j-1}\cdot\alpha_{s-j} + s-j$ $(j=3\div s-1)$ y $\zeta = \beta_{s-1}-1$ ($\zeta = 1$ si $s=2$) las constantes a y b del teorema pueden tomarse $a = 2/(12\zeta + 3s + 14)$, $b = 3a/2\,\alpha_{s-1}$.

Veamos ejemplos de funciones cumpliendo la condición de escarpamiento. H_o se dice *quasiconvexa* en G si $\forall I \in G$ se tiene $DH_o(I) \neq 0$ y el sistema $DH_o(I)\cdot v = 0$, $v^T D^2 H_o(I) v = 0$ sólo tiene la solución $v = 0$ (entonces las curvas de nivel de H_o son convexas). Trivialmente se tiene que quasiconvexa implica escarpada con todos los índices iguales a la unidad y no quasiconvexa implica que si es escarpada alguno de los índices debe ser mayor que la unidad.

Si $s=2$ y $DH_o = (g_1\ g_2)$ debe ser $v = \begin{pmatrix} -g_2 \\ g_1 \end{pmatrix}$, y si $D^2H_o = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}$ entonces $v^T D^2 H_o v = 0$ equivale a que $h_{11}g_2^2 - 2h_{12}g_1g_2 + h_{22}g_1^2 = 0$. Si H_o es quasiconvexa no debe existir el tal v, luego $\begin{vmatrix} D^2H_o & (DH_o)^T \\ DH_o & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, que es precisamente la *condición de no degeneración isoenergética*. Si $s=3$ se tiene que H_o quasiconvexa equivale a $\begin{vmatrix} D^2H_o & (DH_o)^T \\ DH_o & 0 \end{vmatrix} < 0$.

Condiciones más débiles de escarpamiento (verificables algorítmicamente) son que $DH_o \neq 0$ y que el sistema $DH_o\cdot v = 0$, $D^2H_o(v)^2 = 0$, $\ldots$, $D^kH_o(v)^k = 0$, no tenga soluciones reales. El no ser escarpada significa que los coeficientes de Taylor deberán cumplir una *infinidad de condiciones algebraicas independientes*.

Demos a continuación una idea de la demostración del teorema de Nekhorosev.

Diremos que $k \in Z^s$ es *ν-resonante* en U si $|(k,\omega)| < \nu$ con $\omega = (DH_o)^T$ y de orden $|k| = \sum |k_i|$, para algún $I \in U$. Sea λ_o la envoltura lineal de los vectores ν-resonantes en U de orden menor o igual que N y $r = \dim \lambda_o$.

Si $H = \sum_k h_k(I) \exp(i(k,\varphi))$ hacemos un cambio canónico $(I,\varphi) \longrightarrow (J,\psi)$ tal que se tenga $H = \bar{H}(J,\psi) + R(J,\psi)$, siendo $\bar{H} = \sum_{k \in \lambda_o \cap Z^s} \bar{h}_k(J) \exp(i(k,\psi))$ y con $\|DR\| < \epsilon \exp(-N^{1-\kappa})$ para algún $\kappa > 0$ (lo cual es posible por la analiticidad de H). Considerando $\bar{H}$ en lugar de H es claro que el sistema tiene s-r *quasiintegrales*. El movimiento de J tiene lugar sobre variedades lineales λ obtenidas por translación de λ_o. Por tanto existen r *variables rápidas* y s-r *variables lentas*.

Por supuesto que r depende de U. Si $r = 0$ las λ degeneran a puntos y I prácticamente está en reposo ($\bar{H} = 0$). Si $r > 0$, I puede moverse con velocidad ϵ dentro de las variedades rápidas, pero si H_o es *escarpada* las quasiintegrales atrapan I en un conjunto de diámetro pequeño. Dentro de G el conjunto $\{I \in G \mid (k,\omega(I)) = 0\}$ se llama $\mathscr{R}(k)$, *hipersuperficie de resonancia asociada a* $k \in Z^s$ y $\mathscr{R} = \mathscr{R}(k^1) \cap \ldots \cap \mathscr{R}(k^r)$ es la *superficie resonante de multiplicidad* r.

Consideremos las resonancias definidas por vectores de orden menor o igual que N. En el *espacio de frecuencias* vienen dadas por $\{\omega \in R^s \mid \exists k \in Z^s, |k| \leq N, k \neq 0, (k,\omega) = 0\}$. Con cada superficie resonante $\mathscr{R}$ se tiene una *zona resonante* dada por condiciones del tipo $|(k,\omega)| < \nu$ para cada resonancia y un *bloque* que es la parte de $\mathscr{R}$ que no pertenece a la unión de todas las zonas resonantes de los otros $\mathscr{R}'$ tales que $\mathscr{R}' \not\supseteq \mathscr{R}$. Es claro que G menos la unión de las zonas resonantes forma el bloque no resonante.

Dentro de una superficie o zona podemos tener resonancia (o casi resonancia) para *distintos* valores de k. No así en un bloque. Todos los vectores ν-resonantes en un bloque son de la envoltura de los vectores que definen el bloque y por tanto I varía poco, cruzando variedades lineales paralelas a λ_0 con velocidad casi nula. La *idea crucial* es que en cada bloque el movimiento tiene lugar prácticamente sobre las variedades lineales λ y *la condición de escarpamiento asegura que dejaremos la resonancia* (véase §5). Entramos así (con relativa rapidez) en el bloque no resonante en el que permanecemos (relativamente) mucho tiempo.

Si $\mathscr{R} = \{I \mid \omega(I) \in \langle k^1, \ldots k^r \rangle^\perp\}$ es claro que $I \in \mathscr{R} \cap \lambda \Longleftrightarrow D(H_0|_\lambda)(I)=0$. Si $\mathscr{R} \cap \lambda$ no es puntual puede haber *canales de superconductividad*.

Veamos qué puede decirse de $|I(t) - I(o)|$ si H_0 *no es escarpada* (al menos para ciertas clases de funciones).

Una variedad lineal λ se llama *racional* si su s.e.v. está engendrado por una base de componentes enteras. Sea $\mathscr{A} = \{H_0 : R^s \to R \mid \exists\, \lambda \text{ racional} \subset R^s$, $\exists\, \gamma \text{ curva} \subset \lambda,\ D(H_0|_\lambda)(I) = 0 \ \ \forall I \in \gamma,\ \exists\, V: R^s \to R^s$ tal que $\dot{I} = V(I)$ tiene por solución $\gamma\}$.

TEOREMA [15].- $\forall H_0 \in \mathscr{A}$, $\exists\, H_1(I,\varphi)$ *y* $\xi : [0,1] \to R^s$ *tal que* $\forall \epsilon > 0$ *el hamiltoniano* $H_0 + \epsilon H_1$ *tiene una solución definida en* $[0, 1/\epsilon]$ *con* $I_\epsilon(t) = \xi(\epsilon t)$.

La trayectoria de I_ϵ coincide con γ que se convierte en *canal de superconductividad.*

§5. Bloqueo de resonancias.- Un tratamiento semejante al expuesto en el apartado anterior fue dado por Arnol'd [3] utilizando teoría de promedios (no forzosamente para sistemas hamiltonianos) para 2 grados de libertad. Una extensión que contiene parte de las ideas de §4 para un número cualquiera de grados de libertad fue dada por Simó en [18].

Sea $m \in Z^s$. Definimos como antes una *variedad resonante* $Vr_m = \{(I,\varphi) \in G \mid (m, D_I H) = 0\}$. Sea ϕ_m la *frecuencia asociada a la resonancia* : $\phi_m = (m,\omega)$. Diremos que ϕ_m está sometida a *desbloqueo de orden* k en $D_{k,m} \subset Vr_m$ si $\dfrac{d^j \phi_m}{dt^j} = 0$, $j \leqslant k$, $\dfrac{d^{k+1}\phi_m}{dt^{k+1}} \neq 0$ $\forall (I,\varphi) \in D_{k,m}$. Si $\omega^{(j)} = \dfrac{d^j \omega}{dt^j}$ una *condición suficiente* de desbloqueo de orden $\leqslant p$ es que, si $p \geqslant s$, la matriz $(\omega, \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(p-1)})$ tenga rango s .

Notemos que si $s=1$ en el problema de resonancia ideal de Garfinkel [8] con hamiltoniano $H=B(I)+2\epsilon A(I)\sin^2\varphi$ y centro de libración $(I_0,0)$ la condición $B''A\neq 0$ en I_0 no es más que un desbloqueo de primer orden. Si $s=2$ y ϵ es pequeño la condición de desbloqueo es $\det(D_I H_0, -D_I^2 H_0 \cdot D_\varphi H_1 + D_\varphi D_I H_1 \cdot D_I H_0) \neq 0$.

Diremos que se cumple la *condición geométrica* si $\forall m\in Z^s$, $\exists C_1>0$ tal que $|\dot\psi_m|>C_1\epsilon$ si $|\psi_m|<C=O(1)$. Si $s=2$ la condición de *desbloqueo de primer orden implica la geométrica*. Esto es falso para $s>2$ y desbloqueo de orden $s-1$ (véase [18]). Debido a la existencia de resonancias múltiples es difícil de verificar la condición geométrica si $s>2$. Una idea clave en los trabajos de Nekhorosev es que *el escarpamiento es una manera de imponer la condición geométrica*.

TEOREMA [18].- *La condición geométrica implica que* $|I(t)-J(t)|<C\epsilon^{\frac{3}{2}-r}(\ln(\frac{1}{\epsilon}))^\alpha$ *si* $|t|<\epsilon^{-r}$, *donde* α *vale* 2 *si* $s=2$ *y* $\alpha=\frac{3s-1}{2}$ *si* $s>2$ *y* $J(t)$ *es la solución de la ecuación promediada* $\dot J=\int D_\varphi H_1(I,\varphi)\,d\varphi$. *Si* $H_1=\sum_k A_k(I)\exp(i(k,\varphi))$ *se tiene* $\dot J=0$ *y* $J(t)=J(0)=I(0)$.

La demostración se basa en acotar el número de regiones resonantes (de orden menor que un orden dado N) que atraviesa el flujo y en estudiar la separación producida entre el sistema real y el promediado en la región resonante y en la no resonante. Una acotación de la separación producida en regiones resonantes de orden superior completa la prueba. Destaquemos que la acotación obtenida es mejor que la dada en §4 respecto a $|I(t)-I(0)|$. No así en cuanto al intervalo de tiempo para el que se tienen acotaciones.

Veamos un *ejemplo* sencillo *de superconductividad* en el que no se cumplirá la condición de desbloqueo. Sea $H=\frac{1}{2}(I_1^2-I_2^2)+\epsilon\sin(\varphi_1-\varphi_2)$, que tiene la solución particular $I_2=-I_1=\epsilon t$, $\varphi_1=\varphi_2=-\epsilon t^2/2$. Se tiene $\det(\ ;\ )=(I_1+I_2)\times$ $\times\cos(\varphi_1-\varphi_2)$. Luego para $I_1+I_2=0$, $\varphi_1=\varphi_2$ estamos en una *resonancia bloqueada*.

Puede ser sorprendente la consideración de las *dimensiones* en ese ejemplo ya que $D^2H_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}D^2H_0 & (DH_0)^T\\ DH_0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&I_1\\0&1&-I_2\\I_1&-I_2&0\end{pmatrix}$ cuyo determinante no es nulo si $I_1^2+I_2^2\neq 0$. Por lo tanto se aplica la teoría KAM y en principio los toros invariantes 2-dimensionales en cada $H=$ cte., variedad tridimensional, deberían impedir la superconductividad. Sin embargo lo que para $\epsilon = 0$ era $H = 0$ está formado por toros que son *todos resonantes* destruyéndose al perturbar y por lo tanto no impidiendo la difusión de Arnol'd. Ejemplos de superconductividad para $s = 3$ se dan en [18]. Se tiene difusión sin existir resonancia bloqueada. Es un fenómeno más lento que está relacionado con resonancias dobles y no sólo con problemas de racionalidad.

Por último destaquemos que el escarpamiento de H_0 depende de la *dirección*. Esto juega un papel importante, como se ha dicho en §4, sobre la dirección de la difusión.

§6. Problemas abiertos.- A continuación ofrecemos una lista de cuestiones abiertas (alguna ya propuesta en [15]) que creemos que puede estimular al lector.

a) Si $s = 3$ y H_0 es quasiconvexa se tiene $A = \begin{pmatrix} D^2H_0 & (DH_0)^T \\ DH_0 & 0 \end{pmatrix} < 0$. Sin embargo la teoría KAM se aplica si $A \neq 0$. ¿Qué sucede cuando $A > 0$?

b) Las acotaciones dadas en §§ 4,5 se han obtenido suponiendo que la separación $I(t) - I(0)$ ó $I(t) - J(t)$ se produce siempre de la peor manera posible. De hecho, si existe una cadena de transición y estamos cerca de las variedades invariantes, el movimiento es mucho más lento. ¿Cómo intervienen las v.i. en las acotaciones dadas?

c) Para detectar numéricamente una cadena de transición (para transformaciones canónicas, s=2) pueden tomarse dos aplicaciones $R^2 \to R^2$ preservando medida no lineales y débilmente acopladas de manera que puntos heteroclínicos de una de las APM originen puntos heteroclínicos de la aplicación global (fuera de la región KAM). Disminuyendo la no linealidad crece la región KAM. ¿Es posible seguir la evolución del heteroclínico y obtener que está asociado a puntos periódicos hiperbólicos contenidos en la región KAM?

d) Generalizar el ejemplo de Arnol'd a dimensión cualquiera admitiendo que la perturbación se anula sobre los toros invariantes del sistema no perturbado y que éstos tienen cierto carácter hiperbólico (esto es, son toros con bigotes). Si sus frecuencias son racionalmente independientes, ¿son de transición?

e) Generalizar el ejemplo anterior al caso en que la perturbación no se anula sobre los toros bigotudos del sistema no perturbado.

f) Si partimos de un hamiltoniano integrable fuera de la región de separatrices los toros invariantes no son bigotudos. Para los toros resonantes (que se destruyen al perturbar) las órbitas periódicas dan, en una aplicación de Poincaré conveniente, puntos parabólicos con parte lineal no diagonal. Determinar la existencia de variedades invariantes al perturbar dichos puntos parabólicos (véase [20] para s=2).

g) Toros resonantes quedan destruidos, pero subsisten toros de dimensión inferior. Dar criterios que permitan localizarlos (angularmente, por supuesto) y computar las W^u, W^s asociadas.

h) ¿Qué obstrucciones de dimensión o transversalidad pueden impedir la existencia de cadenas de transición si existen toros como los indicados en g)?

i) Para aplicaciones canónicas con s=1 o hamiltonianos con s=2, la existencia de puntos heteroclínicos es prueba de la desaparición de la región KAM. ¿Cómo detectar analíticamente y en función de ϵ el inicio de heteroclínicos?

j) ¿Qué puede afirmarse de la genericidad de la difusión de Arnol'd?

k) Admitiendo que existe difusión de Arnol'd para la "mayoría" de las perturbaciones de un sistema integrable, ¿qué puede decirse de la dimensión del espacio de las perturbaciones para las que dicha difusión no aparece? (Por supuesto, dentro de una clase dada de hamiltonianos).

l) La existencia de la difusión de Arnol'd prueba la no integrabilidad del sistema perturbado. ¿Cual es, genéricamente, el número de integrales primeras que subsisten además de H?

El autor está convencido de que si el lector intenta seriamente contestar a las preguntas anteriores, estará en condiciones de suministrar una lista mucho más larga.

Bibliografía

[1] Arnol'd,V.I.:"Proof of a theorem of A.N.Kolmogorov on the invariance of quasi periodic motions under small perturbations of the hamiltonian", Russ.Math.Surveys, 18 (1961),9-36.

[2] Arnol'd,V.I.:"Instability of dynamical systems with several degrees of freedom", Soviet Math.Doklady 5 (1964),581-585.

[3] Arnol'd,V.I.:"Conditions for the applicability and estimate of the error of an averaging method for systems which pass through states of resonance in the course of their evolution", Soviet Math.Doklady 6 (1965), 331-334.

[4] Arnol'd,V.I.:*Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Editions MIR, 1976.

[5] Arnol'd,V.I.,Avez,A.:*Ergodic problems of classical mechanics*,Benjamin, 1968.

[6] Bartlett,J.H.:"Stability of area-preserving mappings", en *Transformations ponctuelles et leurs applications*, Colloques Internationaux du C.N.R.S. n°229, Toulouse 1973, p.155-175.

[7] Chirikov,B.V.:"Research concerning the theory of nonlinear resonance and stochasticity",CERN Translation 71-40, Geneve 1971.

[8] Garfinkel,B.:"Formal solution in the problem of small divisors",Astron.J. 71 (1966), 657-669.

[9] Hénon,M.:"Numerical study of quadratical area-preserving mappings",Quart. Appl.Math. 27 (1969), 291-312.

[10] Hénon,M.,Heiles,C.:"The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments", Astron.J. 69 (1964), 73-79.

[11] Kolmogorov,A.N.:"General theory of dynamical systems and classical mechanics", Proc.1954 Inter.Cong.Math.

[12] Llibre,J.,Simó,C.:"Oscillatory solutions in the planar restricted three--body problem", por aparecer en Math.Annalen 1980.

[13] Moser,J.:"On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus", Nachrichten Akad.Wiss.Göttingen, Math-Phys.Klas.,1962,1.

[14] Nekhorosev,N.N.:"Behaviour of hamiltonian systems close to integrable", Funct.Anal.and Appl. 5 (1971), 338-339.

[15] Nekhorosev,N.N.:"An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable hamiltonian systems",Russ.Math.Surveys 32 (1977), 1-65.

[16] Poincaré,H.:*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Reprint NASA TT-F-450,451,452, 1967.

[17] Rüssmann,H.:"Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes (Kleine Nenner I)", Nachrichten Akad.Wiss.Göttingen Math-Phys.Klas.1970, 67-105.

[18] Simó,C.:"La variedad de órbitas keplerianas y la teoría general de perturbaciones", Tesis, Universidad de Barcelona, 1974.

[19] Simó,C.:"Una nota sobre las aplicaciones cuadráticas que conservan área", en Actas V Congreso de la Agrupación de Matemáticos de Expresión Latina, Palma 1977, p.361-369.

[20] Simó,C.:"Invariant curves near parabolic points and regions of stability", por aparecer en Proc.Intern.Conf.on the Global Theory of Dynamical Systems, Chicago, 1979.

[21] Smale,S.:"Differentiable dynamical systems",Bull.A.M.S. 73 (1967),747-817.

[22] Sternberg,S.:*Celestial Mechanics* I,II, Benjamin, 1969.

[23] Wintner,A.:*The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Univ.Press, 1947.