Pub. Mat. UAB
Nº 12 Juny 1979

EL POLINOMIO DE BERNSTEIN Y LA MONODROMIA

F. Puerta

El problema de la existencia de soluciones de una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales con coeficientes constantes, se halla íntimamente relacionado con el teorema de prolongación analítica. La demostración de este teorema realizada por I.N. Bernstein condujo a la existencia de un polinomio (llamado de Bernstein) asociado a un determinado elemento $f \in C[x_1, \ldots, x_n]$ y que contiene información sobre la singularidad en el origen de la hipersuperficie V definida por la ecuación $f(x)=0$. Se planteó entonces la existencia de posibles relaciones entre el polinomio de Bernstein y otros polinomios asociados a la singularidad en el origen de la hipersuperficie V, tales como el polinomio minimal y el característico del correspondiente operador de monodromía. Malgrange ha dado (8) una respuesta satisfactoria a estas cuestiones para el caso de singularidad aislada.

En estas notas pretendemos dar una visión general del problema así como de sus relaciones con otras teorías. Nos remitiremos para las demostraciones a la bibliografía que se inserta al final. Las notaciones que utilizaremos son lo suficientemente habituales como para no hacer necesaria una explicitación detallada de las mismas.

I.- Consideremos la ecuación diferencial $P(D)f = \varphi$, donde $P(D)$ es un operador lineal en derivadas parciales con coeficientes constantes y φ es una distribución a soporte compacto. El problema de existencia de soluciones se reduce, vía convolución, al de determinar una distribución $T \in S'(R^n)$ tal que $P(D)T=\delta$. Este problema fue resuelto independientemente por Malgrange y Ehrenpreis alrededor de 1955. La transformación de Fourier reduce el problema a la existencia de soluciones fundamentales $T\varepsilon S'(R^n)$ al de determinar para todo polinomio P una distribución temperada $T_1\varepsilon S'(R^n)$ tal que

$$P\cdot T_1 = 1$$

esto es, a la división de 1 por T_1.

Este problema se puede resolver fácilmente a partir del teorema de prolongación analítica que puede enunciarse en la siguiente forma:

> "Sea $P(x_1,\ldots, x_n)$ un polinomio con coeficientes reales y $\varphi\varepsilon\mathcal{D}(R^n)$ y consideremos la integral
>
> $$I(\lambda) = \int_{R^n} |P(x)|^\lambda \varphi(x)dx_1\ldots dx_n$$
>
> la cual converge absolutamente para $Re\lambda>0$ y es una función analítica de λ. Se verifica entonces que $I(\lambda)$ puede prolongarse analíticamente al plano complejo como una función meromorfa de λ" (10)

La demostración de este teorema fue realizada por I.N. Bernstein, para el caso de polinomios, siguiendo una sugerencia de I.M. Gelfand y utilizaba el teorema de desingularización de Hironaka (3). Más tarde Atiyah generalizaba aquel teorema para el caso de funciones analíticas utilizando asimismo Hironaka (10). Finalmente, de nuevo Bernstein (2) hizo ver que, para el caso de polinomios, era posible una prueba del teorema de prolongación analítica mucho más simple a partir del siguiente teorema, cuya demostración es puramente algebraica.

<u>Teorema.-</u> Sea $f\varepsilon C[x_1,\ldots,x_n]$, $f \neq 0$. Existen un $p(s)\varepsilon C[s]$, $p \neq 0$ y $g_{\alpha_0\ldots\alpha_n}\varepsilon C[x_1,\ldots,x_n]$ tales que para todo $k\varepsilon Z$ se verifica

$$\sum_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} g_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} k^{\alpha_0} D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}(f^k) = p(k) f^{k-1} \qquad (*)$$

Naturalmente, el conjunto de polinomios p(s) que verifican una igualdad del tipo (*), para un cierto operador, forman un ideal que llamaremos ideal de Bernstein. La base de dicho ideal (normalizada) es un polinomio, b(s), que llamaremos polinomio de Bernstein.

Bjork ha demostrado un teorema análogo para el caso en que f sea un elemento de $\mathcal{O}_n$, considerando, naturalmente, operadores con coeficientes en $\mathcal{O}_n$. (4)

Hacemos observar que si f no es inversible ($f \neq C^{te}$) s divide a b(s). (hacer k=0 en *) y que si 0 no es un punto singular de f ($df_0 \neq 0$), b(s)=s. En efecto, en este caso (razonando en $\mathcal{O}_n$) si $D_i f(0) \neq 0$, D_i es inversible y

$$(D_i f)^{-1} D_i f^k = k f^{k-1}$$

En el caso en que f sea un polinomio se razona de forma análoga. En conclusión, el cociente b(s)/s contiene información de la singularidad de f en 0.

El cálculo del polinomio de Bernstein es, en general, muy difícil. De hecho, no se conoce, por el momento, ningún algoritmo que permita su cálculo, ni siquiera en los casos más sencillos. Hay un caso, no obstante, que es elemental: si $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ es fácil ver que

$$b(s) = s\left(s + \frac{n-2}{2}\right)$$

Por otro lado, si f presenta una singularidad en el origen, f(0)=0, $df_0=0$, es posible asimismo asociar a f un polinomio de la forma siguiente. Recordemos para ello la definición de la fibración de Milnor:

Sea V el conjunto algebraico definido por la ecuación $f(z)=0$, S_ε la esfera de centro 0 y radio $\varepsilon>0$ y $K=V\cap S_\varepsilon$. Se tiene entonces (9):

<u>Teorema.</u>- Existe $\varepsilon_0>0$ tal que para todo $\varepsilon\leq\varepsilon_0$ la terna $(S_\varepsilon-K\ ,\ \varphi\ ,\ S^1)$ donde

$$\begin{aligned}\varphi:\ S_\varepsilon-K &\to S^1\\ z &\mapsto f(z)/\|f(z)\|\end{aligned}$$

es una fibración diferenciable localmente trivial.

Si designamos por F la fibra de φ en 1 (por ejemplo) existe un difeomorfismo h de F en F el cual induce un automorfismo de la homología de F, h_* , que llamaremos operador de monodromía o simplemente monodromía. Si la singularidad de f es aislada, la homología de F es muy sencilla; se tiene en efecto (9)

<u>Teorema.</u>- Si 0 es un punto crítico aislado de f, la fibra F tiene el tipo de homotopía de un ramo de (n-1) esferas. El número μ de esferas de dicho ramo coincide con la $\dim_{\mathbb{C}}\ \mathcal{O}_n/(D_1f,\ldots,\ D_nf)$

Así pues,

$$H_k(F,Z)\begin{cases}Z & \text{si } k=0\\ Z^\mu & \text{si } k=n-1\\ 0 & \text{si } k\neq 0,\ n-1\end{cases}$$

Si consideramos homología a coeficientes complejos aparece pues un automorfismo h_* del espacio vectorial $\mathbb{C}^\mu$ al que podemos por tanto asociar su polinomio característico $\Delta(t)$ (polinomio de monodromía), su polinomio minimal,...

Hemos visto pues como a todo polinomio con singularidad se le puede asociar

a) el polinomio de Bernstein.

b) los polinomios minimales y característico del operador de monodromía h_*.

Malgrange ha demostrado (8) que existe entre estos polinomios unas relaciones que permiten concluir el

<u>Teorema</u>.- (Malgrange) Los ceros del polinomio de Bernstein de f son racionales y menores que 1.

II.- El método de Malgrange para la demostración del teorema se basa, esencialmente, en la descripción de la monodromía de una singularidad como monodromía de una conexión, cuestión que a su vez guarda relación con la solución del 21 problema de Hilbert. Veamos todo esto con más detalle. Empezamos con una descripción equivalente de la fibración de Milnor.

Sean $T(\eta)$, $\eta>0$, el disco abierto de $\mathbb{C}$ de centro 0 y radio η ; escribiremos $T^*(\eta) = T(\eta) - \{0\}$. Asimismo para cada $\eta, \varepsilon > 0$ escribiremos

$$X(\varepsilon,\eta) = f^{-1}[T(\eta)] \cap \overline{B_\varepsilon(0)}$$

donde $\overline{B_\varepsilon(0)}$ es la bola cerrada de $\mathbb{C}^n$ de centro 0 y radio ε, y $$X^*(\varepsilon,\eta) = X(\varepsilon,\eta) - f^{-1}(0)$$

Para cada $t\in T(\eta)$ designamos por $X_t(\varepsilon,\eta)$ la fibra correspondiente, es decir,

$$X_t(\varepsilon,\eta) = f^{-1}(t) \cap X(\varepsilon,\eta)$$

Se tiene entonces que para ε y η convenientes $0 < \eta < \varepsilon$, la aplicación

$$f\colon X^*(\varepsilon,\eta) \to T^*(\eta)$$

es una fibración diferenciable localmente trivial, equivalente a la fibración de Milnor, independiente de ε y η.

Fijamos ε y η y escribiremos simplemente T, X^*, T^*.

Si $t\in T^*$, a cada "vuelta" $\tau \to te^{2\pi i\tau}$ corresponde un automorfismo de $H_p(X_t,\mathbb{C})$ que es el p-ésimo operador de monodromía de f, referido a t. Si la singularidad de f es aislada ya hemos dicho que todos los grupos de homología son triviales, excepto el p=n-1. En este caso se tiene, por tanto, una representación

$$\pi_1(T^*,t) \rightarrow \mathrm{Aut}\,(H_{n-1}(X_t,\mathbb{C}))$$

Es aquí que la cuestión enlaza con el aludido 21 problema de Hilbert. Consideremos el siguiente ejemplo. Sea

$$\frac{d}{dz}\vec{f} + A(z)\,\vec{f} = 0$$

una ecuación diferencial homogénea, donde

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} \quad y \quad A(z) = (a_{ij}(z))_{1 \leqslant i,j \leqslant}$$

con $a_{ij}(z)$ funciones analíticas en $\mathbb{C}-\{0\} = \mathbb{C}^*$. Si fijamos $t\varepsilon C^*$, el teorema de existencia de ecuaciones diferenciales nos dice que el espacio S_o de soluciones en un entorno de t es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n. A cada lazo γ, que empieza y acaba en t alrededor de 0, le corresponde, por prolongación analítica, un automorfismo de $S_o = \mathbb{C}^m$ que depende sólo de la clase de homotopía de γ y quedando definida por tanto una representación

$$\pi_1(\mathbb{C}^*,t) \rightarrow GL(m,\mathbb{C})$$

El automorfismo correspondiente al lazo $\tau \rightarrow te^{2\pi i\tau}$ se llama operador de monodromía de la ecuación diferencial.

El problema de Hilbert en cuestión, para el caso de $\mathbb{C}^*$, se plantea así: ¿puede toda $\mathbb{C}$-representación finita del grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{C}^*,t)$, obtenerse como la monodromía de una ecuación diferencial sobre U? De hecho, el problema de Hilbert, impone de salida condiciones a la singularidad: se pide que el 0 sea un punto singular regular de la ecuación diferencial, pues en otro caso la solución al problema puede ser nula o infinita.

Recordemos la definición de puntos singulares regulares. Consideremos la ecuación diferencial

$$a_o\frac{d^nf}{dz^n} + a_1\frac{d^{n-1}f}{dz^{n-1}} + \ldots\ldots + a_nf = 0 \qquad (Df=0)$$

con coeficientes en $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}\{t\}$. Sean $y_1, \ldots, y_n$ soluciones independientes de dicha ecuación. Si

$$\overline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

puede escribirse en un entorno del punto 0

$$\overline{Y} = z^M \emptyset(z)$$

donde

$$\emptyset(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_n(z) \end{pmatrix}$$

está formado por funciones analíticas en un entorno punteado del punto 0 y $z^M = e^{(\log z)M}$.

El significado de la matriz M es claro:

$$e^{2\pi iM}$$

es precisamente la matriz de la monodromía de la ecuación diferencial que corresponde a una vuelta positiva alrededor de 0.

Si se admite que M tiene la forma de Jordan se ve enseguida que las funciones que aparecen en z^M son combinaciones lineales de funciones de la forma $z^{\alpha}(\log z)^q$ donde q depende del tamaño de los bloques de M y α es un valor propio de M.

Se dice que la ecuación diferencial $Df=0$ es singular regular en $z=0$ si las funciones φ_i presentan polos en $z=0$, pero no singularidades esenciales. Esto equivale a que la solución $\overline{Y}$ crece al tender z a 0 a lo sumo como una potencia de z. Este criterio es debido a Fuchs (1865). Caracterizaciones más intrínsecas de las ecuaciones singulares regulares han sido dadas modernamente por Malgrange, Deligne,...

Para nuestros propósitos resulta conveniente definir la regularidad a través de la noción de conexión.

Puesto que nuestro problema es de tipo local nos situaremos en este marco y en el caso de una variable que es el que nos ocupará.

Sea M un $\mathcal{O}_1$-módulo. Una conexión en M es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal

$$\nabla : M \to M \otimes_{\mathcal{O}_1} \Omega$$

donde $\Omega = \Omega^1_{\mathcal{O}_1}$, tal que

$$\nabla(ax) = x \otimes da + a\nabla(x)$$

para todo $a \in \mathcal{O}$, $x \in M$.

Puesto que, en este caso, $M \otimes_{\mathcal{O}_1} \Omega \cong M$ como $\mathcal{O}_1$-módulo, a través de la aplicación $(x, adz) \to ax$ resulta que dar una conexión en M equivale a dar un endomorfismo $\mathbb{C}$-lineal, que notaremos D, tal que

$$D(ax) = \frac{da}{dz}x + aDx$$

Se tiene el siguiente (7)

<u>Lema.</u>- Todo $\mathcal{O}_1$-módulo M de tipo finito y provisto de una conexión, es libre.

Entonces la elección de una base de M nos hace ver que es equivalente dar una conexión en M a dar un sistema diferencial

$$\vec{f} \rightarrow \frac{d}{dz}\vec{f} + A(z)\,\vec{f}$$

ó

$$\vec{f} \rightarrow d\vec{f} + A(z)\,\vec{f}\,dz$$

(según se identifique o no M con $M \otimes \Omega$).

Es claro que, ahora, los elementos de la matriz $A(z)$ pertenecen a $\mathcal{O}_1$.

Sea K el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_1$. Análogamente, una conexión sobre un K-módulo M vendrá definida por una aplicación $\mathbb{C}$-lineal $D: M \rightarrow M$ tal que

$$D(ax) = \frac{da}{dz}x + aDx$$

para $a \in K$, $x \in M$. En este caso D se identifica a un sistema diferencial análogo al anterior, pero en el que los elementos de la matriz A(z) son funciones meromorfas con posibles polos en el origen. Pues bien, la conexión D diremos que es regular si puede elegirse una base (u_i) de M de tal manera que la matriz A definida por

$$Du_i = \sum_j c_i^j u_j$$

sea tal que sus elementos c_i^j tengan a lo sumo polos simples en el origen.

La solución de Deligne al citado 21 problema de Hilbert (que de hecho se sitúa en un marco más general(6)) afirma que, efectivamente, "toda $\mathbb{C}$-representación finita del grupo $\pi_1(T^*,t)$ puede obtenerse como la de una conexión regular" (tal como hemos definido).

Veamos un sencillo ejemplo para ilustrar la situación. Tomemos el polinomio x^2+y^2; la fibra de Milnor es del mismo tipo de homotopía que S^1 y la monodromía es en este caso el automorfismo h_* de $H_1(S^1) = \mathbb{C}$ definido por

$$h_*(t) = te^{\pi i}$$

Es decir, la representación finita de $\pi_1(T^*,t_o)$ viene dada por

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(T\ ,t_o) & \rightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \\ \Psi & & \\ \gamma & \rightarrow & e^{\pi i} \end{array}$$

donde γ es el generador $\tau \rightarrow t_o e^{2\pi i \tau}$ de $\pi_1(T^*,t_o)$ y $e^{\pi i}$ es el automorfismo "multiplicación por $e^{\pi i}$".

Según hemos dicho existe una conexión regular, o sea una ecuación diferencial con puntos singulares regulares cuya monodromía coincide con la anterior. Consideremos, en efecto, la ecuación diferencial

$$\frac{df}{dz} - \frac{1}{2z} f = 0$$

Una solución fundamental en un entorno de t_o viene dada por $\exp(\frac{1}{2}\log z)$, por lo que la monodromía de esta conexión coincide con la anterior.

III.- Para las demostraciones, y salvo otra explicitación, nos remitimos a partir de aquí a (5).

En general, es posible definir una conexión, cuya monodromía coincida con la de la asociada a la de la fibración de Milnor. Dicha conexión es la de Gauss-Malin, que pasamos a describir.

Sea $f \varepsilon \mathcal{O}_n$ con $f(0)=0$, $df_o=0$, y consideremos los complejos

$$\ldots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{O}_n \xrightarrow{d} \Omega_n \xrightarrow{d} \Omega_n^2 \rightarrow \ldots \xrightarrow{d} \Omega_n^n \rightarrow 0 \ldots \quad (\Omega)$$

$$\ldots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{O}_n df \xrightarrow{d} \Omega_n \wedge df \rightarrow \ldots \xrightarrow{d} \Omega_n^{n-1} \wedge df \rightarrow 0 \ldots \quad (\Omega \wedge df)$$

$$\ldots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \frac{\Omega_n}{\mathcal{O}_n df} \xrightarrow{d} \frac{\Omega_n^2}{\Omega_n \wedge df} \rightarrow \ldots \xrightarrow{d} \frac{\Omega_n^{n-1}}{\Omega_n \wedge df} \rightarrow 0 \ldots \quad (\Omega_r)$$

donde d es la diferencial exterior habitual en Ω y $\Omega\wedge df$ y la inducida por d en los cocientes, "diferenciales relativas", en Ω_r.

Los $\mathcal{O}_n$-módulos de estos complejos se dotan por restricción de escalares de estructura de $\mathcal{O}_1$-módulo, a través del único homorfismo de anillos

$$\psi : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_n$$

continuo para las respectivas topologías $\mathfrak{M}$-ádicas tal que $\psi(t)=f$. Con esta estructura de $\mathcal{O}_1$-módulos se comprueba que en el caso de los complejos $\Omega\wedge df$ y Ω_r las respectivas diferenciales son morfismos de $\mathcal{O}_1$-módulos, con lo que sus grupos de cohomología $H^p(\Omega\wedge f)$ y $H^p(\Omega_r)$ poseen estructura de $\mathcal{O}_1$-módulo y por tanto

$$K \otimes_{\mathcal{O}_1} H^p(\Omega\wedge df) \quad y \quad K \otimes_{\mathcal{O}_1} H^p(\Omega_r)$$

son espacios vectoriales sobre K.

Consideremos la sucesión exacta de complejos

$$0 \to \Omega\wedge df \to \Omega \to \Omega_r \to 0$$

La sucesión exacta de cohomología de dicha sucesión nos hace ver que el "connecting" δ es un isomorfismo

$$\delta: H^{p-1}(\Omega_r) \cong H^p(\Omega\wedge df)$$

tal que $\delta(\tilde{w}) = \widetilde{dw}$, $w \in \Omega_r^{p-1}$

(es sufuciente tener en cuenta la exactitud de

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{d} \mathcal{O}_n \xrightarrow{d} \Omega_n \to \dots \xrightarrow{d} \Omega_n^n \to 0 \;)$$

Por otro lado se define un $\mathcal{O}_1$-morfismo ν de $H^{p-1}(\Omega_r) \to H^p(\Omega\wedge df)$ a través de

$$\bar{w} \to w\wedge df \quad , \quad \bar{w} \in \frac{\Omega_p}{\Omega^{p-1}\wedge df}$$

resultando que su extensión

$$\nu : \ K \otimes_{\mathcal{O}_1} H^{p-1}(\Omega_r) \ \rightarrow \ K \otimes_{\mathcal{O}_1} H^{p}(\Omega \wedge df)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Extendiendo δ a los correspondientes K-espacios vectoriales se define una aplicación

$$\nabla_t : K \otimes_{\mathcal{O}_1} H^{p-1}(\Omega_r) \ \rightarrow \ K \otimes_{\mathcal{O}_1} H^{p-1}(\Omega_r)$$

mediante $\nabla_t = (-1)^{p-1} \nu^{-1} \circ \delta$, la cual verifica la relación

$$\nabla_t(ax) = \frac{da}{dt} x + a \nabla_t(x)$$

$a \varepsilon K$, $x \varepsilon K \otimes_{\mathcal{O}_1} H^{p-1}(\Omega_r)$. Esto prueba que ∇_t es una conexión en el K-espacio vectorial $K \otimes_{\mathcal{O}_1} H^{p-1}(\Omega_r)$ llamada conexión de Gauss-Malin.(5)

Es importante hacer notar que el rango de $H^p(\Omega_r)$ como $\mathcal{O}_1$-módulo coincide con el p-ésimo número de Betti de la fibra de Milnor. De hecho, para el caso de singularidad aislada, lo que se tiene es que

$$\operatorname{rang}_{\mathcal{O}_1} H^{n-1}(\Omega_r) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{(D_1 f, \ldots, D_n f)}$$

que como ya se ha dicho coincide con $\dim_{\mathbb{C}} H^p(X_t, \mathbb{C})$.

Se tiene asimismo el resultado fundamental siguiente:

<u>Teorema.</u>- La conexión de Gauss-Malin es regular. (7)

La regularidad de la conexión de Gauss-Mavin equivale a la existencia de una red Γ en $K \otimes_{\mathcal{O}_1} H^{p-1}(\Omega_r)$ que sea $t\nabla_t$-estable. Recordamos que Γ es una red si es un sub-$\mathcal{O}_1$-módulo libre que engendra $K \otimes_{\mathcal{O}_1} H^{p-1}(\Omega_r)$ como K-espacio vectorial. Al ser Γ, $t\nabla_t$-estable, $t\nabla_t$ opera sobre el cociente $\Gamma/t\Gamma$ resultando que la matriz de $t\nabla_t$ (operando sobre el cociente) en una cierta base es precisamente la matriz Res C , formada por los residuos de los elementos de la matriz de la conexión de Gauss-Mavin, en la base respecto de la cual dichos elementos presentan a lo sumo polos simples. El polinomio minimal de Res C está relacionado con el polinomio de monodromía de tal modo que permite obtener el siguiente fundamental resultado: las raíces del polinomio minimal de Res C son racionales.

Es a través del mismo que Malgrange prueba la racionalidad de las raíces del polinomio de Bernstein.

No es posible en el marco de esta charla ofrecer un resumen comprensible de la demostración del citado teorema . No obstante, indicaremos las grandes líneas en las que se apoyan y que esperamos darán idea de la notable complejidad de aquélla.

En primer lugar se procede a una reformulación del polinomio de Bernstein.

Sea para ello $\mathcal{O}_f$ el localizado de $\mathcal{O}_n$ respecto de $\{f^k\}$ y denotemos por B el anillo de polinomios $\mathcal{O}_f[s]$. En B se hacen operar los anillos $\mathcal{O}_f$, $\mathcal{D}$, $\mathbb{C}[s]$, $\mathcal{O}_1$ y K de la siguiente forma:

a) $\mathcal{O}_f$ de la forma evidente.

b) $\mathcal{D}$ a través de:

$$\mathcal{D}_i(as^\alpha) = (D_ia)s^\alpha + af^{-1}(D_if)s^{\alpha+1} \quad , \quad a\varepsilon\mathcal{O}_f \, .$$

c) $\mathbb{C}[s]$ mediante:

$$s(as^\alpha) = as^{\alpha+1}$$

d) $\mathcal{O}_1 = \mathbb{C}\{t\}$ a través de:

$$t(as^\alpha) = af(s+1)^\alpha$$

$$\frac{1}{t}(as^\alpha) = af^{-1}(s-1)^\alpha$$

Con ello resulta que B es módulo respecto a todos los anillos citados. Además a) es compatible con c) y d), y b) lo es con c). De esto último resulta que B es un $\mathbb{C}[s] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D} = \mathcal{D}[s]$-módulo.

Si escribimos $R = \mathcal{D}[s]\cdot 1$ no es difícil observar que el ideal de Bernstein $\mathcal{J}$ es

$$\mathcal{J} = \left\{ p(s) \in \mathbf{C}[s] \text{ tal que } p(s+1)R \subset tR \right\}$$

verificándose además fácilmente que si σ denota la multiplicación por s, σ opera en R/tR. Está claro entonces que: el polinomio de Bernstein de f es el polinomio minimal de la acción de σ+id en R/tR.

Asimismo si τ denota la multiplicación por t y $\bar{\nabla}_t = -\sigma\tau^{-1}$, resulta sencillo comprobar que

$$\bar{\nabla}_t(t^m s^\alpha) = mt^{m-1}s^\alpha + t^m\,\bar{\nabla}_t(s^\alpha)$$

de donde se obtiene que $\bar{\nabla}_t$ es una conexión (conexión de Malgrange) en el K-espacio vectorial B. Teniendo en cuenta que $-\sigma\tau^{-1} = -\tau^{-1}(\sigma + \mathrm{id})$, resulta finalmente que: el polinomio de Bernstein de f es el polinomio minimal de la acción de $-t\,\bar{\nabla}_t$ en R/tR.

Las ideas esenciales de la demostración del teorema de Malgrange son las siguientes (se supone f con singularidad aislada):

1) Se observa en primer lugar que $H^p(B)$ es asimismo un K-espacio vectorial con conexión $\bar{\nabla}_t$, existiendo un isomorfismo $K \otimes_{\mathcal{O}_1} H^{p-1}(\Omega_r) \cong H(B)$ compatible con las conexiones.

2) Se demuestra (es la parte más laboriosa) que $H^n(R)$ es una red $t\nabla_t$-estable en $H^n(B)$, que por el isomorfismo anterior nos da una red $t\nabla_t$-estable en $K \otimes_{\mathcal{O}_1} H^{n-1}(\Omega_r)$.

3) A continuación se observa que

$$H^n(R)/tH^n(R) \cong H^n(R/tR) \cong H^n(R/tR+\Sigma\mathcal{D}[s]D_i f)$$

4) Finalmente resulta que si b(s) es, como se ha dicho, el polinomio minimal de la acción de $-t\,\nabla_t$ sobre

R/tR, $\frac{1}{s}b(s)$ lo es de la acción de $-t\nabla_t$ sobre $R/tR+\Sigma\mathcal{D}[s]D_if$, teniendo este último $\mathcal{D}$-módulo, que escribiremos brevemente M, la particular y esencial propiedad de que

$$\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(M) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(H^n(M))$$

De aquí resulta inmediatamente que $\frac{1}{s}b(s)$ es el polinomio minimal de la acción de $-t\nabla_t$ sobre $H^n(R)/tH^n(R)$ lo que nos da la racionalidad de las raíces de b(s).

Un análisis detallado de los valores propios de la matriz de monodromía permite concluir a Malgrange que las raíces de b(s) son además < 1.

Bibliografía

1) Atiyah, M.
Resolution of singularities and division of distributions
Com. of pure and appl. Math. (1970) pp 145-150

2) Bernstein, I.N.
The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter. Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, Vol.6, No 4, pp.273-285 (1972)

3) Bernstein, I.N., Gelfand, S.I.
Meromorphic property of the functions P^λ (misma referencia Vol. 3 No. 1 pp. 84-85.)

4) Bjork
Dimension over algebras of differential operators

5) Ferrer, Navarro, Panyella, Puerta
El polinomio de Bernstein y la monodromía (de un curso de Luis Puig). Seminario de Matemáticas I, No 10, 1976/77, ETSIIB- UPB.

6) Katz, N.
Proceedings of Symposia in Pure Math. Vol 28, A.M.S. (1976)

7) Malgrange, B.
Integrales asymtotiques et monodromie. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^{o} serie t, 7 (1974)

8) Malgrange, B.
Le pòlinome de Bernstein d'une singularité isolée. Lecture Notes in Math. No 459 (1975)

9) Milnor, J
Singular points of complex hypersurfaces. Princeton U.P. (1968)

10) Poenaru, V.
Analyse Differentielle . Lecture Notes in Math, No 371)1974)

Departamento de Matemáticas de la E.S.I.I.B.
Universidad Politécnica de Barcelona