Pub. Mat. UAB
No. 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

UN ENFOQUE QUASI-EMPIRICO DA TEORIA DE PROBABILIDADES

X. García Suarez, C.Saenz Castro

Colectivo Matemático Galego Vacaloura
Vigo

ABSTRACT: We consider Mathematics just a Quasi-Empiric theory, where, unlike the Euclidian theory, logic is used basically as a means of criticism and not exclusively of demonstration.
In a theory like this, the basic channel of progress, are the controversies between the rival theories.It is then a question of putting forward, whenever it possible, and in a syncronic way, the origin of the concept to be studied and that of its present formalization. From this point of view, an introduction to the concept of probabilities is dealt with here.

As distintas posturas que se dan hoxendía verbo a didactica das matemáticas responden, ó cabo, as diversas concepcións que delas existen. Aínda que o ensinante adopte posturas miméticas dacordo cos tempos nos que vive, polo xeral non as ten integradas dabondo non respondendo, xa que logo, a unha toma de posición clara respecto ó caracter que as matemáticas teñen como TEORIA que implicará unha determinada metodoloxía.

Dende diversos pontos de vista, en certo senso superadores uns dos outros, tentáronse reduci-las matemáticas a unha teoría ideal que ven dada por un sistema dedutivo no que se encaixan proposicións verdadeiras como ponto de partida (unha conxunción finita de axiomas) que transmiten a verdade ó resto do sistema mediante as regras da inferencia lóxica. Chamarémoslle a este modelo ideal SISTEMA EUCLIDEO, que noutras palabras non é mais nada cá clausura dedutiva das proposicións que son asumidas como verdadeiras.

O esviamento das teses da verdade absoluta en matemáticas, sobor de todo despois da Conxetura de Gödel (C. Gödel), fixo que homes tan fixos nos seus principio en determinado momento, reconsideraran mais tarde as súas posturas. Asi Rusell na súa autobiografía di "... A esplendida certeza que eu coidaba atopar nas Matemáticas, foi botada abaixo". Von Neumen dí: "A miña visión da verdade absoluta cambeou tres veces sucesivamente", e Weyl afirma: "Antes as Matemáticas eran infalibeis, C. Gödel é, ó cabo, un "feito duro"". Este desencanto serviu ós filosofo-matemáticos marxistas pra se afianzaren nas súas posicións. Citemos por exemplo a Mostowski "...C. Gödel e outros resultados negativos confirman o aserto dos filósofos materialistas de que as matemáticas en derradeira instancia son unha ciencia natural, isto é: concepto e método están fundamentados na experiencia e tódolos intentos de establece-los seus fundamentos sen ter en conta a súa orixe nas ciencias da natureza están chamados ó fracaso". Kalmar dí: "A consistencia dos sistemas formais é un feito empírico...". Por qué non confesamos dunha vez qué as matemáticas coma as outras ciencias están baseadas en contrastadas na práctica?

Outra custión que eiquí nos interesa salientar é que as formalizacións que das distintas ponlas das matemáticas se teñen feito, dende a xeometría de Hilbert até a axiomática de Zermelo-Frankel prá teoría de conxuntos, presêntase coma un todo xa estructurado no que non se albisca o camiño real que se seguí pró seu establecemento.

Asi as cousas, por qué non acepta-la tese lakatiana do modelo Quasi-Empírico (Q.E.) como superador deste estado de cousas se o que fai non é mais ca presentar sincrónicamente tódolos procesos que no devenir histórico conduciron á configuración actual das matemáticas?

Pra Lakatos unha teoría Q.E. é aquela na que, en contraposición a unha teoría Euclídea (E.), os axiomas son explicados polo resto do sistema e non ó rives. Non é isto acaso recoñoce-los procesos que levaron a Rusell, Hilbert etc. ás súas formalizacións?

En particular, unha teoría Q.E. será empírica se os seus axiomas son consideracións espacio-temporais.

A metodoloxía E. é primitiva no senso de nega-los procesos históricos e/ou psicolóxico-evolutivos, non deixando lugar a ningún tipo de especulacións. A Q.E. lévanos á proliferación de hipóteses alternativas cun grande poder "heurístico" e "didáctico".

O desenvolvemento dunha teoría E. esquemáticamente comprende tres fases:

1) Estado intuitivo precientífico que constitue a prehistoria do concepto.
2) Periodo de fundamentación que reorganiza a disciplina e establece a súa estructura dedutiva.
3) Tódolos problemas son resoltos no (dentro do) sistema preestablecido. O descobremento de falseadores lóxicos (proposicións da forma p&-p) leva ó sistema á súa autodestrución.

As etapas dunha teoria Q.E. son:

1) Problemas e solucións axeitadas: probas e refutacións.
2) Establecemento das distintas teorías (rivais) prós feitos problemáticos.
3) Revisión continua.

Dende logo que unha teoria Q.E. tamén admitirá falseadores do tipo p&-p ; orabén: xa que unha teoria formal non é mais ca formalización dunha teoría informal, parece natural enton pensar que unha teoria formal se pode refutar se algun dos seus teoremas é negado na correspondente teoría informal. Diremos que neste caso temos un falseador heurístico. Aínda mais, podemos considerar como falseadores heurísticos certas proposicións da teoría informal que non son formalizabeis na formal. Este tipo de falseadores, ós que unhas ponlas das matemáticas ofrecen mais atrancos ca outras, son clásicos na historia da ciencia e, en particular, da matemáticas.

No que sigue tentamos de establece-lo sistema euclídeo que subxace no modelo probabilístico de Kolmogorov e indicamos as liñas polas que debería discurrir unha metodoloxía do ensino das probabilidades baseada nun modelo quasi-empírico.

Toda a teoria elemental de probabilidades está construída sobor da base de axiomas do tipo:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

2) $P(A_1 U A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

3) $P(U) = 1$

Dos axiomas seguindo un método estritamente dedutivo, tíranse unha chea de teoremas (o teorema de adición de probabilidades etc).

Este modelo teorico xustificase diante do alumno polas propiedades das frecuencia que somentes actuan como evidencia intuitiva do modelo teorico formal que se define.

Neste proceso están reflexadas as tres fases da teoría euclidea que denantes suliñabamos:

1) Estado intuitivo precientifico que neste caso pode sè-lo modelo de Laplace e o modelo frecuencial
2) Periodo de fundamentación que sería a axiomatica de Kolmogorov e os teoremas que dela se deducen
3) Asignación de probabilidades nun problema determinado seguindo criterios de simetria (modelo de Laplace) ou repetindo o experimento, tendo presente a lei de estabilidade das frecuencias relativas (modelo frecuencial).

Nun enfoque quasi-empirico da custión diriamos que o que acontece é que coexistindo co modelo formal de Kolmogorov están uns modelos informais onde se resolven os problemas elementais de probabilidades. Soio porque existen por unha banda falsificadores lóxicos dos modelos informais e por outra problemas que non se poden plantexar, foi preciso chegar ó modelo de Kolmogorov. Este, á súa vez, presenta problemas de tipo lóxico e de tipo de asignación de probabilidades polo que parece preciso crear un novo modelo formal (A. Renyi).

Presentamos a continuación catro problemas e a súa posibel solución en cada uno dos modelos probabilisticos:

1) Asignación de probabilidades no lanzamento dun dado equilibrado de seis caras
2) Asignación de probabilidades no lanzamento dun dado que teña forma de tetraedro irregular
3) Asignación de probabilidades nun problema xeométrico:

Cal é a probabilidade de que a lonxitude da corda reborde á mitade do diametro?

4) Asignación de probabilidades no caso de escolleita ó azar dun número enteiro, supondo que todo enteiro ten a mesma probabilidade de ser escollido.

Evidentemente o suposto 1) é formalizabel no modelo de Laplace e non se precesaría dos restantes modelos pra solucionalo.

O suposto 2) xa non é formalizabel no modelo de Laplace e, xa que logo, hai que buscar un novo xeito de asignación de probabilidades. Ten solución no modelo frecuencial.

No suposto 3) como poderiamos asignar probabilidades? Depende enteiramente do xeito en que se traza a corda. Se se fai tomando un ponto da circunferencia e dibuxando enton a corda, en calquera angulo, supondo tódolos angulos igualmente posibeis a probabilidade pedida é 2/3. En troques, se escollemo lo criterio de fixa-lo diametro e trazar cordas perpendiculares a el en calquera ponto, a probabilidade pedida é $\sqrt{3}/2$.

Neste caso estamos falando de probabilidades condicionadas. Que senso te escoller un ponto dos infinitos da circunferencia ou un diametro empregando o modelo de Kolmogorov?

Algo semellante ocurre no problema 4). Tentemos de formalizalo:

Sexa N o conxunto dos naturais, $\mathcal{A}$ conxunto de todalas partes de N, sexa p_n $(n=1,2,\ldots)$ unha sucesión de numeros non negativos, sexa $\mathcal{B}$ o conxunto de partes de N tales que $\sum_{n\in B} p_n$ sexa positivo e finito.

Se pomos $\mu(A) = \sum_{n\in A} p_n$ pra $A \in \mathcal{A}$ enton:

$$P(A/B) = \frac{\mu(AB)}{\mu(B)}$$

pra $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$

é un alxebra de probabilidade condicionada que non esta enxendrada por un alxebra de probabilidade de Kolmogorov mais ca se $\sum_{n\in A} p_n$ converxe.

Problemas coma este derradeiro son os que fan elaborar unha nova axiomatica do cálculo de probabilidades que é unha extensión da teoria de Kolmogorov e que ten como concepto de base o de probabilidade condicional.