Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE CONECTIVOS LOGICOS NO DISTRIBUTIVOS PARA LA TEORIA DE LOS CONJUNTOS BORROSOS

C. Alsina, E. Trillas, L. Valverde

Dpt. de Matemàtiques E.T.S.A. Vallès
Dpt. de Matemàtiques i Estadística E.T.S.A.B.
Universitat Politècnica de Barcelona

ABSTRACT: It is given a general functional form for logical Connectives "or" and "and" (non distributive but associative) using additive generators. We also study the Kleene's character of the obtained logic and the connectives relation by De Morgan laws (with adequate strong negation functions, if they exists) and give further characterizations of the Min-Max pair.

Bellman y Giertz probaron en (2) que, bajo hipótesis razonables, especialmente la distributividad, los únicos conectivos lógicos "y" y "o" para la teoria de los conjuntos borrosos son los usuales Min y Max. Un sencillo razonamiento como el siguiente prueba que la distributividad y las condiciones de frontera son argumentos esenciales:

$$x = F(x,1) = F(x,G(1,1)) = G(F(x,1),F(x,1)) = G(x,x),$$

siendo F y G funciones de $[0,1]^2$ en $[0,1]$ que generan, respectivamente, la intersección y la reunión funcionalmente, en la forma:

$$(A\cap B)(x) = F(A(x),B(x));\ (A\cup B)(x) = G(A(x),B(x)),$$

para cada $x\in X$ y $A,B\in \underset{\sim}{P}(X)$.

Zadeh introduce los conectivos no distributivos $F_m(x,y) = \mathrm{Max}\ (x+y-1,0)$ y $G_m(x,y) = \mathrm{Min}\ (x+y,1)$, $F_p(x,y) = x.y$ y $G_p(x,y) = x+y-x.y$ y Łukasiewicz hace uso de F_m y G_m al definir operadores de identificación en lógica polivalente por medio de $H(x,y) = F(G(x,N(y)),G(y,N(x))$, donde N es la función de negación fuerte $N(x) = 1-x$.

Para la sistemática del estudio de estos conectivos se consideran las siguientes clases de operaciones en $[0,1]$:

$\mathcal{F} = \{ F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$; F es asociativa, no decreciente, continua, $F(1,x)=x \}$

$\mathcal{G} = \{ G: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$; G es asociativa, no decreciente, continua, $G(0,x)=x \}$

$\mathcal{F}_A = \{ F \in \mathcal{F}$; F es arquimediana, i.e., $F(x,x) < x$, para todo $x \in (0,1) \}$

$\mathcal{G}_A = \{ G \in \mathcal{G}$; G es arquimediana, i.e., $G(x,x) > x$, para todo $x \in (0,1) \}$,

asi como las negaciones fuertes en $[0,1]$:

$S([0,1]) = \{ n: [0,1] \longrightarrow [0,1]$; n es continua, estrictamente decreciente, $n^2(x)=x$, $n(0)=1$ y $n(1)=0 \}$,

caracterizadas en (6).

Despues de definir operadores n-duales como aquellos para los que existe una negación $n \in S([0,1])$ tal que la terna (F,G,n) verifique las leyes de De Morgan, es decir $nF(x,y) = G(n(x),n(y))$, para todo $x,y \in [0,1]$, y con la ayuda de los teoremas de representación de funciones asociativas de Aczél (1), Ling (4) y Mosterd-Shields (5) se demuestra la siguiente condición necesaria y suficiente para que dos operadores arquimedianos sean n-duales:

TEOREMA: Sean $F \in \mathcal{F}_A$ y $G \in \mathcal{G}_A$ generados respectivamente por f y g, entonces F y G son n-duales si y solo si existe una constante positiva p tal que

$$(*) \qquad f^{(-1)} \circ 1_p \circ g = g^{(-1)} \circ 1_{1/p} \circ f ,$$

y "a fortiori", n viene dada por uno cualquiera de los dos miembros de la igualdad (*) (1_p es la homotecia de razón p y $f^{(-1)}$ indica la pseudo-inversa de f).

Demostración: Escribiendo la igualdad $n \circ F \circ (n \times n) = G$ en términos de los generadores aditivos f y g, se comprueba que $f \circ n$ y g son generadores aditivos de una misma operación G, puesto que estos son únicos a menos de constantes multiplicativas, se tiene que $f \circ n = p.g$ y de aquí el resultado.

Asimismo se dan otras condiciones necesarias y suficientes para la n-dualidad entre operadores de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$. El teorema anterior permite hallar facilmente pares de operaciones n-duales para toda una familia de negaciones, como ocurre con los operadores que Hamacher introduce en (3):

$$G_{-1}(x,y) = \frac{x+y-x.y}{1-x.y} \; ; \quad F_0(x,y) = \frac{x.y}{x+y-x.y} \; ,$$

que son n-duales para cualquier negación de la familia $n_s = \frac{1-x}{1+sx}$, $s > -1$ (negaciones de Sugeno). Sin embargo se prueba que la n-dualidad para todas las negaciones fuertes es una propiedad que caracteriza nuevamente al par Max-Min:

TEOREMA: Si $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$ son n-duales para toda negación fuerte de $[0,1]$, entonces F = Min y G = Max.

Demostración: Para cada $x_o \in (0,1)$ se consideran dos negaciones fuertes n_1 y n_2 que tengan a x_o como punto fijo y tales que $n_1(x) < n_2(x)$ para todo $x \in (0,1)-\{x_o\}$, la n-dualidad de F y G para todas las negaciones fuertes y la existencia de una sucesión $\{n_k\}$ de negaciones fuertes tal que $\lim_{k\to\infty} n_k(x) = 1$, para todo $x\in[0,1)$ obliga a que $G(x_o,x_o) = x_o$ y por consiguiente $F(x_o,x_o) = x_o$.

En esta demostración es esencial la continuidad de F y G. Son tambien posibles otras caracterizaciones de Min,Max y N en las que no intervenga esta propiedad, como la siguiente:

TEOREMA: Sean $F\in\mathcal{F}$ y $n \in S([0,1])$. Si $G = n \circ F \circ (n \times n)$, es decir G es la operación dual de F via n, entonces

$$F(x,y)+G(x,y)-F(x,y).G(x,y) = 1-n(x).n(y),$$

si y solo si F = Min , G = Max y n = N.

En cualquier caso existen condiciones lógicas con mas soluciones que el par Min-Max, como por ejemplo la desigualdad de Kleene, "$x\wedge\bar{x} \leq y\wedge\bar{y}$, para todo $x,y\in[0,1]$", que es satisfecha universalmente cuando el par Min-Max es sustituido por cualquier otro par de conectivos:

TEOREMA: Si $F\in\mathcal{F}$, $G\in\mathcal{G}$ y $n\in S([0,1])$, entonces la desigualdad de Kleene

$$F(x,n(x)) \leq G(y,n(y)),$$

es válida para todo $x,y\in[0,1]$.

En la demostración de esta propiedad juega un papel fundamental el hecho de que toda negación fuerte tiene un punto fijo. Este teorema sugiere la introducción del parámetro

$$K(F;n) = \inf\{nF(x,n(x))-F(x,n(x));\ x\in[0,1]\},$$

para $F\in\mathcal{F}$ y $n\in S([0,1])$, como una medida del grado de "clasicidad" de F y su n-dual G. Es fácil probar que:

(a) $0 \leqslant K(F;n) \leqslant 1$,

(b) $K(F;n)=0$, si y solo si $F(x_n,x_n)=x_n$, (x_n punto fijo de n),

(c) Si $F \in \mathcal{F}_A$ entonces $K(F;n) > 0$,

(d) Si $F \notin \mathcal{F}_A$ es estrictamente creciente, entonces $K(F;n) < 1$,

(e) $K(F_m;n) = 1$, si y solo si $n \leqslant N$ puntualmente.

Finalmente conviene notar que con estos conectivos, al no ser idempotentes, se pierde la estructura de retículo en $\underset{\sim}{P}(X)$; la única y natural posibilidad de mantener esta estructura es con el par Max-Min, y que para conectivos arbitrarios F,G el único subretículo es el álgebra de Boole de las funciones características (subconjuntos clásicos). Tambien es interesante observar que, al ser arquimedianos, los únicos idempotentes para los pares G_m y F_m, G_p y F_p son 0 y 1, y que el primero verifica universalmente los principios del Tercio Excluso y de No-Contradicción, en tanto que estas leyes solo son satisfechas por el par G_p,F_p en el caso clásico.

BIBLIOGRAFIA

(1) ACZEL, J.,*"Lectures on Functional Equations and their Applications"*. Academic Press, New York (1969).

(2) BELLMAN,R.-GIERTZ,M., *On the Analitic Formalism of the Theory of Fuzzy Sets*. Inf. and Sci., 5(1973), p. 149-156.

(3) HAMACHER,H., *Uber logische Verknüpfungen unscharfer Aussagen und deren zugehörige Bewertungs-funktionen*. Lehrstuhl für Unternehmens forschung RWHT Aachen (1975).

(4) LING,C.H., *Representation of Associative Functions*. Publ. Math. Debrecen, 12 (1965), p. 182-212.

(5) MOSTERD,P.S.-SHIELDS,A.L., *On the Structure of Semigroups on a Compact Manifold with Boundary*. Ann. of Math., 65 (1957), p. 117-143.

(6) TRILLAS,E., *Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos*. Stochastica, Vol. III, n°1 (1979), p. 47-60.

(7) ZADEH,L., *Fuzzy Sets*. Inf. and Control, 8 (1965), p. 338-353.