Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE PRODUCTOS TENSORIALES DE ANILLOS REGULARES

Pere Menal

Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Abstract.- Let K be a commutative field and R,S be K-algebras. In this talk we offer some results related with the following question : What can be said about R and S if we assume that $R \otimes_K S$ is a regular (Von Neumann) ring?. In particular we obtain that if $R \otimes_K S$ is a regular ring then either R or S is algebraic over K, thus answering a question of John Lawrence. Detailed proofs of some results given here will appear in Communications in Algebra (1981).

Supondremos que todos los anillos son asociativos y poseen unidad. Sea K un dominio de integridad y sean R y S K-álgebras (es decir, anillos con un homomorfismo de K en el centro del álgebra). Un elemento $r \in R$ diremos que el algebraico (trascendente) sobre K si el homomorfosmo de K-álgebras $K[t] \to R$, $K[t]$ es el anillo de polinomios, definido por $t \mapsto r$ no es inyectivo (inyectivo). Diremos que R es algebraico sobre K si cada elemento de R es algebraico sobre K. Nótese que si R posee elementos trascendentes sobre K entonces K es de hecho un subanillo de R.

Empezaré con un resultado de tipo técnico que será de utilidad en lo que sigue, debido a su sencillez voy a incluir una demostración.

Teorema 1. Sean R y S K-álgebras que contienen a K. Supongamos que $a \in S$ es trascendente sobre K. Si el elemento

$$x = 1 \otimes 1 + r_1 \otimes a + \ldots + r_n \otimes a^n \quad (r_i \in R)$$

de $R \otimes_K S$ es tal que $x(R \otimes_K S)$ contiene un elemento de la forma $1 \otimes p(a)$, donde $p(a)$ es un polinomio no nulo de $K[a]$, entonces

(a) existe un polinomio $q \in K[t_1,\ldots,t_n]$ tal que

$q(r_1,\ldots,r_n) \neq 0$ y $r_n\, q(r_1,\ldots,r_n) \in K$,

(b) si $r \in R$ y $r_i \in K[r]$ con $r_n \notin K$, entonces r es algebraico sobre K.

Demostración: (a) Evidentemente podemos suponer que $r_n \neq 0$. Denotemos mediante $K(a)$ el cuerpo de cocientes de $K[a]$. Ahora podemos formar el $R \otimes_K K[a]$-módulo (por la izquierda) $R \otimes_K (K(a) \otimes_{K[a]} S)$ de la manera obvia. Dado que $K(a) \otimes_{K[a]} S$ es $K(a)$-libre (y naturalmente $1 \otimes 1$ forma parte de una base) vemos que $R \otimes_K K(a)$ es un sumando directo de $R \otimes_K (K(a) \otimes_{K[a]} S)$ como $R \otimes_K K(a)$-módulo. Teniendo en cuenta la aplicación $R \otimes_K K[a]$-lineal: $R \otimes_K S \to R \otimes_K (K(a) \otimes_{K[a]} S)$ obtenemos fácilmente que $1 \otimes p(a) \in x(R \otimes_K (a))$. De ahí que en $R[a] \cong R \otimes_K [a]$ se obtiene una relación de la forma

$$c_o + c_1 a + \ldots + c_r a^r = (1 + r_1 a + \ldots + r_n a^n)(s_o + \ldots + s_m a^m)$$

donde $c_i \in K$, $r_i \in R$ y $s_m \neq 0$. Se sigue inmediatamente de esta relación que cada s_i pertenece a $K[r_1,\ldots,r_n]$, en particular $s_m = q(r_1,\ldots,r_n)$ y así $r_n q(r_1,\ldots,r_n) \in K$.

(b) Sigue inmediatamente del apartado (a).

Como consecuencia del Teorema 1 obtenemos una demostración extremadamente simple de un resultado de Lawrence [2, Theorem 4] para álgebras sobre cuerpos. La demostración de Lawrence se basa en teoría de extensión de valoraciones y "valuation modules".

Corolario 2. (Lawrence). Supongamos que R y S son trascendentes sobre K. Si $x \in R$, $y \in S$ son trascendentes sobre K, entonces el elemento

$$1 \otimes 1 + a_1(x \otimes y) + \ldots + a_n(x \otimes y)^n \qquad (a_i \in K)$$

tiene un inverso por la derecha en $R \otimes_K S$ si y solo si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Demostración: Sigue inmediatamente de Teorema 1(a).

Otro corolario de interés es el siguiente:

Corolario 3. Sean R, S K-álgebras de manera que como K-álgebras $K(t) \hookrightarrow S$. Supongamos que cada elemento que no es divisor de cero, por la derecha, en $R \otimes_K S$ posee un inverso por la derecha. Entonces R es algebraico sobre K.

Demostración: Podemos identificar $K(t)$ con el correspondiente subcuerpo de S. Ya que S es $K(t)$-libre por la derecha vemos que $R \otimes_K S$ es $R \otimes_K K(t)$-libre. Sea $r \in R$, entonces el elemento $1 \otimes 1 + r \otimes t$ es regular en $R \otimes_K K(t)$ y en consecuencia es regular por la izquierda en $R \otimes_K S$, por tanto posee un inverso por la derecha. Se sigue del Corolario 2 que r es algebraico sobre K.

Sea L un cuerpo y sea L^tG un álgebra de grupo (twisted) definida por un 2-cociclo $t: G \times G \to L\setminus\{0\}$. Tenemos

Corolario 4. Si L^tG es tal que L no es algebraico sobre el subcuerpo del cociclo (que es el subcuerpo generado por $t(G \times G)$) entonces K^tG es algebraico sobre K provisto que cada elemento de L^tG regular por la izquierda posea un inverso por la derecha.

Demostración: Se sigue del Corolario 3 y del hecho que $L^tG = L \otimes_K K^tG$.

Lema 5. Sea L un dominio de integridad que es además K-álgebra y sea M un L-módulo. Para cada elemento regular por la izquierda x de la L-álgebra $L \otimes_K S$, el anulador por la izquierda de x en el $L \otimes_K S$-módulo por la derecha $M \otimes_K S$ es un L-modulo de torsión (de hecho Tor_1^{2} $(M, (L \otimes_K S)/(L \otimes_K S)x))$.

Ahora podemos enunciar y probar el resultado más importante de esta comunicación:

Teorema 6. Si $R \otimes_K S$ es tal que para cada elemento x existe un entero positivo n tal que $x^n(R \otimes_K S)$ es el anulador por la derecha de un subconjunto finito de $R \otimes_K S$, entonces o bien R o bien S es algebraico sobre K.

Demostración: Procedemos por reducción al absurdo. Sean, pues, $r_o \in R$, $s_o \in S$ trascendentes sobre K. Consideremos el elemento $x_o = 1 \otimes 1 + r_o \otimes s_o$ en $R \otimes_K S$. Por hipótesis existe un entero positivo n tal que $x_o^n(R \otimes_K S)$ es el anulador por la derecha de un subconjunto finito, C, de $R \otimes_K S$. Consideremos el subanillo $L = K[r_o]$ de R. En el isomorfismo $L \otimes_K S \cong S[t]$ de L-álgebras, x_o se corresponde con $1 + s_o t$ y por tanto x_o^n es regular en $L \otimes_K S$, por el Lema 5 el anulador por la izquierda de x_o^n en $R \otimes_K S$ es un $K[r_o]$-modulo (por la derecha) de torsión que contiene a C. Dado que C es finito y $K[r_o]$ es un dominio de integridad, existe un polinomio no nulo $p(r_o)$ tal que $Cp(r_o) = 0$. Es decir, $1 \otimes p(r_o) \in x_o^n(R \otimes_K S)$ y a fortiori $1 \otimes p(r_o) \in \otimes_o(R \otimes_K S)$. Pero esta última relación contradice, teniendo en cuenta Teorema 1(b), el hecho que ambos r_o y s_o sean trascendentes sobre K.

Los anillos que aparecen en el Teorema 6 son anillos que satisfacen la siguiente propiedad $\mathcal{P}$:

"Para cada $x \in R$ existe un entero $n \geq 1$ tal que $x^n R$ es el anulador por la derecha de un subconjunto finito de R".

En la naturaleza existen muchos ejemplos de anillos que satisfacen la propiedad $\mathcal{P}$. Veamos algunos que son importantes;

1. Anillos regulares. Un anillo R se dice que es regular (en el sentido de Von Neumann) si cada R-módulo es plano o equivalentemente: para cada $a \in R$ existe $b \in R$ tal que $a = aba$. En esta situación es fácil ver que para cada $a \in R$ su anulador por la derecha es $(1-ba)R$. En particular los anillos regulares satisfacen la propiedad $\mathcal{P}$. Más generalmente, los anillos π-regulares (es decir anillos en los que para cada $a \in R$ existen $n \geq 1$ y $b \in R$ tales que $a^n = a^n b a^n$) son ejemplos de anillos que satisfacen la propiedad .

2. Anillos auto-inyectivos por la izquierda que son coherentes.

Es bien conocido que en un anillo auto-inyectivo por la izquierda todo ideal por la derecha finitamente generado es un anulador y, si suponemos que R es coherente por la izquierda, R satisface la propiedad $\mathcal{P}$.

3. IF-anillos. Un anillo R se dice que es un IF-anillo (por la derecha) si todo módulo (por la derecha) inyectivo es plano. Los IF-anillos aparecen de manera natural al considerar extensiones de K-álgebras regulares inducidas por extensiones algebraicas del cuerpo K.

El resultado siguiente es, por cuanto hemos dicho, una consecuencia del Teorema 6 y da una respuesta afirmativa a una pregunta de John Lawrence [1, Problem 43]:

Corolario 7. Si R y S son K-álgebras trascendentes entonces $R \otimes_K S$ no es un anillo regular.

Nótese que un anillo que satisface la propiedad $\mathcal{P}$ cumple que todo elemento es o bien un divisor de cero por la derecha o posee un inverso por la derecha. Sería interesente conocer la respuesta a la pregunta siguiente:

Pregunta I: Supongamos que R y S son K-álgebras tales que cada elemento de $R \otimes_K S$ es o bien un divisor de cero por la derecha o bien posee un inverso por la derecha. Se puede concluir que o bien R o bien S es algebraico sobre K?.

Observemos que en las hipótesis de la pregunta I podemos concluir, utilizando el corolario 3, que si R es trascendente sobre K entonces todo subcuerpo de S que contiene al cuerpo K es algebraico sobre K.

Una K-álgebra R se dice que es localmente finita si cada subconjunto finito de R se puede incluir en una subálgebra de R de dimensión finita. Es claro que si R es un anillo conmutativo y algebraico sobre K entonces R es una K-álgebra localmente finita, si este resultado sigue siendo válido para cuerpos no conmutativos constituye una pregunta abierta muy famosa. En relación con esto parece natural preguntar:

Pregunta II: Si $R \otimes_K S$ es un anillo regular es R o S una K-álgebra localmente finita?.

Finalmente voy a citar (sin prueba) un resultado que demuestra la restricción que supone el hecho que el producto tensorial de dos álgebras sea un anillo auto-inyectivo:

Teorema 8 [3, Theorem 2.2, Proposition 2.3]. Supongamos que $R \otimes_K S$ sea un anillo auto-inyectivo (por la izquierda) y que S

sea trascendente sobre K. Entonces R es algebraico sobre K y R/J(R) tiene índice de nilpotencia acotado; si además K es infinito entonces R/J(R) es artiniano (donde J(R) denota el radical de Jacobson de R).

Referencias

1. K.R. Goodearl, Von Neumann regular rings (Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1979).
2. J. Lawrence, Semilocal group rings and tensor products, Mich. Math. J. 22(1975), 309-313.
3. P. Menal, On tensor products of algebras being Von Neumann regular or self-injective, Comm.in Algebra (1981).