Pub. Mat. UAB
nº 11, març 1979

MESURES VECTORIALS I TEOREMA DE RADON-NIKODYM

Joan Cerdà

1.- Introducció

Sigui Σ una σ-àlgebra de parts d'un conjunt no buit X, $m : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ una mesura positiva finita, $E \varepsilon \Sigma$ arbitrari, $\Sigma^+ = \{E : m(E) > 0\}$, $\Sigma_E = \{E' \varepsilon \Sigma : E' \subset E\}$, $\Sigma_E^+ = \{E' \varepsilon \Sigma_E : m(E') > 0\}$ i F un espai de Banach real de dual topològic F'.

Des dels anys 30 se consideren mesures F-valorades, generalitzant les $\mathbb{R}$-valorades. Se relacionen amb qüestions com la teoria espectral de Hilbert, la representació integral d'operadors lineals entre diversos espais de Banach (com C(K), $L^1(m)$, etc.), la teoria de control de sistemes amb un nombre finit o infinit de graus de llibertat, etc.

Per això s'han seguit dos camins :

(a) El de les mesures conjuntistes

$$\vec{\mu} : \Sigma \longrightarrow F,$$

descrites p.e. a Dunford-Schwartz [10], Dinculeanu [8], Kluváneck-Knowles [17], etc.

(b) El de les mesures de Radon vectorials sobre un espai topològic localment compacte T

$$\mathcal{K}(T) \longrightarrow F,$$

considerades per Bourbaki [3], Grothendieck [14], Edwards [13], Thomas [30] i [31], etc.

Hi ha resultats de representació d'aquestes mesures com a mesures conjuntistes. Aquí mos limitarem a considerar el punt de vista (a), destacarem els fets al voltant dels que s'ha anat consolidant la teoria d'aquestes mesures vectorials, i mos fixarem especialment en el problema de la validesa del teorema de Radon-Nikodým (TRN).

2.- La definició i teorema d'Orlicz-Pettis

Cap al1935, Bochner introdueix la integració ("forta") respecte a m de funcions vectorials $\vec{f} : X \longrightarrow F$.

Se diu que $\vec{f}$ és mesurable si és límit q.p.t. d'una successió $\vec{s}_n$ de funcions simples. Se diu que és integrable si a més se té

$$\lim \int |\vec{f} - \vec{s}_n| \, dm = 0.$$

En aquest cas, definint primer la integral de les $\vec{s}_n$ i després

$$\int_E \vec{f} \, dm = \lim \int_E \vec{s}_n \, dm,$$

s'obté la integral de Bochner, amb propietats com la de la convergència dominada, teorema d'Egorof, completitud del corresponent espai $L^1_F(m)$, etc.

A cada $\vec{f} \in L^1_F(m)$ se li té associada una funció de conjunt

$$m_{\vec{f}} : E \dashrightarrow \int_E \vec{f} \, dm$$

que és mesura vectorial en el sentit de ser una funció

$$\vec{\mu} : \Sigma \longrightarrow F$$

σ-aditiva, i.e., tal que, per tota successió $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ de conjunts, se té, amb convergència de la norma de F :

$$\vec{\mu}(\bigcup E_n) = \Sigma \, \vec{\mu}(E_n),$$

convergència necessàriament incondicional degut a que una reordenació de $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ és del mateix tipus.

Segurament el primer resultat significatiu sobre mesures vectorials és el que assegura que en la definició basta suposar convergència incondicional dèbil, o, el que és equivalent, que és mesura numèrica cada

$$\vec{\mu}_u = u \circ \vec{\mu} \qquad (u \in F') :$$

Teorema 1 (Orlicz-Pettis).- A un espai de Banach, $\Sigma_{n=1}^{\infty} x_n$ és sumable si i només si és dèbilment incondicionalment convergent.

Es aquest un teorema no trivial que apareix per primera vegada en els artícles d'Orlicz sobre sèries ortogonals, en els anys 30, i del que Pettis [22] va donar la demostració completa. Ha estat objecte de variants i generalitzacions en treballs posteriors (veure McArtur [20], Robertson [28], Thomas [30] i [31]).

Naturalment el teorema 1 només té interés en el cas $\dim F = \infty$, cas essencialment diferent del $\dim F < \infty$, com se posa de manifest p.e. si se considera la variació $|\vec{\mu}|$ de la mesura $\vec{\mu}$

$$|\vec{\mu}|(E) = \sup \Sigma |\vec{\mu}(E_i)|$$

(suprem respecte a les particions finites $E = \cup E_i$, $E_i \varepsilon \Sigma$) i que és la més petita de les mesures ≥ 0 amb la propietat

$$|\vec{\mu}(E)| \leq |\vec{\mu}|(E).$$

Contràriament al cas numèric (o $\dim F < \infty$), $|\vec{\mu}|$ no té per què ser finita i, de fet, si $\dim F = \infty$, sempre hi ha mesures $\vec{\mu}$ amb

$$\|\vec{\mu}\| := |\vec{\mu}|(X) = \infty$$

com a conseqüencia del teorema de Dvoretzki-Rogers [11], segons el qual existeix $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$ dèbilment sumable no absolutament sumable.

Les mesures $m_{\vec{f}}$ són exemples de mesures de variació finita ($\|m_{\vec{f}}\| = \|\vec{f}\|_1^f$) i és fàcil construir exemples de mesures vectorials de variació finita que no són del tipus $m_{\vec{f}}$.

Així, si m és la mesura de Lebesgue sobre $[0,2\pi]$ i si

$$\vec{\mu}_o(E) = \left(\int_E \cos nt \, dm(t) \right)_{n=1}^{\infty},$$

el lema de Riemann-Lebesgue assegura que se té

$$\vec{\mu}_o : \Sigma \longrightarrow c_o,$$

i se tracta d'una mesura vectorial tal que $|\vec{\mu}_o| \leq m$.

En canvi $\vec{\mu}_o$ no coincideix amb una mesura del tipus $m_{\vec{f}}$ per cap $\vec{f} = (f_n)_{n=1}^{\infty}: [0,1] \longrightarrow c_o$ integrable, ja que això implicaria

$$\int_E f_n \, dm = \int_E \cos nt \, dm(t) \qquad (n \in \mathbb{N}, \; E \in \Sigma),$$

és a dir

$$(f_n(t))_{n=1}^{\infty} = (\cos nt)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{q.p.t.}$$

Això és impossible, perquè $\cos nt \not\to 0$, qualsevol que sigui t.

3.- Imatge d'una mesura, teorema de Bartle-Dunford-Schwartz

Un segon punt fonamental dins el desenvolupament de les mesures vectorials és el de la determinació de les seves imatges $\vec{\mu}(\Sigma)$.

Així, si $\dim F < \infty$, el teorema de convexitat de Liapounov assegura que la imatge d'una mesura F-valorada no atòmica és un compacte convex de F, i això dóna lloc a importants aplicacions a la teoria de control òptim (com és el principi de bang-bang). El mateix Liapounov va observar que el resultat no se conserva en el cas $\dim F = \infty$.

Per això s'ha de considerar com a bàsic el següent

Teorema 2 (Bartle-Dunford-Schwartz [2]).- La imatge $\vec{\mu}(\Sigma)$ d'una mesura vectorial és dèbilment relativament compacte.

Resulta així :

(a) $\vec{\mu}$ és de imatge acotada i $(\vec{\mu}_u)_{u \in B^o}$ (B^o bola unitat de F') és dèbilment relativament compacte dins l'espai de Banach $ca(\Sigma)$ de les mesures numèriques amb la norma $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

En realitat el teorema resulta d'aquesta propietat, ja que, demostrat (a), l'operador

$$T : u \in F' \dashrightarrow \vec{\mu}_u \in ca(\Sigma)$$

és dèbilment compacte, el seu trasposat T' també i la imatge per T' de la bola unitat de $ca'(\Sigma)$ conté a $\vec{\mu}(\Sigma)$.

(b) Respecte a la continuïtat se té que, donada m,

$$\lim_{m(E) \to 0} \vec{\mu}(E) = 0$$

implica $\vec{\mu} \ll m$ (o sigui, $\vec{\mu}(E) = 0$ si $m(E) = 0$). Si $\vec{\mu}$ és de variació finita se compleix el recíproc.

Donada $\vec{\mu}$ sempre se pot obtenir m (≥ 0 finita) amb els mateixos conjunts de mesura nulla que $\vec{\mu}$. Així se té $L^{\infty}(\vec{\mu}) = L^{\infty}(m)$ i, en general, se pot considerar

$$L^{\infty}(\vec{\mu},E) = L^{\infty}(m,E)$$

format per les $\vec{f} \in L^{\infty}(m)$ nulles fora de E.

(c) Knowles va descriure les mesures vectorials $\vec{\mu}$ que són de Liapounov en el sentit de que tots els $\vec{\mu}(\Sigma_E)$ siguin dèbilment compactes i convexos. Va observar que basta interpretar la condició de no atomicitat que apareix en el teorema de Liapounov com la no injectivitat de les

$$\vec{\mu}_E : f \in L^{\infty}(\vec{\mu},E) \dashrightarrow \int_E f \, d\vec{\mu} \in F \quad (E \in \Sigma^{+}).$$

El llibre de Kluvéneck-Knowles [17] és una bona referència per aquest problema de la descripció de les imatges de mesures i aplicacions a la teoria de control per a sistemes governats per equacions en derivades parcials.

4.- Teoremes de Radon-Nikodým i de Dunford-Pettis

El TRN tracta de determinar quan una mesura $\vec{\mu}$ és una $m_{\vec{f}}$ per qualque $\vec{f} \in L^1_F(m)$, de la que se diu que és la derivada de Radon-Nikodym

$$\vec{f} = \frac{d\vec{\mu}}{dm}$$

de $\vec{\mu}$ respecte de m, de manera que està relacionat amb la descripció dels operadors "integrals"

$$g \dashrightarrow \int g\vec{f}\,dm .$$

Com en el cas numèric, s'obtenen fàcilment condicions que necessàriament ha de cumplir $\vec{\mu}$ per que sigui una $m_{\vec{f}}$ i se té que la mesura ha de ser de variació finita i absolutament contínua ($\vec{\mu} \ll m$).

Però l'exemple $\vec{\mu}_0 : \Sigma \longrightarrow c_0$ del No 2 mostra que, a diferència del cas numèric, aquestes dues propietats no són suficients.

En l'estudi d'aquest problema se tenen diferents punts de vista :

(a) En <u>anàlisi funcional</u> interessarà en relació amb descripcions d'operadors F-valorats definits sobre espais de funcions contínues (veure [2] i [14]) o sobre un espai $L^1(m)$, com és el cas, p.e., del <u>teorema de Phillips</u> que assegura que tota aplicació lineal contínua dèbilment compacta

$$T : L^1(m) \longrightarrow F$$

és del tipus

$$Tg = \int g\vec{h}\,dm \qquad (\vec{h} \in L_F^{\infty}(m)).$$

Més endavant tornarem a considerar les relacions d'aquestes descripcions d'operadors amb el TRN per a mesures vectorials i del que la primera versió és

<u>Teorema 3 (Dunford-Pettis [9]).</u>- Tota mesura

$$\vec{\mu} : \Sigma \longrightarrow F', \text{ F' separable,}$$

que cumpleixi $|\vec{\mu}(E)| \leq k\, m(E)$ se representa

$$\vec{\mu} = m_{\vec{f}} \qquad (\vec{f} \in L^1_{F'}(m)).$$

(b) En <u>geometria</u> d'espais de Banach s'intenta determinar espais i mesures que admeten un teorema semblant al de Dunford-Pettis a partir de propietats geomètriques dels valors de la mesura, semblants a la de compacitat relativa de conjunts com els de mitjanes

$$A(E) = \left\{ \frac{\vec{\mu}(E')}{m(E')} : E' \varepsilon \Sigma_E^+ \right\}$$

considerades ja per Phillips [25].

De fet se trobe fàcilment una nova condició que ha de cumplir $\vec{\mu}$ si és igual a una $m_{\vec{f}}$:

"Donat $\varepsilon > 0$, $A(E_\varepsilon)$ és relativament compacte per qualque E_ε amb $m(E - E_\varepsilon) < \varepsilon$". S'entén $E_\varepsilon \subset E$.

Se comprova considerant

$$A(E_\varepsilon) = \left\{ T\left(\frac{1_{E'}}{m(E')}\right) : E' \varepsilon \Sigma_{E_\varepsilon}^+ \right\} \subset T(\text{bolla unitat de } L^1(m))$$

on

$$Tg := \int_{E_\varepsilon} g \, d\vec{\mu} = \int_{E_\varepsilon} g \vec{f} \, dm$$

que, per $m(E - E_\varepsilon) < \varepsilon$ adequat (el que proporciona el teorema d'Egorof, segons el qual hi ha $\vec{s}_n \longrightarrow \vec{f}$ en $L_F^1(m)$ i la convergència és uniforme sobre E_ε, amb $\vec{s}_n$ simples), és operador compacte per ser límit d'operadors de rang finit

$$T_n g := \int_{E_\varepsilon} g \vec{s}_n \, dm.$$

Rieffel [26] considera una propietat interessant en relació amb el TRN que té $A(E_\varepsilon)$ per ser (dèbilment) relativament compacte : ha de ser dentable.

Se diu que $A \subset F$ és <u>dentable</u> si per tot $\varepsilon > 0$ se pot determinar $x \varepsilon A$ tal que $x \notin \overline{co}(A - B(x,\varepsilon))$, amb $B(x,\varepsilon)$ bola de centre x i radi ε i on " $\overline{co}$ " vol dir "envoltura convexa tancada". Si se té un mateix $x \varepsilon A$ per tot $\varepsilon > 0$, se diu que x és un <u>punt de dent</u> ("denting point") de A.

<u>Teorema 4 (Rieffel).</u>- Si $\vec{\mu}$ és de variació finita i $\vec{\mu} \ll m$, són equivalents :

(1) $\vec{\mu} = m_{\vec{f}}$ per una $\vec{f} \varepsilon L^1_F(m)$.

(2) Per tot $\varepsilon > 0$, se potprendre $m(X - X_\varepsilon) < \varepsilon$ amb $A(X_\varepsilon)$ (dèbilment) relativament compacte.

(3) Per tot $E \varepsilon \Sigma^+$, existeix $E' \varepsilon \Sigma^+_E$ amb $A(E')$ (dèbilment) relativament compacte.

(4) Per tot $E \varepsilon \Sigma^+$, existeix $E' \varepsilon \Sigma^+_E$ amb $A(E')$ dentable.

(5) Donats $\varepsilon > 0$ i $E \varepsilon \Sigma^+$, existeix $E' \varepsilon \Sigma^+_E$ amb diam $A(E') \leq \varepsilon$.

La construcció de $\vec{f}$ en la implicació (5) $\Rightarrow$ (1) s'aconsegueix considerant particions cada vegada més fines

$$\pi_i = \{E_{i1}, \dots, E_{ik_i}\}$$

de subconjunts de X formades per conjunts amb diam $A(E_{ij})$ petits que assegurin la convergència de les

$$\vec{s}_i = \Sigma_j \, [\vec{\mu}(E_{ij})/m(E_{ij})] \cdot 1_{E_{ij}}$$

dins $L^1_F(m)$, i el límit és $\vec{f}$.

(c) En <u>probabilitats</u> la tècnica anterior és la de les martingales.

Si Σ_n és la σ - àlgebra engendrada per una partició

$$\pi_n = \{E_{n1}, \dots, E_{nk_n}\}$$

i aquestes particions són cada vegada més fines, $(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ és base de martingales (successió creixent de sub-σ-àlgebres de Σ) i, donada $\vec{\mu}$, les corresponents $\vec{s}_n$ que hem associat a les π_n són tals que $(\Sigma_n, \vec{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ és <u>martingala</u> (les $\vec{s}_n$ són Σ_n-mesurables i tals que

$$\int_E \vec{s}_n \, dm = \int_E \vec{s}_m \, dm$$

si $n \leq m$ i $E \varepsilon \Sigma_n$).

Suposant, per simplificar, que Σ és la σ - àlgebra engendrada per la reunió de les Σ_n, en el cas $\vec{\mu} = m_{\vec{f}}$ s'obté fàcilment que

$$\|\vec{s}_n - \vec{f}\|_1 \longrightarrow 0$$

(si la funció $\vec{f}$ és simple se té eventualment $\vec{s}_n = \vec{f}$ i, en cas contrari, s'aproxima per funcions simples).

No és d'extanyar , per tant, que, al mateix temps que Rieffel, Métivier [21] demostràs la implicació (2) $\Rightarrow$ (1) del teorema 4 a partir de resultats de convergència de martingales vectorials.

5.- La propietat de Radon-Nikodým

El teorema de Rieffel porta a considerar la classe d'espais F amb la propietat de Radon-Nikodým (PRN), i.e., amb la propietat de que tota mesura $\vec{\mu}$ F-valorada de variació finita que compleix $\vec{\mu} \ll m$ respecte a una m (≥ 0 finita) és $\vec{\mu} = m_{\vec{f}}$.

Degut a que $\vec{\mu} \ll m$ equival a $|\vec{\mu}| \ll m$, la PRN equival a que tota $\vec{\mu}$ de variació finita tengui derivada de Radon-Nikodým respecte de la seva variació $|\vec{\mu}|$: en aquest cas existeix $d|\vec{\mu}|/_{dm}$, ja que se tracta de mesures numèriques, i

$$\frac{d\vec{\mu}}{dm} = \frac{d\vec{\mu}}{d|\vec{\mu}|} \cdot \frac{d|\vec{\mu}|}{d\,m} .$$

Ja hem vist com c_o no té la PRN : la mesura c_o-valorada $\vec{\mu}_o$ era de variació finita, complia $\vec{\mu}_o \ll m$ i, en canvi,

$$\vec{\mu}_o \neq m_{\vec{f}} \quad \text{si } \vec{f} \in L^1_{c_o}(m).$$

Tampoc té la PRN l'espai $L^1[0,1]$. En efecte, la mesura

$$\vec{\mu}_1 : E \in \Sigma \dashrightarrow 1_E \in L^1[0,1]$$

és de variació finita, $\vec{\mu}_1 \ll m$ si m és la mesura de Lebesgue (se té $\|\vec{\mu}_1(E)\|_1 = m(E)$) i, en canvi, qualsevol que sigui $E \in \Sigma^+$, A(E) no pot ser mai relativament compacte, degut a que se pot descomposar E en una partició numerable $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjunts $E_n \in \Sigma^+$ i

$$\left\| \frac{1_{E_n}}{m(E_n)} - \frac{1_{E_k}}{m(E_k)} \right\|_1 = 2 \quad \text{si } n \neq k.$$

A partir d'aquests exemples s'en poden construir molts d'altres perquè també té la PRN tot subespai tancat d'un F amb la PRN. Així, si F conté una còpia isomètrica de c_o, F no té la PRN.

Els quocients d'espais de Banach amb la PRN no tendran, en general, aquesta propietat. Recentment, Edgar [12] ha demostrat que si H és subespai tancat de F, per que F tengui la PRN, és suficient que la tenguin H i F/H.

Els últims anys s'ha treballat en la determinació de condicions necessàries i condicions suficients per la PRN, i en estudiar la seva relació amb propietats geomètriques, topològiques i de la teoria de la mesura i probabilitats.

6.- Propietats geomètriques i PRN

El teorema de Rieffel dóna lloc a una caracterització geomètrica dels F amb la PRN :

Teorema 5 (Maynard-Huff).- F té la PRN si i només si és dentable (i.e., tot acotat és dentable o, el que és equivalent, és dentable la bolla unitat de tota norma compatible).

Que la dentabilitat és suficient per la PRN, resulta del teorema de Rieffel, ja que, per $m = |\vec{\mu}|$, se té que és acotat tot

$$A(E) = \left\{ \frac{\vec{\mu}(E')}{|\vec{\mu}|(E')} \ : \ E' \varepsilon \Sigma_E^+ \right\} \qquad (E \varepsilon \Sigma^+)$$

(és $|\vec{\mu}(E')| \leq |\vec{\mu}|(E')$).

El recíproc el va demostrar Huff [15] suposant, per reducció a l'absurd, que F no és dentable i té la PRN, per construir, seguint un mètode de Maynard [19], una mesura F-valorada sobre [0,1] que cumpleix

$$|\vec{\mu}(E)| \leq m(E)$$

respecte a la mesura de Lebesgue m sobre [0,1] i que no pot tenir derivada de Radon-Nikodým degut a que no se compleix la propietat (5) del teorema de Rieffel.

Aquesta és la demostració que recull Diestel [6]. Un altre mètode és el de Davis i Phelps [5].

Del teorema de Maynard-Huff resulten moltes conseqüències. Així, degut a que un conjunt és dentable si ho són els seus subconjunts numerables (Maynard), se té l'equivalència de

(1) F té la PRN.

(2) Tot subespai tancat separable de F té la PRN.

Una altra descripció geomètrica dels espais amb la PRN és :

<u>Teorema 6 (Phelps).</u>- Per F són equivalents :

(1) F té la PRN.

(2) Tot tancat acotat no buit té punts de dent.

(3) Tot tancat acotat no buit té punts fortament exposats ($x \in A$ se diu fortament exposat si existeix $u \in F'$ tal que $u(x) = \max u(A)$, i $\lim x_n = x$ si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ compleix $\lim u(x_n) = u(x)$).

(4) Tot convex tancat i acotat és l'envoltura convexa tancada dels seus punts fortament exposats.

D'aquest teorema resulta, en particular, que tot F amb la PRN té la <u>propietat de Krein-Milman</u> (PKM) : tot tancat acotat i convex no buit té punts extremals (o bé, és l'envoltura convexa tancada dels seus punts extremals), ja que tot punt fortament exposat és extremal.

Huff i Morris [16] han caracteritzat els F amb la PRN com els que tenen la PKM forta : tot tancat acotat no buit té punts extremals.

PROBLEMA : PKM $\Rightarrow$ PRN ?

Stegall [29] va demostrar que la resposta és afirmativa pels F'.

7.- Propietats topològiques i PRN

Com ja hem indicat, baix el punt de vista de l'anàlisi funcional, l'interes dels espais F amb la PRN se posa de manifest amb la possibilitat de representar les aplicacions lineals contínues

$$T : L^1(m) \longrightarrow F$$

en forma integral.

En efecte, definint

$$\vec{\mu}(E) = T(1_E),$$

de $|T(1_E)| \leq \|T\| m(E)$ resulta $\vec{\mu} \ll m$ i de variació finita. Si F té la PRN, se podrà escriure

$$\vec{\mu}(E) = \int_E \vec{f}\, dm,$$

per certa $\vec{f} \in L^1_F(m)$ de la que és fàcil veure que és essencialment acotada. Per tant

$$T(s) = \int s\vec{f}\, dm,$$

si s és simple. Per continuïtat

$$T(g) = \int g\vec{f}\, dm.$$

En particular, això serà cert pels duals separables, ja que el teorema de Dunford-Pettis (teorema 3) se pot enunciar :

Teorema 7.- Tot F′ separable té la PRN.

Resulta del teorema de Rieffel : si $A \subset F'$ és acotat i $\varepsilon > 0$, se comprova que existeix $x \in A$ tal que $x \notin \overline{co}(A - B(x,\varepsilon))$ inclús considerant $\sigma(F',F)$-adherències. Per tant F′és dentable.

Igualment resulta :

Teorema 8.- Tot F reflexiu té la PRN.

Sens dubte, aquests són els resultats positius més importants sobre espais amb la PRN. Del de Dunford-Pettis se dedueix :

(a) Si tot subespai separable de F té dual separable, F′ té la PRN. (Uhl [32]).

El recíproc és cert (Stegall[29]).

Els teoremes 7 i 8 admeten una millora :

(b) Si tot subespai separable de F s′injecta dins un dual separable, F té la PRN.

PROBLEMA : És cert el recíproc ?

De (a) se pot deduir un resultat de Kuo :

(c) Si F′ és subespai d′un espai de Banach dèbilment compactament generat (i.e., conté una part dèbilment compacta total), F′ té la PRN.

PROBLEMA : És cert el recíproc ?

En el cap. 5 de Diestel [6] se té una bona descripció dels espais dèbilment compactament generats. Estan relacionats amb la classe d′espais amb norma que és diferenciable Fréchet. Per aquests espais se té (veure Diestel [6]) :

(d) Si F té norma diferenciable Fréchet, F′té la PRN (de fet és suficient que F sigui "molt llis").

Serien interessants els possibles recíprocs.

El 1968, Asplund [1] va introduir els F tals que tota funció contínua convexa sobre un obert convex és diferenciable Fréchet sobre un G_δ dens de l′obert i va provar que, en aquest cas, F′ té la PRN. Recentment Stegall ha demostrat el recíproc :

(e) F és d′Asplund si i només si F′ té la PRN.

Considerant $c_o(I)$ amb card(I) > card($\mathbb{N}$), Lindestrauss [18] va provar que el ser F d′Asplund no implica que F′ sigui dèbilment compactament generat, però la implicació inversa és certa (veure (c)).

8.- Teoria de la mesura i PRN

Com hem vist, el TRN se pot estudiar a partir de propietats de convergència de martingales. Aquest és el mètode seguit per Métivier [21] i Chatterji [4] i que permet donar una altra caracterització de la PRN :

Teorema 9 (Chatterji).- Per F són equivalents :

(1) F té la PRN.

(2) Tota martingala $(\Sigma_i, \vec{x}_i)_{i\in I}$ sobre (X,Σ,m) amb valors dins F i uniformement acotada ($|\vec{x}_i(t)| \leq K$) és convergent dins $L^1_F(m)$.

(3) Idem per martingales del tipus $(\Sigma_n, \vec{x}_n)_{n\in \mathbb{N}}$.

Un altre aspecte interessant de la teoria de la mesura relacionat amb la PRN és el de la mesurabilitat de conjunts de l'espai F. Així, Edgar [12] ha demostrat :

Teorema 10 (Edgar).- F′ té la PRN si i només si els conjunts dèbilment universalment mesurables de F′ coincideixen amb els universalment mesurables per la topologia de la norma.

En un espai de Banach F, com demostra Edgar, els conjunts universalment mesurables i els $\sigma(F,F')$-universalment mesurables són els mateixos. Però :

PROBLEMA : ¿ Existeix qualque F tal que els borelians de $(F, \|\ \|)$ siguin diferents dels de $(F, \sigma(F,F'))$?

En el cas d'un dual F′ hi ha coincidència de borelians per $(F', \|\ \|)$ i $(F', \sigma(F',F))$.

9.- Apèndix

Una extensió útil de la teoria de les mesures vectorials i de les propietats i qüestions que hem considerat aquí és l'estudi de mesures amb valors dins espais localment convexes. Així una bona part de lo que hem dit s'aplica al cas en que F és espai de Fréchet i actualment hi ha una intensa activitat dins aquesta línia.

Aquest estudi no se redueix simplement a una generalització pel gust de generalitzar. Una bona mostra la tenim, p.e., en el llibre de Kluváneck i Knowles [17], on queda de manifest que el tractament funcional de problemes concrets de la teoria de control no és viable sense sortir del marc dels espais de Banach.

Però la consideració d'aquesta generalització mos duria massa enfora.

<u>Referències</u>

[1] Asplund, E.- "Fréchet differentiability of convex functions" Acta Math., 121 (1968) 31-48.

[2] Bartle, R.G.-Dunford, N.-Schwartz, J.- "Weak compactness and vector measures" Canad. J. Math., 7 (1955) 289-305.

[3] Bourbaki, N.- "Intégration" Chap. 6, Hermann, 1959.

[4] Chatterji, S.D.- "Martingale convergence and the Radon-Nikodým theorem in Banach spaces" Math. Scand., 22 (1968) 21-48.

[5] Davis, W.J.-Phelps, R.R.- "The Radon-Nikodým property and dentable sets in Banach spaces" Proc.AMS, 45 (1974) 119-122.

[6] Diestel, J. "Geometry of Banach Spaces - Selected Topics" Lecture Notes in Math. No 485, Springer 1975.

[7] Diestel, J.- Uhl, J.J.(Jr.).- "Vector Measures". Será publicat per American Mathematical Society.

[8] Dinculeanu, N.- "Vector Measures" Pergamon Press, 1967.

[9] Dunford, N.- Pettis, B.J.- "Linear transformations on summable functions" Trans. AMS, 47 (1940) 323-392.

[10] Dunford, N.-Schwartz, J.T.- "Linear Operators, I" Interscience, 1957.

[11] Dvoretzki, A.-Rogers, C.A.- "Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces" Proc. Nat. Acad.

Sci. U.S.A., 36 (1950) 192-197.

[12] Edgar, G.A.- "Measurability in a Banach Space" Indiana Univ. Math. J., 26 (1977) 663-677.

[13] Edwards, R.E.- "Functional Analysis, Theory and Applications" Holt, Rinehart and Winston, 1965.

[14] Grothendieck, A.- "Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)" Canad.J.Math., 5 (1953) 129-173.

[15] Huff, R.E. "Dentability and the Radon-Nikodým property" Duke Math. J., 41 (1974) 11-114.

[16] Huff, R.E.-Morris, P.D. "Geometric characterisation of the Radon-Nikodým property in Banach spaces" Studia Math., 56 (1976) 157-164.

[17] Kluvánek, I.-Knowles, G.- "Vector measures and control systems" North-Holland, 1976.

[18] Lindestrauss, J.-"Weakly compact sets, their topological properties and the Banach spaces they generate" Ann. Math. Studies, 69 (1972) 235-273.

[19] Maynard, H.-"A geometric characterisation of Banach spaces possessing the Radon-Nikodým theorem" Trans. AMS, 185 (1973) 493-500.

[20] McArtur, C.W.-"On a theorem of Orlicz and Pettis" Pacific J. Math., 22 (1967) 297-302.

[21] Métivier, M.-"Martingales à valeurs vectorelles; applications à la dérivation des mesures vectorielles" Ann. Inst. Fourier, 17 (1967) 175-208.

[22] Pettis, B.J.- "On integration in vector spaces" Trans. AMS, 44 (1938)277-304.

[23] Phelps, R.R.- "Dentability and extreme points in Banach spaces" J. Funct. Anal., 17 (1974) 78-90.

[24] Phillips, R.S.- "On linear transformations"" Trans. AMS, 48 (1940) 516-541.

[25] Phillips, R.S.- "On weakly compact subsets of a Banach space" Amer. J. Math., 65 (1943) 108-136.

[26] Rieffel, M.A.- "Dentable subsets of Banach spaces, with application to a Radon-Nikodým theorem", a <u>Functional Analysis</u>, Thompson, 1967.

[27] Rieffel, M.A.- "The Radon-Nikodým theorem for the Bochner integral" Trans. AMS, 131 (1968) 466-487.

[28] Robertson, A.P. "On unconditional convergence in topological vector spaces" Proc. Roy. Soc. Edimburg, Sec. A, 68 (II), (1969) 145-157.

[29] Stegall, C. "The Radon-Nikodým property in conjugate Banach spaces" Trans. AMS, 206 (1975) 213-223.

[30] Thomas, E.- "L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle" Ann. Inst. Fourier, 20 (1970) 55-191.

[31] Thomas, E.- "The Lebesgue-Nikodým Theorem for Vector Valued Radon Measures" Memoirs of the AMS, No 139, 1974.

[32] Uhl, J.J. (Jr.).- "A note on the Radon-Nikodým property for Banach spaces" Revue Roum. Math., 17 (1972) 113-115.