SINGULARIDADES EN EL PROBLEMA DE N-CUERPOS

*Ernesto Lacomba Zamora**

1. INTRODUCCION

Los movimientos de n partículas con masa, sujetas a sus atracciones gravitacionales mutuas son las soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{x}_i = \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}, \quad x_i \in \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2 \text{ ó } \mathbb{R}^3 \qquad (1)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Nos interesa precisamente la cuestión de existencia global de soluciones para todo $t \in \mathbb{R}$.

El problema aparece cuando dos o más partículas se aproximan a colisión, y la fuerza entre ellas se va a infinito (una *singularidad* de las ecuaciones).

Es un problema abierto para $n > 3$, el saber si toda singularidad corresponde a colisión de algunas de ellas. En principio, podría ocurrir que el sistema se hiciera no acotado en tiempo finito, con oscilación de las partículas intercambiándose la distancia mínima, sin que ocurra colisión. Mather y McGehee construyeron una tal solución para 4 cuerpos en $\mathbb{R}^1$ pero que sin embargo contiene una

---

* Profesor e investigador de Carrera de la U.A.M.

una infinidad de colisiones dobles.

Las colisiones mismas de más de 2 partículas tienen un comportamiento complicado (Siegel, McGehee), ocurriendo ciertas inestabilidades para órbitas cercanas a colisión.

En contraste, las colisiones dobles son equivalentes a un rebote elástico, con continuidad en condiciones iniciales para órbitas cercanas.

Finalmente, si $n<4$ un teorema global de existencia (Saari), nos dice que para casi todas las condiciones iniciales (en sentido topológico y métrico), las soluciones están definidas en todo $\mathbb{R}$. Para $n > 4$ faltaría estimar las singularidades que no son colisiones.

2. SINGULARIDADES DE LAS SOLUCIONES.

Las ecuaciones (1) del problema de n-cuerpos pueden escribirse también en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i \\ m_i \dot{y}_i &= \frac{\partial V}{\partial x_i}(x), \end{aligned} \qquad (2)$$

donde $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n) \in (\mathbb{R}^k)^n$ son las posiciones y velocidades del sistema, $k=1,2,3$, fijo, y el potencial está definido como

$$V(x)=\sum_{i<j}\frac{m_i\, m_j}{|x_j-x_i|}.$$

La energía total del sistema y su momento angular se definen respectivamente, como

$$E\ (x,y)=\frac{1}{2}\sum_i m_i|y_i|^2 - V\ (x) \tag{3}$$
$$y \quad J\ (x,y)=\sum_i m_i x_i \times y_i,$$

siendo primeras integrales de (2), es decir, se conservan constantes a lo largo de sus soluciones. El primer término en (3) se llama la energía cinética T (y) del sistema.

Claramente, las ecuaciones diferenciales dejan de estar definidas exactamente en el conjunto

$$\Delta=\bigcup_{i\neq j}\{(x_1,\ldots,x_n)\in(\mathbb{R}^k)^n\ |x_i=x_j\},$$

correspondiente a que al menos dos partículas ocupen la misma posición. Es claro que V es una función analítica en el complemento de Δ.

El espacio fase (posiciones y velocidades) será $\Delta^c\times(\mathbb{R}^k)^n$, donde Δ^c es el complemento de Δ en $(\mathbb{R}^k)^n$. Dado $(xo,yo)\in\Delta^c\times(\mathbb{R}^k)^n$, existe solución analítica de (2) con tales condiciones iniciales, que está definida en intervalo máximo $[0,t^*)$. Si $t^*<\infty$, decimos que la solución experimenta una *singularidad* en t^*. Análogamente se puede definir singularidad para la máxima extensión de la solución con $t<0$, aunque aquí no nos ocuparemos de ésta, sin pérdida de generalidad. Sea $r(t)=\min_{i\neq j}|x_j(t)-x_i(t)|$.

El que una solución tenga singularidad en t^* es claramente equivalente a que $\liminf_{t \to t^*} r(t)=0$, o en una forma más refinada a que (Painlevé [8;15 pags. 19-27]):

$$\lim_{t \to t^*} r(t)=0 , \qquad (4)$$

O sea que $x(t)$ se aproxima a Δ cuando $t \to t^*$, en el sentido de que su distancia a Δ tiende a cero. En términos de la energía potencial, esto puede expresarse también [15] diciendo que $V(x(t)) \to \infty$ si $t \to t^*$.

Estrictamente hablando, la aparición de una singularidad debería bastar para que podamos decir que la solución no puede definirse globalmente para todo $t \in \mathbb{R}$. Sin embargo, la posibilidad de regularización en el caso de colisión de 2 partículas o para soluciones homotéticas, hace que se siga otro punto de vista: la solución puede considerarse prolongada más allá de t^* por medio de la regularización.

Esto ha conducido a un estudio detallado de las propiedades de las singularidades en el sentido de que puedan o no regularizarse.

3. SINGULARIDADES Y COLISIONES.

Las singularidades más fáciles de estudiar son las *colisiones* de al menos dos partículas, caracterizándose por la propiedad de que todas las partículas tienden a una posición límite: $x(t) \to x^* \in \Delta$, -- $t \to t^*$. Si $n \leq 3$, toda singularidad es una colisión (Painlevé [8]). Para el problema colineal de n cuerpos en general, toda singularidad se debe también a colisión [10], debido a la restricción tan fuerte de que todas las partículas permanezcan alineadas.

El problema de existencia de singularidades que no sean colisiones está todavía abierto para $n > 3$ en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, Painlevé - [8], Von Zeipel [20] y Sperling [16] probaron que debe tenerse - $|x(t)| \to \infty$, $t \to t^*$ para una tal singularidad, lo cual implica que -- $x(t)$ se aproxima a Δ pero no puede tener punto de acumulación allí, en la descripción de arriba. Así, el problema de encontrar una singularidad que no sea colisión es equivalente al de existencia de -- una solución no acotada en tiempo finito, con oscilación de las partículas intercambiandose la distancia mínima para que no ocurra colisión de las partículas involucradas, lo cual hace imposible continuar la solución.

Después ilustraremos este tipo de movimiento con un ejemplo, que -- sin embargo contiene un conjunto numerable de colisiones regularizables que se acumulan en el instante t^*.

De acuerdo con la caracterización anterior, las únicas singularidades que quedarían en posibilidad de regularizarse son las colisiones, pues sólo allí todas las partículas tienden a posiciones definidas.

Desgraciadamente, sólo las colisiones que involucran a 2 partícu-las; o que en algún sentido se pueden ver así, podrán regularizarse. Para colisiones de 3 o más partículas aparecen ciertas inestabilidades de las órbitas cercanas a colisión que recientemente se han comenzado a comprender mejor.

La regularización de colisiones se entiende actualmente en dos sentidos:

1º REGULARIZACION ANALITICA.

Sundman [18] y Siegel [14] consideran que una solución puede extenderse a través de una singularidad, si una cierta serie que la representa tiene continuación analítica adecuada. Para ellos, las soluciones están desarrolladas en series de potencias como funciones del tiempo.

2º REGULARIZACION GLOBAL CON DEPENDENCIA CONTINUA

Levi-Civita [5], Birkhoff [1] y Easton [2,3] consideran órbitas cercanas a la singular y se preguntan si ésta puede extenderse de manera que su extensión sea continua respecto a condiciones iniciales.

En las siguientes tres secciones ilustraremos con ejemplos las distintas formas de regularización.

4. REGULARIZACION ANALITICA DE COLISIONES.

Para ver la diferencia entre los distintos tipos de colisiones por la primera forma de regularizar, describimos lo que ocurre para - $n=3$ cuerpos en $\mathbb{R}^3$ [15,19] :

Sundman probó que para cualquier número n de cuerpos en $\mathbb{R}^3$, la colisión total (de todas las partículas) implica J=0. Luego se restringió a n=3 cuerpos, con J=0 para que no haya colisiones triples. Entonces la evolución completa de todas las soluciones puede representarse en términos de funciones analíticas, incluyendo el paso - por colisiones dobles que regularizó de manera apropiada como sigue:

Si ocurre una colisión de las partículas i,j en el instante t*, entonces las componentes de $x_i - x_j$, y la t-t* pueden desarrollarse - como funciones analíticas de una uniformizante local s-s*. La serie de t-t* comienza en términos de tercer grado, así que s-s* se desarrolla en potencias de $(t-t^*)^{1/3}$ al invertir. Las series para las componentes de $x_i(t)-x_j(t)$ comienzan en $(t-t^*)^{2/3}$, y la solución puede extenderse clásicamente al estar definidas también para $t>t^*$, lo cual corresponde a un rebote elástico.

Siegel [14] posteriormente dió una descripción analítica completa de las órbitas que van a colisión triple en este mismo problema. - Probó además que el conjunto de órbitas que terminan en colisión - triple es una variedad diferenciable del espacio fase, y que la -

mayoría de las soluciones no pueden extenderse analíticamente a través de la colisión, por contener potencias irracionales de $t-t^*$ en su expansión, [15].

5. REGULARIZACION GLOBAL DE LEVI-CIVITA.

La idea original de Levi-Civita, fué efectuar para energía constante un cambio de variables en el espacio fase, y otro en el tiempo para hacer más lentas las órbitas que van a colisión, obteniendo ecuaciones ya sin singularidades en la superficie de energía transformada.

Ilustraremos su método para el problema de fuerza central en el plano (todo movimiento del problema de n=2 cuerpos en R^3 es equivalente mediante un cambio de coordenadas a uno de fuerza central en un plano, ver [9]), en las superficies de energía constante $E(x,y)=h$. Consideremos x,y como variables complejas, pasando a nuevas coordenadas (ξ,η) por la transformación $x=\xi^2/2$, $y=\eta/\bar{\xi}$. Las ecuaciones diferenciales del problema de fuerza central

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{x}{|x|^3} \end{aligned} , \qquad (5)$$

con energía $\frac{1}{2}\ |y|^2 - |x|^1 = h$, toman ahora la forma

$$\dot{\xi}=\frac{\eta}{|\xi|^2}$$

$$\dot{\eta}=\frac{|\eta|^2-4}{|\xi|^4}\xi.$$

Como dichas ecuaciones tienen todavía singularidades hacemos un escalamiento del tiempo $d\tau/dt=2|\xi|^{-2}=|x|^{-1}$ para frenar las soluciones que van a colisión y eliminar las singularidades, obteniendo finalmente el siguiente sistema,

$$\xi'=\frac{\eta}{2} \qquad\qquad (6)$$

$$\eta'=h\,\xi.$$

Pues $h=(|\eta|^2-4)\,|\xi|^{-2}/2$ (7), es la energía expresada en las coordenadas nuevas.

Por supuesto, la prima en (6) significa derivadas con respecto al nuevo parámetro τ. No toda solución de (6) corresponde a un movimiento del problema, sino solamente cuando sus condiciones iniciales satisfacen (7).

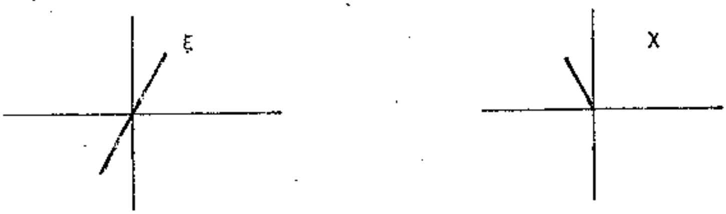
Ilustraremos el resultado de esta regularización para el caso $h<0$, en que las órbitas resultan acotadas: Eliminando η de (6), obtenemos la siguiente ecuación de segundo orden

$$\xi''-\frac{h}{2}\xi=0,$$

la cual corresponde a un movimiento armónico en 2 dimensiones, con frecuencia angular $\omega=\sqrt{-\frac{h}{2}}$. La solución general es una elipse

$$\xi(t)= a \cos \omega t+b \operatorname{sen} \omega t, \text{ con } a,b\in C$$

El caso degenerado en que a,b son colineales con $|a|^2+|b|^2={}^1\!/\omega$, -- nos da un segmento simétrico por el origen, recorrido periódicamente, lo cual corresponde a una órbita con colisión en el problema - de fuerza central.



El paso a las coordenadas originales $x=\xi^2/2$ nos da el rebote elástico, al mandar las dos porciones del segmento respecto al origen, en una sola.

Este tipo de regularización ha sido extendido más recientemente en forma no trivial al problema de fuerza central en $\mathbb{R}^3$ por Kustaanheimo y Stiefel [17].

Levi Civita realizó también este tipo de regularización para colisiones binarias en el problema de 3 cuerpos en el plano. El mismo - autor, y posteriormente Birkhoff [1] lo hicieron para el problema restringido de 3 cuerpos; la transformación de Birkhoff tiene la -

ventaja de que regulariza simultáneamente las dos colisiones posi-bles en este problema.

6. REGULARIZACION GLOBAL DE EASTON.

El otro método de regularización global es debido a Easton, y es más fuerte que el de Levi-Civita en el sentido de que realiza la regularización simultáneamente en todas las superficies de energía, y además requiere "aislar" todas las singularidades en cuestión, en un sentido que no detallaremos.

Esta regularización ha sido llamada por cirugía, porque requiere la eliminación de una vecindad, identificando convenientemente los puntos de su frontera. La describiremos también para fuerza central (5) en $\mathbb{R}^2$ (Easton [2]).

Esencialmente se construye una variedad con frontera B, en el espacio fase, la cual puede describirse simplemente en términos de $|x|$ y $|y|$ como el conjunto sombreado en la figura que sigue, que puede pensarse como la traza del problema.

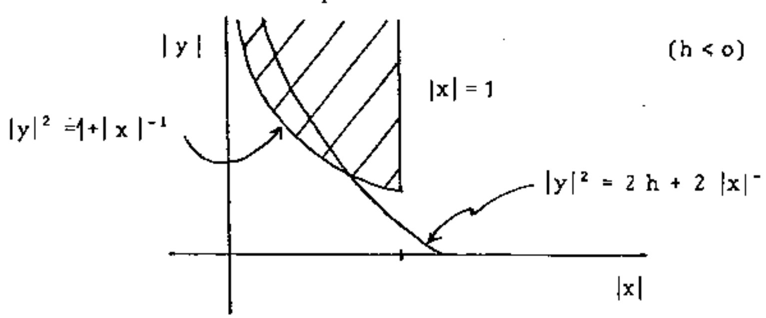


Fig. 1

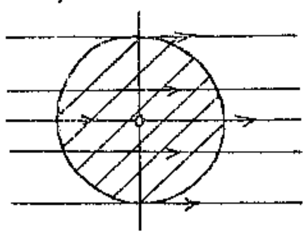
En términos de la misma figura, este conjunto tiene las siguientes propiedades:

a) Toda órbita que va a colisión con energía total h debe estar sobre $|y|^2=2h+2/|x|$ por conservación de energía, así que forzosamente entra a la variedad B y se conserva allí hasta que ocurre la colisión ($|x|\to 0$, $|y|\to\infty$).

b) Toda órbita que se hace tangente a la frontera ∂B de B, rebota en ella por fuera.

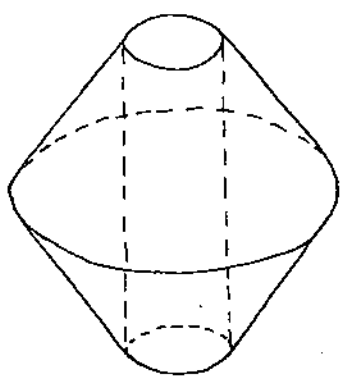
c) La función que asocia el punto de ∂B por donde entra una órbita, con el punto por donde sale la misma, si es que no va a colisión, tiene una extensión continua que asocia puntos en ∂B de órbitas que van a colisión, con puntos correspondientes de órbitas que vienen de colisión.

La situación es análoga a la del sistema de ecuaciones $\dot{x}=(x^2+y^2)^{-1}$, $\dot{y}=0$ en $\mathbb{R}^2$, con $B=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$:

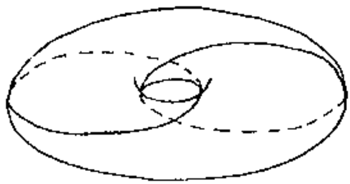


Todas las órbitas son horizontales, excepto por una singularidad en el origen. Las únicas órbitas tangentes a ∂B pasan por $(0,1)$, $(0,-1)$, y se comportan en efecto como un rebote por fuera, ya que no entran al interior de B. Eliminando el interior de B, la identificación de puntos de la frontera se hace para puntos con la misma coordenada horizontal, en particular uniendo la órbita que va a, con la que sale de singularidad. El flujo resultante queda regularizado por - cirugía.

Volviendo al problema de fuerza central, describamos la topología - de las superficies S_h de energía $h<0$ una vez regularizadas: La proyección de S_h - **int** B sobre el espacio de configuración es el anillo $(1-2h)^{-1} \leqslant |x| \leqslant -h^{-1}$. Su circunferencia exterior resulta porque la -- ecuación de energía nos da una circunferencia $|y|^2=2h+2/|x|$ para cada $x \neq 0$ fijo, pellizcándose a un punto cuando $|x|=-h^{-1}$ (el radio de la circunferencia se va a cero cuando nos acercamos à tal frontera). Si eliminamos $|y|$ entre la ecuación de energía y la ecuación para - la porción izquierda de ∂B en la Fig. 1, vemos que la circunferencia interna del anillo resulta cuando S_h alcanza ∂B. Es fácil verificar que el haz de circunferencias sobre el anillo, pellizcando en la frontera externa, se puede obtener identificando las dos superficies cónicas de la siguiente figura, al pegarlas a partir de la circunferencia central que las une:



El resultado es un toro sólido T con frontera, la cual corresponde a $\partial B \cap S_h$:



En esta figura, las dos copias entrelazadas de S^1 sobre la frontera corresponden a puntos donde las órbitas del flujo se hacen tangentes y rebotan, en este caso por dentro (pues aquí int B quedaría hacia afuera del toro). Sólo resta la identificación continua de acuerdo con el flujo como describimos antes, de las 2 componentes conexas de ∂T al quitar las circunferencias. Una forma de hacer esta identificación consiste en aplicar cirugía de variedades tridimensionales, cortando el toro sólido en dos nuevos toros, de manera que al identificar sus fronteras nos da el espacio proyectivo P^3 [2].

Se sabe [9], que aquí las colisiones ocurren sólo para órbitas radiales donde J=0, existiendo una para cada dirección posible al fijar la energía. Así al regularizar las colisiones se ven como una circunferencia S^1 en P^3.

Easton [3] regularizó también por cirugía las colisiones binarias para n=3 en $\mathbb{R}^2$. Conley construyó bloques aislantes para las colisiones triples del mismo problema, y probó que no son en general regularizables por cirugía. Finalmente, Lacomba [4] regularizó por cirugía el problema restringido de 3 cuerpos.

En conclusión, las distintas formas de regularización, que no son en general equivalentes, en Mecánica Celeste nos dan más o menos el mismo resultado: las colisiones dobles pueden regularizarse, pero no las triples (y presumiblemente las de orden más alto) globalmente.

Cierto tipo de órbitas que llevan a colisión de más de 2 cuerpos, pueden ser regularizadas, como son las homográficas: colisión total a lo largo de rectas que unen las partículas con su centro de masa, que esencialmente puede descomponerse en varios problemas de fuerza central (ver [7]). Sin embargo, esta regularización es solamente en el sentido 1º.

7. ORBITAS CERCANAS A COLISION.

La descripción de Siegel arriba mencionada (fin de §4) para las órbitas de colisión total de n=3 cuerpos en $\mathbb{R}^3$, no dice sin embargo como son las soluciones cercanas a colisión. Mc Gehee [7] se ha encargado de tal descripción para n=3 cuerpos en $\mathbb{R}^1$, encontrando que tales órbitas se comportan tan salvajemente que es imposible regularizarlas de acuerdo a Easton. Es de esperarse que lo mismo ocurra con colisiones de orden mayor.

La idea es efectuar un cambio de coordenadas y un escalamiento en el tiempo, como en la regularización de Levi-Civita, §5.

Este proceso se realiza también en cada superficie de energía constante $E(x,y)=h$.

Para comenzar, podemos suponer sin perder generalidad que el centro de masa se encuentra en reposo al origen, así que el espacio fase se reduce a $\{(x,y)\in\Delta^c \times (\mathbb{R}^1)^3 : \Sigma m_i x_i=0,\ \Sigma m_i y_i=0\}$, de dimensión 4, y las variedades de energía constante son de dimensión 3. Con el cambio de variables.

$$r=(x^t M x)^{1/2}$$

$$s=r^{-1}x\in S^1 \qquad \text{donde } M=\operatorname{diag}(m_1, m_2, m_3)$$

$$u=r^{1/2}\, My,$$

(aquí r,s son como coordenadas polares de las posiciones), las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x}=y$$

$$M\dot{y}=+\operatorname{grad} V(x)$$

se convierten en

$$\dot{r}=r^{-1/2}u^t s$$

$$\dot{s}=r^{-3/2}[-(u^t s)u+M^{-1}u]$$

$$\dot{u}=r^{-3/2}[(u^t s)u/2+\operatorname{grad} V(s)].$$

Como estas ecuaciones tienen todavía singularidades, escalamos en - el tiempo con $d\tau/dt=r^{-3/2}$, obteniendo

$$\frac{dr}{d\tau} = r\ u^t s$$

$$\frac{ds}{d\tau} = -(u^t s)s+M^{-1}u$$

$$\frac{du}{d\tau} =\frac{1}{2}(u^t s)u+ \text{grad } V(s)$$

La variedad transformada de energía h,

$$F_h=\{r,s,u)\in[0,\infty)\times S^1\times \mathbb{R}^2 : T(u)-V(s)=rh\}$$

contiene una frontera $F= \{(s,u):T(u)-V(s)=0\}$, que es común a todas - las variedades de energía, y corresponde a las colisiones triples en un sentido que haremos más preciso.

El escalamiento frena paulatinamente las órbitas que terminan en colisión triple para que les lleve una cantidad infinita de tiempo llegar a colisión. Del flujo en la frontera, podemos deducir conclusiones sobre el flujo cercano, o sea para órbitas cercanas a colisión.

Como el orden de las partículas en la recta no cambia después de -- una colisión doble, podemos suponer $q_1 \leq q_2 \leq q_3$, lo cual equivale a tomar un sector en S^1. Si damos una parametrización apropiada $s=\alpha(\sigma)$ del sector con $\sigma\in[-1,1]$ y agregamos las nuevas variables.

$$\nu = u^t \alpha(\sigma)$$

$$\omega = \lambda u^t \alpha'(\sigma),$$

obtenemos finalmente el siguiente sistema de ecuaciones

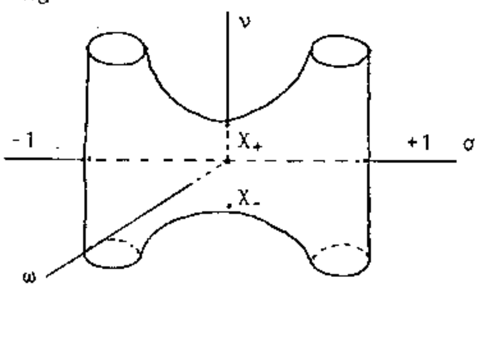
$$\frac{dr}{d\tau} = r\nu \qquad \frac{d\nu}{d\tau} = \frac{1}{2}\,\nu^2 + \omega^2 - U(\sigma)$$
$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \lambda\omega \qquad \frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{1}{2}\,\nu\omega + \lambda U'(\sigma), \tag{8}$$

con $U(\sigma) = V(\alpha(\sigma))$.

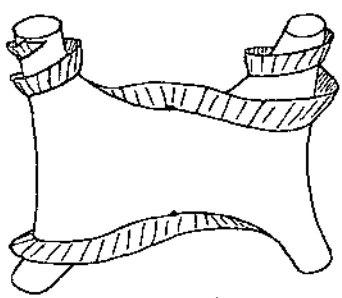
La ecuación de energía se convierte en $\frac{1}{2}(\nu^2+\omega^2) - U(\sigma) = rh$, y como - antes $r=0$ nos da la variedad bidimensional de colisión triple:

$$G = \{(\sigma,\nu,\omega) \in [-1,1] \times R \times R : \tfrac{1}{2}(\nu^2+\omega^2) - U(\sigma) = 0\}$$

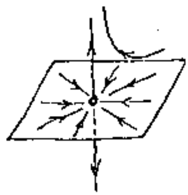
Es claro que se trata de un cilindro de revolución con eje σ, y cuyo radio se va a infinito cuando $\sigma \to \pm 1$. Sin embargo, no hemos regularizado las colisiones dobles, que corresponderían a conectar la órbita $\sigma \to +1$, $\omega \to +\infty$, $\nu \to \nu^*$, $t \to t^*_-$ con $\sigma \to +1$, $\omega \to -\infty$, $\nu \to \nu^*$, $t \to t^*_+$, y lo mismo cuando $\sigma \to -1$. Esto corresponde a pegar la variedad a lo largo de dos rectas en $\sigma = \pm 1$, el resultado es S^2 menos 4 puntos, como se ilustra en la siguiente figura.



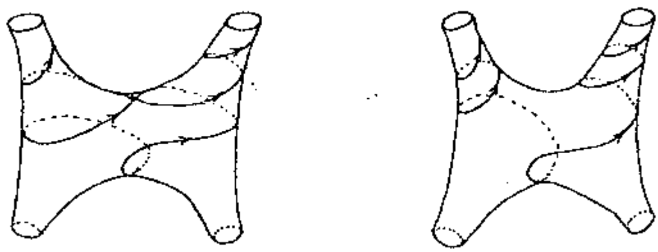
El flujo (8) restringido a G, donde es invariante, se comporta más o menos como el del gradiente de la función altura, y sus únicos puntos críticos son los dos puntos silla de la figura anterior, que son hiperbólicos. Las órbitas que terminan en colisión triple son asintóticas a X_-, mientras que las que comienzan en colisión triple son asintóticas a X_+. El teorema de variedad estable aplicado a cada uno de los puntos críticos nos da el resultado de Siegel para el problema colineal: el conjunto de órbitas que terminan en colisión forman una subvariedad de codimensión 1. Esto se ilustra en la siguiente figura: la superficie superior es la variedad inestable de X_+ y corresponde a órbitas que comienzan en colisión triple, mientras que la inferior es la variedad estable de X_- y corresponde a las que terminan en tal colisión.



Recordemos que el flujo cerca de un punto hiperbólico como X_- por ejemplo, se comporta así: puntos en la variedad estable de dimensión 2 tienden al punto crítico, mientras que la inestable consiste de 2 órbitas (dimensión 1) que se alejan del punto crítico, como se muestra en la siguiente figura.



Cualquier otra órbita se conserva cerca de la variedad estable, pasa cerca del punto crítico, y se aleja acercándose asintóticamente a la órbita inestable. Por tal razón, el comportamiento de la órbita inestable determina el comportamiento de órbitas que pasan cerca de colisión triple. Existen dos posibilidades respecto al comportamiento de tal órbita, de acuerdo con los valores de las masas:



El primer caso es excepcional, puesto que el segundo ocurre para un conjunto abierto y denso del conjunto de masas posibles, así que tenemos genéricamente inestabilidad que podemos interpretar como sigue:

Cuando pasa cerca de colisión triple el sistema transfiere una cantidad arbitraria de energía potencial a cinética. El sistema emerge con dos partículas muy cercanas viajando con velocidad grande en una dirección, mientras que la otra viaja con velocidad grande en la dirección opuesta.

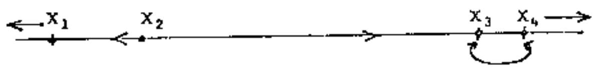
Esta transferencia arbitraria de energía impide la posibilidad de - regularizar colisiones triples en el sentido de Easton. Una órbita que termina en colisión triple tendría que conectarse a una órbita inexistente con energía cinética infinita. Este comportamiento forma la base para la construcción de órbitas en el problema de cuatro cuerpos que se hacen no acotadas en tiempo finito, como describiremos a continuación.

8. ORBITAS NO ACOTADAS

Como continuación natural de la sección anterior, ahora describiré cómo Mather y Mc Gehee [6] mostraron la existencia de órbitas con ciertas características para n=4 cuerpos en $\mathbb{R}^1$. Más bien que dar los detalles, me limitaré a las ideas.

Para comenzar, hacemos que el centro de masa quede en el origen con lo cual el espacio fase se reduce a dimensión 6. Mediante el mismo tipo de transformaciones de coordenadas y escalamiento en el tiempo como en el problema anterior, se agrega a cualquier variedad -- Ω de energía constante, una frontera $\partial\Omega$ (de dimensión 4) donde - el flujo está también definido y la deja invariante, que corresponde en cierto sentido a colisiones triples de las partículas 2,3 y4. Una de las variedades invariantes del flujo en $\partial\Omega$ es la variedad Σ de condiciones iniciales que llevan a tales colisiones, resultando también de codimensión 1 en Ω. Para ciertos valores de las 4 masas, en cualquier arco de Ω que cruce Σ existe una infinidad de condiciones iniciales, cuyas soluciones describiremos a continuación.

La solución está definida para todo $t<t^*$, contiene un conjunto numerable de colisiones binarias (regularizables) en t_1, t_2,... con $\lim t_n = t^*$. Además $x_1(t)\to -\infty$, $x_3(t)$, $x_4(t)\to +\infty$, $x_4(t)-x_3(t)\to 0$ cuando $t\to t^*$, y x_2 oscila infinitamente entre x_1 y x_3, chocando sucesivamente con cada una de ellas. La pérdida de energía potencial que proviene de $x_4-x_3\to 0$, da la energía cinética necesaria para que la solución se haga no acotada en tiempo finito.



Este ejemplo no proporciona estríctamente una singularidad que no es colisión de acuerdo con la equivalencia de la sección 3, debido a que ya contiene una infinidad de colisiones dobles. De otra manera, contradeciría el resultado de Saari de que en el problema colineal toda singularidad es colisión.

9. ORBITAS CON COLISION SON DESPRECIABLES

Para terminar mencionaremos aquí que Saari [11,12] probó para n cuerpos en $\mathbb{R}^3$, que el conjunto de órbitas que llevan a colisión es de medida (de Lebesgue) cero y de primera categoría (unión numerable de conjuntos no densos en ninguna parte). Esto implica un teorema de existencia global de soluciones para $n\leq 3$, que recientemente extendió a $n\leq 4$ [13] :

Si $n\leq 4$, para casi todas las condiciones iniciales excepto por un conjunto de nedida cero y de primera categoría, las soluciones están definidas para todo $t\in\mathbb{R}$. En caso $n>4$, queda abierta la estimación de las singularidades que no son colisiones.

BIBLIOGRAFIA

1. Birkhoff, G.D., the restricted problem of three bodies, Dynamical Systems, Amer. Math. Soc. Coll. vol. 9, Revisado Prov. R.I., 1966.

2. Easton, R., Regularization of vector fields by surgery-J. Differential Equations 10- (1971) 92-99.

3. Easton, R., the topology of the regularized integral surfaces of the 3-body problem, J. Differential Equations 12 (1972) 361-384.

4. Lacomba. E.A., Regularization by surgery in the restricted three-boby problem, J. Differential Equations 24 (1977).

5. Levi-Civita, Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps, Opere mathematiche 2 (1906).

6. Mather, J. N. y McGehee, R., Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time, Lect. Notes in Phys. 38, Springer Verlag 1975, 573-597.

7. Mc Gehee, R., Triple collisión in newtonian gravitational systems, Lect. Notes in Phys. 38, Springer Verlag 1975.

8. Painlevé, P., Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, (stockholm 1895), A. Hermann, Paris 1897.

9. Pollard, H., A Mathematical Introduction to Celestial Mechanics, Prentice Hall, 1967.

10. Saari, D., Singularities and collisions of newtonian gravitational Systems, Arch. Rational Mech. Anal. 49 (1973) 311-320.

11. Saari, D., Improbability of collisions in newtonian gravitational Systems, II, Trans. Amer. Math. Soc. 181 (1973) 351-368.

12. Saari, D., Collisions are of first category, Proc. Amer. Math. Soc. 47 (1975) 442-445.

13. Saari, D., a global existence theorem for the four-body problem of Celestial Mechanics, preimpresión.

14. Siegel, C., Der Dreierstoss, Ann. Math. 42, (1941) 127-168.

15. Siegel, C., y Moser, J., Lectures on Celestial Mechanics, -- Springer Verlag 1971.

16. Sperling, H., On the real singularities of the n-body problem, J. Reine Angew. Math 245 (1970) 14-50.

17. Stiefel, E. L. y Scheifele, G., Linear and Regular Celestial Mechanics, Springer Verlag 1971.

18. Sundman, K.F., Memoire sur le problème des trois corps, Acta - Math. 36 (1913) 105-179.

19. Wintner, A., The Analytical Foundations of Celestial Mechanics, Priceton Univ. Press, 1941.

20. Von Zeipel, H., Sur les singularités du problème des n corps, Ark. Mat. Astron. Fys. 4 (1908) No. 32.