

# Control de les correlacions en freqüència de la llum

Ferran Macià Bros\*

## Introducció

L'estudi de la física de la informació i de la computació ha estat una de les disciplines d'investigació més reconegudes al llarg de les últimes dècades. La informació és, a la fi, alguna cosa que es troba dins d'un sistema físic, i podem pensar que la computació és allò que és capaç de convertir aquesta part dels sistemes físics en dispositius realitzables i controlables. Així doncs, sembla que tant des del punt de vista de la ciència bàsica com de l'aplicació tecnològica, els conceptes d'informació i computació tenen un paper principal.

Aquest treball tracta sobre un aspecte concret d'un sistema físic, la llum, el qual es pot utilitzar per a aplicacions molt diverses en informació quàntica.

De tots els sistemes físics proposats per a realitzacions pràctiques d'informació quàntica, els fotons són, sens dubte, els més utilitzats. Els treballs duts a terme fins al moment tracten bàsicament de les propietats de polarització de la llum, la posició dels fotons i el moment d'aquests. L'estudi del control dels estats en freqüència dels fotons és un nou pas en la complexitat quàntica, ja que la freqüència és una variable contínua. Quan pensem en la descripció i l'estudi d'algun aspecte dels sistemes quàntics com pot ser la polarització o la freqüència, la distinció en variables contínues i discretes és ben clara en el sentit matemàtic; però d'altra banda, des del punt de vista experimental, les variables contínues són un límit de les variables discretes que mai es pot tractar a la pràctica.

La correlació no clàssica entre parelles de fotons és un dels tèmics centrals en l'òptica quàntica, i l'entrellaçament és la seva propietat més notable per tal d'experimentar-hi. L'entrellaçament és una propietat dels estats quàntics i, en el nostre cas, direm que una parella de fotons està entrelaçada quan no puguem descriure l'estat d'un dels dos fotons sense, alhora, variar l'estat de l'altre, és a dir que l'entrellaçament ens dóna idea del grau en què estan lligats els dos fotons. Quan volem tractar l'entrellaçament d'un estat quàntic de dos sistemes  $A$  i  $B$ , si aquests tenen un espectre discret, aleshores la seva correlació serà senzilla de quantificar ja que tindrem un nombre finit —o, en el pitjor dels casos, numerable— d'estats correlats. Per contra, quan

els espectres són continus cal estudiar més profundament l'entrellaçament i com descriure'l.

A partir de les propietats no clàssiques dels estats quàntics sorgeixen aplicacions molt interessants, i els estats entrelaçats representen la clau per dur a terme experiments impossibles des de la teoria clàssica. Per aquest motiu és crucial identificar mètodes per preparar i explorar sistemes entrelaçats, en particular cal desenvolupar mètodes per quantificar l'entrellaçament.

L'obtenció de parelles de fotons entrelaçats en freqüència és fàcil a través d'un procés de conversió de freqüència a la baixa (anomenat *spontaneous parametric down conversion*, SPDC). Aquest procés es dóna en fer passar un pols de llum a través d'un medi no lineal, de manera que es generen espontàniament parelles de fotons amb una freqüència que és la meitat de la del pols de llum. Els dos fotons formen un estat bipartit en freqüència que disposa de molt bones propietats d'entrellaçament. En principi qualsevol grau d'entrellaçament es pot aconseguir variant les condicions del procés d'SPDC. Per exemple, l'estat obtingut amb un pols de llum molt llarg en temps ens dóna un estat completament correlat entre els dos fotons. D'altra banda, podem controlar la correlació utilitzant certs medis no lineals que ens donen unes relacions particulars entre les velocitats de grup del pols i dels dos fotons. Fins i tot podem controlar i obtenir parelles completament incorrelades modificant la longitud del cristall no lineal o bé la duració dels polsos. Tot aquest control requereix cristalls especials i polsos de llum amb característiques molt particulars, així, seria molt interessant poder controlar l'entrellaçament d'aquests estats sense haver de disposar de tot això.

Algunes de les aplicacions més conegudes que es deriven del control en freqüència dels fotons són la creació d'alfabets multidimensionals per criptografia, la sincronització de rellotges o l'obtenció de tomografies i imatges (*optical coherence tomography*). Cadascuna d'aquestes aplicacions requereix diferents graus de correlació entre la freqüència dels fotons; per exemple, per a les tomografies òptiques, com més correlats estiguin els fotons, més precisió en les imatges es podrà aconseguir, mentre que per a la sincronització de rellotges passa a l'inrevés.

Aquest treball pretén, primerament, analitzar les propietats físiques de l'entrellaçament de parelles de fotons creades a partir d'un procés de conversió de freqüència a la baixa (SPDC) i donar mètodes matemàtics

\*Ferran Macià Bros (Sabadell, 1980) és llicenciat en matemàtiques i enginyer en telecomunicacions. Està estudiant el doctorat a la Universitat de Barcelona.

per descriure i quantificar l'entrellaçament d'una variable contínua com és la freqüència. Després, proposarem dos mètodes per controlar aquests estats en freqüència dels fotons. El primer tracta amb xarxes de dispersió i actua sobre el pols de llum abans que aquest passi pel cristall no lineal, i el segon consisteix a modular la no-linealitat del cristall, actuant aquest cop sobre els fotons quan aquests es troben dins el cristall.

## Creació d'estats correlats en freqüència

Per tal de crear un estat quàntic bipartit en freqüència per a dos fotons utilitzarem el procés conegut com a SPDC (Law et al., 2000 i Grice et al., 2001). Això significa que, donada una ràfega de fotons coherents, un làser, aquests passen per un cristall no lineal de segon ordre i són absorbits i reemesos de nou de manera espontània, és a dir, en algun lloc del cristall aleatòriament. El terme *paramètric* prové del fet que tant l'energia com el moment es conserven en aquest procés. Per a cada fotó absorbit se n'emeten dos, de manera que les noves freqüències dels fotons sortints del cristall compleixen que la seva suma és igual a la freqüència del fotó d'entrada. El fotó a l'entrada del cristall l'anomenem *fotó del pols* mentre que els dos fotons sortints se'ls anomena *signal* i *idler*; el primer es considera que és el senyal obtingut i el segon representa un afegit; tot i això, l'intercanvi de la notació entre aquests dos fotons no canvia res en l'anàlisi. Així doncs, podem escriure la condició de conservació de l'energia com  $\omega_p = \omega_s + \omega_i$  on  $\omega_p$ ,  $\omega_i$  i  $\omega_s$  són les freqüències del pols, el *signal* i l'*idler*. La conservació del moment ve donada per la condició anomenada de *phase matching*, és a dir, *relació de fases*, que involucra els vectors d'ona dels tres fotons (vegeu la figura 1).

$$\mathbf{k}_p(\omega_p^0) = \mathbf{k}_s(\omega_s^0) + \mathbf{k}_i(\omega_i^0). \quad (1)$$

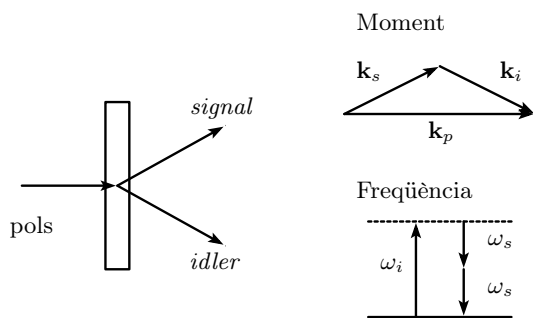


Figura 1: Esquema del procés d'SPDC

El que és més important en aquest procés és que els fotons que surten tenen un estat quàntic entrellaçat en freqüència. És a dir, que no es poden tractar per separat les freqüències dels fotons *signal* i *idler*, i, per tant, cal treballar amb un estat conjunt en freqüència per als dos fotons. Això dóna un potencial

per experimentar amb aplicacions molt important.

Considerem un cristall no lineal de segon ordre i de longitud  $L$  il·luminat pel pols d'un làser. Aleshores l'estat conjunt dels dos fotons a la sortida del cristall el podem expressar com:

$$|\Psi\rangle = |0, 0\rangle - i/\hbar \int_0^\tau dt H_I(t) |0, 0\rangle, \quad (2)$$

on  $|0, 0\rangle$  és l'estat buit, que representa l'estat de mínima energia sense partícules físiques,  $\tau$  el temps d'interacció i  $H_I(t)$  el hamiltonià, que ve donat per l'expressió:

$$H_I = \epsilon_0 \int_V dV \chi^2 E_p^+ \hat{E}_s^- \hat{E}_i^- + h.c. \quad (3)$$

on  $\epsilon_0$  és la permissivitat del buit,  $V$  és el volum del cristall il·luminat,  $E_p^+$  és la part positiva en freqüència de l'operador de camp elèctric per al pols d'entrada,  $E_{s,i}^-$  són les parts negatives de l'operador de camp elèctric per al *signal* i l'*idler*, i el terme final,  $h.c.$ , representa l'hermític conjugat. El coeficient  $\chi^2$  és la no-linealitat del cristall i correspon al coeficient de segon ordre de la susceptibilitat. Els cristalls no lineals són aquells en què la relació entre el camp elèctric,  $\mathcal{E}$ , i el moment dipolar,  $\mathcal{P}$ , deixa de ser lineal.

El pols del làser que es propaga pel cristall en direcció  $\hat{z}$  s'expressa com:

$$E_p^+(\mathbf{x}, z, t) = \int d\omega_p d\mathbf{p} E_0(\omega_p, \mathbf{p}) \times \exp[-ik_p z + i\mathbf{p}(\mathbf{x} + z\rho_p) - i\omega_p t], \quad (4)$$

i la propagació del *signal* i l'*idler*:

$$E_{s,i}^{\hat{}}(\mathbf{x}, z, t) = \int d\omega_{s,i} d\mathbf{p} \exp[-ik_{s,i} z + i\mathbf{p}(\mathbf{x} + z\rho_{s,i}) + i\omega_{s,i} t] a_{s,i}^{\hat{}}(\omega_{s,i}, \mathbf{p}), \quad (5)$$

on  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$  és el moment transversal de cada fotó,  $k$  el nombre d'ona,  $\mathbf{x} = (x, y)$  la posició en el pla transversal de propagació,  $a_{s,i}^{\hat{}}(\omega_{s,i}, \mathbf{p})$  són els operadors de creació per al *signal* i l'*idler*, i  $\rho_{p,s,i} = (\rho_{px,sx,ix}, \rho_{py,sy,iy})$  és el vector de Poynting de *walk-off*. Remarquem que el *walk-off* —terme anglès que vol dir 'anar-se'n'— provoca una desviació del pols respecte de la seva direcció de propagació i d'aquesta manera pot permetre ajustar les velocitats de grup i la dispersió. En l'expressió (4) hem escrit  $E_0$  per referir-nos al pols d'entrada, que podem suposar que és gaussià.

Un cop escrites aquestes equacions, intentem simplificar una mica i poder arribar a expressions més fàcils d'estudiar. Com que volem conèixer les propietats d'un cert estat en freqüència, podem fixar  $\mathbf{p} = (0, 0)$  i centrar-nos en el domini freqüencial. D'aquesta manera l'estat

continu dels dos fotons a la sortida del procés d'SPDC el podem expressar com:

$$|\Psi\rangle = \int d\omega_s d\omega_i \Phi(\omega_s, \omega_i) a_s^\dagger(\omega_s) a_i^\dagger(\omega_i) |0, 0\rangle, \quad (6)$$

on  $\Phi(\omega_s, \omega_i)$  és la funció d'estat que defineix l'estat dels dos fotons.

Escrivim la funció d'estat com el producte de les funcions del pols i del cristall:

$$\Phi(\omega_s, \omega_i) = E_0(\omega_s + \omega_i) W(\omega_s, \omega_i), \quad (7)$$

on  $E_0(\omega_p)$  és la funció del pols a l'entrada del cristall en el domini freqüencial. Notem que  $\omega_p^0 = \omega_s^0 + \omega_i^0$ , on  $\omega_s^0$  i  $\omega_i^0$  són les freqüències centrals del *signal* i l'*idler*, i  $\omega_p^0$  la freqüència central del pols; a més a més,  $\omega_p = \omega_p^0 + \Omega_p$ ,  $\omega_s = \omega_s^0 + \Omega_s$  i  $\omega_i = \omega_i^0 + \Omega_i$ , on  $\Omega_p$ ,  $\Omega_s$  i  $\Omega_i$  són les desviacions de freqüència pel pols, el *signal* i l'*idler* respecte a la seva freqüència central; segons això, és clar que  $\omega_s + \omega_i = \omega_p + \Omega_p = \Omega_s + \Omega_i$ . Assumirem que  $E_0(\omega_p)$  és una gaussiana, i l'escriurem com:

$$E_0(\omega_s + \omega_i) = \exp\left[\frac{-T_0^2}{2}(\omega_s + \omega_i - \omega_p^0)^2\right], \quad (8)$$

on  $T_0$  és el temps del pols. La funció del cristall  $W(\omega_s, \omega_p)$  ve donada per l'expressió:

$$W(\omega_s, \omega_i) = \int_{-L}^0 \exp[i(\Delta_K)z] dz, \quad (9)$$

on  $\Delta_K = k_p(\omega_s + \omega_i) - k_s(\omega_s) - k_i(\omega_i)$  i  $k_{p,s,i}$  són els nombres d'ona i estan definits com  $k_{p,s,i} = \omega_{p,s,i} n_{p,s,i}(\omega_{p,s,i})$  amb  $n_{p,s,i}$  els índexs de reflexió del pols, el *signal* i l'*idler*, respectivament, dins del cristall. Notem també que el cristall va de  $z = -L$  a  $z = 0$ .

Aquesta quantitat,  $\Delta_K$ , que depèn de les freqüències dels dos fotons, no depèn de la posició del cristall, encara que més endavant introduïrem certs cristalls on  $\Delta_K$  sí que dependrà de la posició al llarg del cristall. Mentre això no passi podem simplificar l'expressió (9) fent la integral indicada al llarg del cristall; així obtenim:

$$W(\omega_s, \omega_i) = \text{sinc}(\Delta_K L/2) \exp(-i\Delta_K L/2), \quad (10)$$

on cal remarcar que l'amplada de la funció del cristall queda definida per la longitud d'aquest i, per tant, si variem la longitud del cristall podrem disposar de funcions amb les amplades desitjades, encara que sempre tindrem la restricció natural de la impossibilitat d'aconseguir cristalls de la longitud que vulguem. D'altra banda, la correlació o inclinació d'aquesta funció queda determinada pel terme  $\Delta_K$ , que conté la relació entre els índexs de reflexió.

## Quantificació de l'entrellaçament

Un estat conjunt és la descripció d'un sistema físic que, per exemple, està format per diferents partícules les quals tenen cadascuna un estat propi. Si l'estat d'un fotó el situem a l'espai de Hilbert  $\mathcal{H}$ , aleshores l'estat conjunt de dos fotons el situarem a  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ . Escrivim, doncs, quina seria l'expressió per un estat bipartit genèric:

$$|\Psi\rangle = \sum_n \lambda_n |\phi_n\rangle |\psi_n\rangle, \quad (11)$$

i la seva matriu de densitat seria:

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{n,m} \lambda_n \lambda_m^* |\psi_n\rangle\langle\phi_n| \langle\phi_m| \langle\psi_m| \quad (12)$$

amb traça unitat:

$$\text{Tr} \hat{\rho} = \sum_s \langle\psi_n| \langle\phi_n| \hat{\rho} |\phi_n\rangle |\psi_n\rangle = \sum_n |\lambda_n|^2 = 1. \quad (13)$$

Aquest estat conjunt serà un estat pur a  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$  i, per tant, la matriu de densitat al quadrat,  $\hat{\rho}^2$ , tindrà també traça unitat:

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2 = \sum_{n_1, n_2} |\lambda_{n_1}|^2 |\lambda_{n_2}|^2 = \sum_{n_1} |\lambda_{n_1}|^2 \sum_{n_2} |\lambda_{n_2}|^2 = 1. \quad (14)$$

Ara la pregunta que sorgeix és: què passa amb l'estat d'un sol fotó? El podem escriure com un estat pur a  $\mathcal{H}$ ? Doncs la resposta és que, en general, no. Només en cas que l'expressió (11) de l'estat conjunt dels dos fotons tingui un únic sumand, és a dir,  $|\Psi\rangle = |\phi\rangle |\psi\rangle$ , aleshores l'estat d'un o altre fotó serà  $|\phi\rangle$  o  $|\psi\rangle$ . Quan l'expressió (11) de l'estat conjunt de la parella de fotons tingui més d'un sumand no factoritzable, tindrem que els estats de cada fotó són estats mixtos i, per tant, no els podem escriure directament a  $\mathcal{H}$ . Però sí que en podem escriure la matriu de densitat que, per al primer fotó, es defineix com:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B \hat{\rho} = \sum_s \langle\psi_n| \hat{\rho} |\psi_n\rangle, \quad (15)$$

on  $\text{Tr}_B$  simbolitza la traça respecte del segon fotó i, si escrivim aquesta matriu per al primer fotó de l'estat de l'expressió (11), tenim:

$$\hat{\rho}_A = \sum_n |\lambda_n|^2 |\phi_n\rangle\langle\phi_n|. \quad (16)$$

Aquesta matriu compleix que la seva traça val la unitat. Però no és així per a la matriu  $\hat{\rho}_A^2$ , la traça de la qual val:

$$\text{Tr} \hat{\rho}_A^2 = \sum_n |\lambda_n|^4. \quad (17)$$

Com més s'allunyi aquest valor de la unitat més mixt serà l'estat del fotó, és a dir, més interacció tindrà amb l'estat de l'altre fotó.

Ara podem tenir una interpretació millor de què és un estat mixt. La traça de les matrius parcials de densitat al quadrat,  $\hat{\rho}_{A,B}^2$ , ens dóna idea de com n'és, de mixt, l'estat d'un sol fotó o quant s'allunya aquest de ser un estat pur. Fixem-nos que, si l'expressió (11) sols té un sumand,  $Tr\hat{\rho}_{A,B}^2 = 1$  i, per tant, tenim un estat pur. En canvi, quan hi ha més sumands  $Tr\hat{\rho}_{A,B}^2 < 1$ .

L'entrellaçament és una propietat dels estats quàntics conjunts que ens dóna idea de com són, de mixtos, els estats de cada part. Direm que un estat conjunt és entrellaçat si la traça de les matrius parcials de densitat al quadrat és menor que 1 o, el que és el mateix, si el nombre de sumands a l'hora d'expressar l'estat conjunt com l'expressió (11) és més gran que 1. Per aquest motiu, per tal de conèixer l'entrellaçament d'un estat quàntic conjunt ens caldrà conèixer-ne la representació com a suma de productes d'estats purs per a cada part, com en l'expressió (11). Aquesta descomposició s'anomena *descomposició de Schmidt*. En general, donat un estat conjunt, no disposem d'aquesta descomposició i, per tant, no tenim idea de com d'entrellaçats es troben els estats. Així doncs, donat un estat conjunt en freqüència de dos fotons  $|\Psi\rangle$ , hem de trobar les bases en els espais de Hilbert corresponents i els coeficients per aconseguir una descomposició de l'estat  $|\Psi\rangle$  com ara l'expressió (11).

Una vegada definit l'entrellaçament, apareix el problema de saber com n'està, d'entrellaçat, un estat concret. És clar que la resposta té a veure amb el nombre de sumands que apareixen en fer la descomposició de Schmidt. Aquest nombre s'anomena *nombre de Schmidt*. Però, està ben definit aquest nombre? I, què passa si el nombre de Schmidt no és finit? Per aquest motiu cal pensar algun sistema que ens indiqui el grau d'entrellaçament d'un estat quàntic conjunt.

Si els estats de cada fotó els definim a través de la matriu de densitat  $\hat{\rho}_{A,B}$  podem definir l'entropia com:

$$S(\hat{\rho}_{A,B}) = -k_B Tr\hat{\rho}_{A,B} \ln \hat{\rho}_{A,B}, \quad (18)$$

on  $k_B$  és la constant de Boltzman. L'expressió (18) va ser donada per Von Neumann el 1927 i generalitza l'expressió clàssica de Boltzman i Gibbs per a la mecànica quàntica. D'ara endavant considerarem  $k_B = 1$ , ja que aquesta entropia resulta adimensional; l'anomenarem *entropia d'entrellaçament*. Aquesta quantitat serà sempre positiva i prendrà el valor 0 quan els estats que componen l'estat conjunt siguin purs, és a dir, quan l'estat conjunt sigui separable, i el seu valor pot ser arbitràriament gran. Nosaltres utilitzarem l'expressió següent:

$$S = - \sum_n \lambda_n \log_2 \lambda_n, \quad (19)$$

on  $\lambda_n$  seran els valors de la matriu de densitat diagonalitzada o, el que és el mateix, el quadrat dels valors propis corresponents a la descomposició de Schmidt.

L'expressió (19), que ens dóna el càlcul de l'entropia d'entrellaçament, compleix, igual com l'entropia clàssica, propietats molt interessants de continuïtat, additivitat i subadditivitat, concavitat, etc., però s'escapen del que nosaltres pretenem estudiar (Wehrl, 1978).

Per tal de quantificar l'entrellaçament s'utilitza també un altre paràmetre anomenat *quantitat d'entrellaçament* (Parker et al., 2000), definit també a partir dels valors propis de la descomposició de Schmidt de la manera següent:

$$K = \frac{1}{\sum_k \lambda_k^2}. \quad (20)$$

Aquest valor  $K$  ens dóna una idea de la quantitat de valors propis actius, és a dir, de la quantitat de modes actius. Els estats separables, que sols tenen un mode actiu, tindran un valor de  $K = 1$ . Fixem-nos que per calcular la quantitat d'entrellaçament s'utilitza el valor de la suma de  $\lambda_n^2$ , que justament equival a la traça de les matrius parcials de densitat al quadrat que, com havíem vist, ens indicaven el grau de no-separabilitat de l'estat conjunt.

Tant la quantitat d'entrellaçament com l'entropia d'entrellaçament poden ser sumes infinites en aquells casos en què es treballa amb estats en espais de dimensió infinita. Tot i això, sabem que la suma dels valors de la diagonal de la matriu de densitat diagonalitzada té valor 1 i, per tant, aquestes quantitats seran finites.

### Descomposició de Schmidt

Un dels principals objectius hem dit que era conèixer les propietats de l'estat conjunt dels dos fotons a la sortida del procés d'SPDC i, per això, necessitem descompondre la funció d'estat  $\Phi$  en una suma de funcions separables en  $\omega_s$  i  $\omega_i$ . Aquesta descomposició, anomenada *descomposició de Schmidt*, existeix i, a més a més, és ortogonal, és a dir que:

$$|\Psi\rangle = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \int d\omega_s d\omega_i f_n(\omega_s) g_n(\omega_i) a_s^\dagger(\omega_s) a_i^\dagger(\omega_i) |0, 0\rangle, \quad (21)$$

on  $f_n(\omega_s)$  i  $g_n(\omega_i)$  són funcions ortonormals de l'espai de Hilbert de les funcions d'ona,  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , per al *signal* i l'*idler* respectivament, i  $\lambda_n$  són valors positius. Per tant, podem escriure la funció d'estat  $\phi$  com:

$$\phi(\omega_s, \omega_i) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} f_n(\omega_s) g_n(\omega_i). \quad (22)$$

Considerem ara l'operador parcial de densitat

$$\hat{\rho}_s = Tr_i(|\Phi\rangle\langle\Phi|). \quad (23)$$

La descomposició de Schmidt ve d'una tria de bases a  $\mathcal{H}$ ,  $\{f_n(\omega_s)\}$  per al *signal* i  $\{g_n(\omega_i)\}$  per a l'*idler*, de manera que l'operador parcial de densitat queda diagonalitzat. El que cal fer és buscar els valors propis i les funcions pròpies d'aquest operador.



Així doncs, l'operador  $\hat{\rho}_s$  ve donat per l'expressió:

$$\hat{\rho}_s = \sum_n \lambda_n \int d\omega_{s1} d\omega_{s2} f_n(\omega_{s1}) f_n^*(\omega_{s2}) |\omega_{s1}\rangle \langle \omega_{s2}| \quad (24)$$

si utilitzem l'expressió (21) per a  $|\Psi\rangle$  o

$$\hat{\rho}_s = \int d\omega_{s1} d\omega_{s2} \int d\omega_{s3} \phi(\omega_{s1}, \omega_{s3}) \times \phi^*(\omega_{s2}, \omega_{s3}) |\omega_{s1}\rangle \langle \omega_{s2}| \quad (25)$$

si utilitzem l'expressió (6). Hem emprat  $|\omega_s\rangle = a_s^\dagger(\omega_s)|0\rangle$  per notar els estats en freqüència. Comparant les expressions (24) i (25) obtenim que:

$$\sum_n \lambda_n f_n(\omega_{s1}) f_n^*(\omega_{s2}) = \int d\omega_{s3} \phi(\omega_{s1}, \omega_{s3}) \phi^*(\omega_{s2}, \omega_{s3}) \equiv K_s(\omega_{s1}, \omega_{s2}), \quad (26)$$

on  $K(\omega_{s1}, \omega_{s2})$  serà el nucli de l'operador  $\hat{\rho}_s$ .

Si ara multipliquem ambdues parts de l'expressió (26) per  $f_n(\omega_{s2})$  i tenint en compte que, com que les funcions  $f_n(\omega)$  són ortonormals,  $\int |f_n(\omega)|^2 d\omega = 1$ , obtenim:

$$\int d\omega_{s2} K_s(\omega_{s1}, \omega_{s2}) f_n(\omega_{s2}) = \lambda_n f_n(\omega_{s1}). \quad (27)$$

Notem que si volem l'operador  $\hat{\rho}_i$  caldrà obrar de manera similar, i que la descomposició de l'operador  $\rho_i$  ens donarà els mateixos valors propis, però amb diferents funcions pròpies  $\{g_n(\omega_i)\}$ . Així doncs, per obtenir la descomposició de Schmidt hem de resoldre les equacions integrals següents; s'anomenen *equacions integrals de Fredholm de segona espècie*:

$$\int d\omega_{s2} K_s(\omega_{s1}, \omega_{s2}) f_n(\omega_{s2}) = \lambda_n f_n(\omega_{s1}), \quad (28)$$

$$\int d\omega_{i1} K_i(\omega_{i1}, \omega_{i2}) g_n(\omega_{i1}) = \lambda_n g_n(\omega_{i2}),$$

amb

$$K_s(\omega_{s1}, \omega_{s2}) = \int \Phi(\omega_{s1}, \omega) \Phi^*(\omega_{s2}, \omega) d\omega, \quad (29)$$

$$K_i(\omega_{i1}, \omega_{i2}) = \int \Phi(\omega, \omega_{i1}) \Phi^*(\omega, \omega_{i2}) d\omega.$$

Una vegada feta la descomposició de Schmidt ja podem calcular certes propietats de l'estat dels dos fotons, com ara el grau d'entrellaçament.

## Tècniques d'inclinació de pols

Ja sabem que la correlació de la funció del cristall depèn tan sols de les diferents velocitats de propagació del material pels diferents fotons o, el que és el mateix, dels diferents nombres d'ona pel *signal* i l'*idler*. Per tal de controlar aquests paràmetres, tan sols es pot, a priori, canviar el material del cristall. Cal recordar també que

un altre paràmetre que permet variar l'entrellaçament és la longitud del cristall. Aquest últim, que controla l'amplada de la funció del cristall, no actua directament en la inclinació o correlació de la funció del cristall, ja que no hi influeix en absolut, tan sols fa que aquesta funció esdevingui més o menys ampla. I el fet de tenir una o altra amplada farà que la correlació final de la funció d'estat depengui més o menys del cristall o del pols i, per tant, finalment, serà un paràmetre d'interès.

Aquests paràmetres, que a priori ens permeten modificar a voluntat l'estat bipartit dels dos fotons, donant-los més o menys entrellaçament, poden resultar a l'hora de la veritat molt difícils de controlar. Els diferents materials donen diferents correlacions, però resulta difícil disposar de molts materials, i modificar-ne les característiques per tal de variar els nombres d'ona pot resultar molt complicat. De la mateixa manera, la longitud del cristall no pot excedir ni estar per sota de certs valors. I per aquest motiu és molt interessant poder controlar l'estat dels fotons mitjançant tècniques que no utilitzin la variació d'aquests paràmetres.

Ens disposem a estudiar una nova tècnica de control de l'entrellaçament de l'estat bipartit en freqüència de parelles de fotons, generades en un procés de conversió de freqüència a la baixa, SPDC. Les tècniques d'inclinació del pols permeten controlar les velocitats de grup de les diferents components espectrals dels fotons i, d'aquesta manera, fixar la inclinació de la funció del cristall per tal d'aconseguir diferents correlacions i, per tant, diferents graus d'entrellaçament (Torres et al., 2005). Aquestes tècniques permeten aprofitar les característiques de certs cristalls a l'hora de treballar en un procés d'SPDC. Cal veure, doncs, en què es basen aquestes tècniques i, sobretot, veure quant control ens donen de l'estat bipartit dels fotons a la sortida del procés.

## Xarxes de difracció

Abans d'entrar en l'explicació de com intentem controlar l'entrellaçament en el procés d'SPDC i exposar l'esquema complet utilitzat, és important parlar de les xarxes de difracció (*gratings*) i de com separem les diferents components espectrals del pols d'entrada al cristall.

Per tal de separar espectralment un pols cal fer-lo passar per algun medi que dispersi angularment, com ara un prisma o una xarxa de difracció. Les xarxes de difracció són estructures que permeten realitzar aquesta dispersió a partir de reflexions.

El cristall té una superfície tallada amb petites inclinacions periòdiques, separades una distància  $d$  i amb un ordre de difracció  $m$ . El pols a l'entrada de la xarxa de difracció,  $E_0(\omega_p^0 + \Omega, p_x, p_y)$ , incideix sobre el cristall amb una certa distribució de moment transversal  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ . La xarxa de difracció dispersa aquest pols d'entrada reflectint cada component freqüencial en una direcció diferent. Si, per exemple, orientem la xarxa de dispersió en la direcció  $x$ , aleshores el pols reflectit el

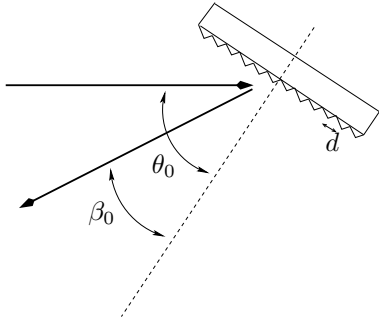


Figura 2: Esquema d'una xarxa de difracció

podem escriure com:

$$E_0(\omega_p, p_x/\alpha - \Omega \tan(\phi)/\alpha c, p_y), \quad (30)$$

on  $c$  és la velocitat de la llum,  $\phi$  és l'angle d'inclinació del pols i  $\alpha = -\cos \theta_0 / \cos \beta_0$ , en què  $\theta_0$  és l'angle d'incidència i  $\beta_0$  l'angle de sortida després de la difracció (aquests darrers angles els podem observar en la figura 2). El pols resultant és un pols amb certa inclinació, és a dir que els seus màxims d'intensitat es troben en diferents instants de temps per a cada  $x$ . L'angle d'inclinació del pols el podem calcular com:

$$\tan \phi = -md/(\lambda/\cos \beta_0). \quad (31)$$

Així podem pensar en l'actuació de la xarxa de dispersió com una aplicació sobre el pols que actua de la manera següent:

$$\begin{aligned} \omega_p^0 + \Omega &\mapsto \omega_p^0 + \Omega \\ p_x &\mapsto p_x/\alpha - \Omega \tan(\phi)/\alpha c \\ p_y &\mapsto p_y. \end{aligned} \quad (32)$$

Una vegada separades les components espectrals, podem treballar-hi per separat. Si el pols amb inclinació el reflectim altra vegada en una superfície amb una xarxa de dispersió igual que la primera i situada de manera inversa, aleshores tornem a ajuntar les components espectrals i obtenim un pols idèntic que l'inicial. L'actuació de la segona xarxa de dispersió també la podem pensar com l'aplicació següent:

$$\begin{aligned} \omega_p^0 + \Omega &\mapsto \omega_p^0 + \Omega \\ p_x &\mapsto \alpha p_x + \Omega \tan(\phi)/c \\ p_y &\mapsto p_y. \end{aligned} \quad (33)$$

Acabem de veure que aquesta tècnica consisteix a actuar sobre el pols abans que passi pel cristall no lineal i tingui lloc l'SPDC. Així, nosaltres posarem el cristall no lineal enmig de dues xarxes de dispersió, com es mostra en la figura 3, de manera que el cristall actuarà sobre les diferents components espectrals de manera diferent, ja que aquestes tindran diferents moments transversals. Però, just a la sortida del cristall, tornarem a ajuntar les components espectrals mitjançant una segona xarxa

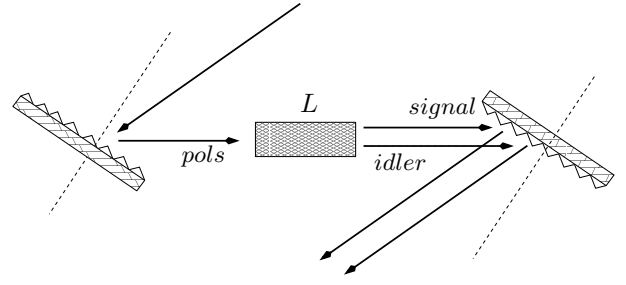


Figura 3: Esquema de les xarxes de dispersió amb el cristall

de dispersió, igual que el primer, que actuarà sobre els fotons *signal* i *idler*.

Treballem amb un cristall BBO ( $\beta$ -barium borate) uniaxial, ja que té molt bones propietats òptiques. El cristall disposa de coeficients de no-linealitat molt elevats, un ampli rang de freqüències en què es pot complir la relació de fases de l'expressió (1) i, a més a més, presenta una gran homogeneïtat òptica. Quan els dos fotons resultants en el procés d'SPDC no tenen la mateixa polarització, es diu que els cristalls són de *tipus II* i, a més a més, es denota amb els subíndexs  $e$ , extraordinari, i  $o$ , ordinari, el fet que la polarització dels fotons estigui o no continguda en el pla que formen la direcció de propagació amb l'eix principal del cristall. Així el cristall que utilitzem l'anomenem de *tipus II eoe* on el primer i segon subíndexs corresponen als fotons *signal* i *idler*, i el tercer al fotó del pols. Tenim, doncs, que els diferents fotons es propaguen de manera diferent pel cristall. Com que l'eix òptic del cristall està contingut en el pla  $XZ$ , aleshores els paràmetres de *walk-off* desapareixen, excepte per a les components  $\hat{x}$  dels fotons del pols i del *signal*,  $\rho_{px} = \rho_p$  i  $\rho_{sx} = \rho_s$ . Recordem que l'estat a la sortida del cristall, i ara sense prendre  $\mathbf{p} = (0, 0)$ , el podem escriure com:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \int d\omega_s d\omega_i d\mathbf{p} d\mathbf{q} \Phi(\omega_s, \omega_i, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ &\times a_s^\dagger(\omega_s, \mathbf{p}) a_i^\dagger(\omega_i, \mathbf{q}) |0, 0\rangle, \end{aligned} \quad (34)$$

amb

$$\Phi(\omega_s, \omega_i, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_0(\omega_s + \omega_i, \mathbf{p}, \mathbf{q}) W(\Delta_K L/2), \quad (35)$$

on  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{q}$  són els moments transversals per al *signal* i l'*idler* respectivament.

Ara, per a la funció del cristall  $W(\Delta_K L/2) = \text{sinc}(\Delta_K L/2) \exp(i\Delta_K L/2)$  tenim que:

$$\begin{aligned} \Delta_K &= k_p(\omega_s + \omega_i, \bar{p}_x + \bar{q}_x, p_y + q_y) + (\bar{p}_x + \bar{q}_x) \tan \rho_p \\ &\quad - k_s(\omega_s, \bar{p}_x, p_y) - \bar{p}_x \tan \rho_s - k_i(\omega_i, \bar{q}_x, q_y), \end{aligned} \quad (36)$$

on  $\bar{p}_x = \alpha p_x + \Omega_s \tan \phi/c$  i  $\bar{q}_x = \alpha q_x + \Omega_i \tan \phi/c$ .

Si pensem que les expressions per a  $k_{p,s,i}$  són lineals en les variacions de freqüències respecte de les

freqüències centrals,  $k_{p,s,i} = k_{p,s,i}^0 + N_{p,s,i}\Omega_{p,s,i}$  i fem que el moment transversal sigui  $\mathbf{p} = (p_x, p_y) = (0, 0)$  i  $\mathbf{q} = (q_x, q_y) = (0, 0)$ , obtenim, a partir de la condició de relació de fases, el pendent o la inclinació de la funció del cristall igualant a zero l'expressió (36):

$$\frac{\Omega_s}{\Omega_i} = -\frac{N_p + \tan \phi \tan \rho_p/c - N_i}{N_p + \tan \phi \tan \rho_p/c - N_s - \tan \phi \tan \rho_s/c} \quad (37)$$

en lloc de

$$\frac{\Omega_s}{\Omega_i} = -\frac{N_p - N_i}{N_p - N_s}, \quad (38)$$

que és el que obtindríem sense utilitzar les xarxes de dispersió.

Aquesta tècnica ens permetrà controlar l'entrellaçament independentment de les característiques del material. En l'expressió (37) veiem com podem variar aquest pendent o inclinació (que correspon a la correlació entre els dos fotons), canviant els paràmetres de la xarxa de dispersió. De fet, l'únic requeriment serà que la relació entre les amplades de la funció del pols i la del cristall compleixin que la segona sigui considerablement més estreta que no pas la primera. Si no fos així, seria la funció del pols la que acabaria determinant la correlació dels fotons a la sortida, i la funció dels polsos sempre ens dona la mateixa correlació  $\omega_s = -\omega_i$ .

A l'hora de calcular els estats i fer la descomposició de Schmidt, ja sabem que el que primer cal fer és tenir el nostre operador o nucli ben determinat, fitat tant en el domini de  $\omega_s$  i  $\omega_i$  com en la seva imatge. Pel que fa a la imatge no tenim cap problema en fitar l'operador, però ja sabem que fitar en el domini és una mica més delicat i que cal assegurar-nos bé que la part que negligim faci que la integral dels operadors  $K_{si}$  pràcticament no variï.

Un dels problemes amb què ens trobem és que, per exemple, la funció del cristall, o fins i tot la del pols, malgrat que pugui semblar el contrari, no estan definides a  $\mathbb{R}^2$ . Per exemple, les funcions dels índexs de propagació respecte de la freqüència tan sols tenen validesa en un cert interval de freqüència. Per aquest motiu, implícitament, quan escrivíem les equacions del pols o de la funció del cristall ja pensàvem que allò no era vàlid per a totes les freqüències. Potser faltaria afegir-hi algun terme que indiqués que tal funció té, a la fi, suport compacte.

Així doncs, tenir suport compacte no és res més que multiplicar les funcions que tenim per la funció,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_r(0) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \quad (39)$$

o podem pensar simplement en filtres per al *signal* i *idler* que aproximim aquesta funció per una exponencial de la manera següent:

$$\mathcal{F}_{s,i}(\omega_{s,i}) = \exp \left[ -(2 \ln 2) \frac{\omega_{s,i}^2}{\sigma^2} \right]. \quad (40)$$

Nosaltres utilitzem un filtre gaussià de 10 nm per tal de solucionar aquesta formalitat i, de fet, podem pensar que aquest podria ser el filtre que s'utilitzaria a l'hora de mesurar l'estat bipartit dels dos fotons. En aquest cas, cal tenir en compte que potser per alguns valors d'inclinació del pols, i així és, el fet d'haver-li posat un filtre variarà l'estat final dels dos fotons. Per exemple, quan el pols i la funció del cristall tenen la mateixa correlació.

L'expressió que utilitzarem per a la funció d'estat serà, ara:

$$\Phi(\omega_s, \omega_i, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_0(\omega_s + \omega_i, \mathbf{p}, \mathbf{q}) W(\Delta_K L/2) \times \mathcal{F}_s(\omega_s) \mathcal{F}_i(\omega_i). \quad (41)$$

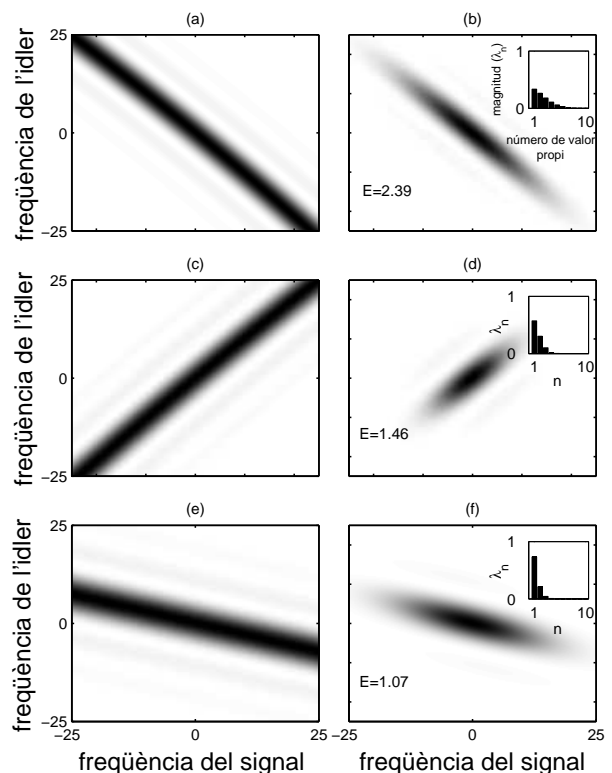


Figura 4: Exemples d'intensitats de la funció del cristall i de la funció d'estat. En (a), (c) i (e) tenim les intensitats de la funció del cristall i en (b), (d) i (f) tenim la intensitat de la funció d'estat. (a) i (b),  $\phi = 39,6^\circ$ ; (c) i (d),  $\phi = -53,2^\circ$  i (e) i (f),  $\phi = 0^\circ$ . També hem inclòs el valor de l'entropia d'entrellaçament, així com els primers valors de la descomposició de Schmidt. Els valors de la freqüència estan en THz. Els càlculs corresponen a un cristall no lineal BBO de longitud  $L = 3mm$ ,  $T_0 = 100$  fs,  $\lambda_p^0 = 400$  nm,  $\lambda_s^0 = \lambda_i^0 = 800$  nm i  $\Delta\lambda_0 = 10$  nm

Així doncs, els fotons *signal* i *idler* tenen les propietats donades pel pols que ha passat per la xarxa de dispersió. D'aquesta manera controlem i modifiquem les

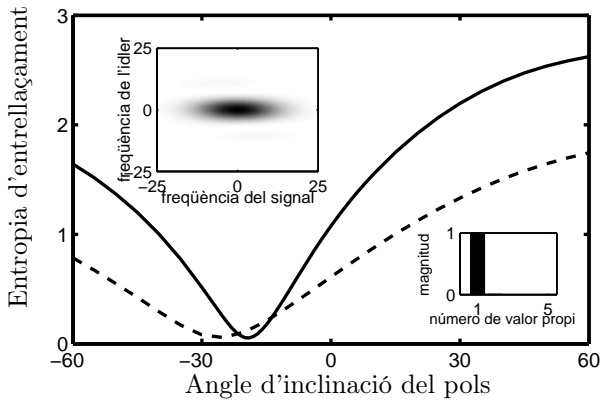


Figura 5: Entropia d'entrellaçament com a funció de l'angle d'inclinació del pols. Línia contínua:  $L = 3$  mm i línia discontinua:  $L = 1,5$  mm. També mostrem la intensitat de la funció d'estat així com la descomposició de Schmidt corresponent per al cas en què tenim entropia d'entrellaçament pràcticament 0 ( $\phi = -19,3^\circ$ ). Les condicions de càlcul són les mateixes que en la figura 4

velocitats de grup actuant en la dispersió angular introduïda als fotons del pols. Aquestes característiques les podem veure reflectides en les figures 4 i 5. En la figura 4 hem dibuixat les intensitats de la funció del cristall  $|W(\omega_s, \omega_i)|^2$  i de la funció d'estat  $|\Phi(\omega_s, \omega_i)|^2$  per a tres casos d'inclinació del pols diferents: màxima i mínima correlació i sense correlació. També s'han introduït els gràfics que mostren el valor dels primers 10 valors propis de la descomposició de Schmidt corresponent i el valor de l'entropia d'entrellaçament. Com ja havíem comentat, la funció del cristall és, en aquest cas, més estreta que no pas la funció del pols, i per això el gràfic de la funció d'estat té la mateixa inclinació que el de la funció del cristall.

En la figura 5 mostrem l'entropia d'entrellaçament de l'estat de la parella de fotons com a funció de l'angle d'inclinació del pols per a dues longituds de cristall diferents. Observem que, per a la longitud més petita, l'entropia d'entrellaçament és, en general, inferior que per a l'altra longitud, ja que els pendents o inclinacions de les funcions del cristall no es estan afectats per aquests paràmetres, però sí les seves amplades. Per al cas del cristall de longitud menor, obtenim una amplada de la funció del cristall molt semblant a la de la funció pols. Observem també que per a  $\phi = 19,3^\circ$  l'entropia d'entrellaçament, corresponent a l'estat en el qual s'ha utilitzat un cristall de  $L = 3$  mm, esdevé pràcticament nul·la. Si observem, en la mateixa figura 5, la intensitat de la funció d'estat, podem veure que aquesta és una funció molt separable i que, per tant, la descomposició de Schmidt, també mostrada en la figura 5, té només un sol valor propi.

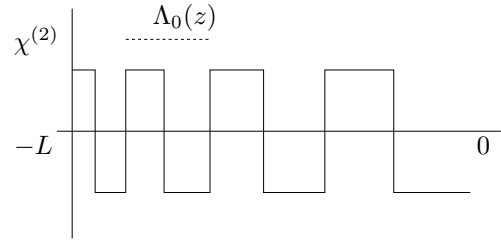


Figura 6: Modulació del coeficient de no-linealitat  $\chi^{(2)}$  amb chirp

### Tècniques de chirp

Utilitzem tècniques de *chirp*, terme provinent de l'anglès i que significa 'modulació de signe'. Consisteixen a introduir una modulació en el coeficient de linealitat  $\chi^{(2)}$ , fent que aquest canviï de signe segons la posició en què ens trobem del cristall. Això provoca que la funció del cristall esdevingui molt més ampla que la corresponent proporció a  $1/L$ . Caldrà veure com controlem aquests paràmetres i quina repercussió tenen en l'estat bipartit de la parella de fotons a la sortida del procés.

El cristall està dividit longitudinalment en diferents parts. A cada una d'aquestes parts s'aplica un camp elèctric per tal de modificar el coeficient  $\chi^{(2)}$ , i això fa que aquest vagi alternant el signe. La freqüència d'oscil·lació d'aquesta modulació l'anomenarem *període fonamental del cristall* i l'escriurem  $\Lambda_0$ .

Quan les parts en què hem dividit el cristall són iguals, tenim que el període fonamental és constant al llarg del cristall i la funció d'aquest és:

$$W(\omega_s, \omega_i) = \text{sinc}(\Delta_K L/2) \exp(i\Delta_K L/2), \quad (42)$$

on  $\Delta_K = k_p(\omega_p) - k_s(\omega_s) - k_i(\omega_i) - 2\pi/\Lambda_0$  i  $\Lambda_0$  és el període fonamental del cristall.

A les freqüències centrals de treball,  $\omega_s^0$ ,  $\omega_i^0$  i  $\omega_p^0$ , es compliran les condicions de relació de fases, però ara hi apareix un terme addicional a causa de la modulació del coeficient de no-linealitat,  $\chi^{(2)}$ . Aquesta nova relació s'anomena *quasi-phase matching*, és a dir, quasirelació de fases. Si fem doncs  $\Delta_K(\omega_s^0, \omega_i^0, \omega_p^0) = 0$ , per a cada parella de fotons es complirà:

$$k_s(\omega_s^0) + k_i(\omega_i^0) + \frac{2\pi}{\Lambda_0} = k_p(\omega_p^0). \quad (43)$$

En el cas dels cristalls amb *chirp*, la modulació del cristall es fa de manera que les parts en què s'ha dividit el cristall tinguin una mida diferent i, així, la modulació de  $\chi^{(2)}$  tindrà un període variable com es mostra en la figura 6. Aquesta modulació provoca que  $\Delta_k$  no tan sols depengui de les longituds d'ona, sinó que sigui variable al llarg del cristall. Per tant, la funció del cristall no serà, ara, una *sinc*, sinó que caldrà escriure-la com una integral al llarg del cristall. Aquesta integral no la podem resoldre analíticament per donar-ne alguna



expressió més simple, com era el cas de l'expressió (42).

$$W(\omega_s, \omega_i) = \int_{-L}^0 \exp[i\Delta_K(z)z] dz, \quad (44)$$

on  $\Delta_K(z) = k_p(\omega_p) - k_s(\omega_s) - k_i(\omega_i) - [2\pi/(\Lambda_0 + \Lambda z)]$  i notarem que  $\Delta_{K_0} = k_p(\omega_p) - k_s(\omega_s) - k_i(\omega_i)$ .  $\Lambda z$  representa la desviació respecte del valor de quasirelació de fases, en cada punt del cristall, i  $\Lambda L$  és la màxima desviació o el tant per cent de *chirp*. És a dir que, quan ens trobem a la posició  $z = 0$  del cristall (al final del cristall), els índexs compleixen la condició de quasirelació de fases. En canvi, per a  $z = -L$  (començament del cristall) això no passa.

Per tal de fer-nos una idea de com el *chirp* canviarà la funció del cristall, calcularem i dibuixarem el perfil d'aquesta funció. Prenent l'expressió (44) podem representar la funció  $W(\omega_s, \omega_i)$  en funció de  $\Delta_{K_0}$ . És clar que, quan el cristall no tingui *chirp*, obtindrem una *sinc*, amb la corresponent exponencial complexa centrada en  $2\pi/\Lambda_0$  o, el que és el mateix, centrada en  $\Delta_{K_0}(\omega_p^0, \omega_s^0, \omega_i^0)$ .

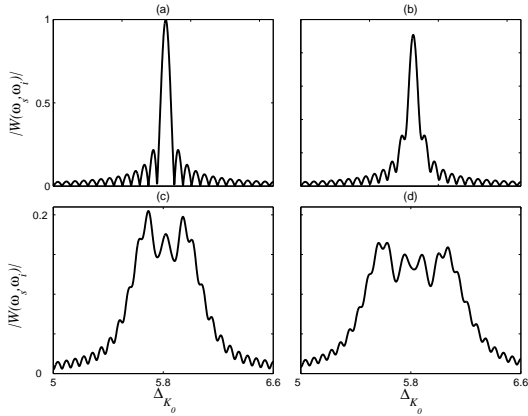


Figura 7: Mòdul de la funció del cristall variant  $\Delta_{K_0}$ . En (a) tenim un cristall sense *chirp*, en (b) amb un 1 % de *chirp*, en (c) d'un 5 % de *chirp* i en (d) un 7 % de *chirp*.  $\Delta_{K_0}$  està expressat en  $10^5$  i els seus valors corresponen a un cristall no lineal KTP amb els valors de longitud d'ona central de  $\lambda_p^0 = 406$  nm,  $\lambda_s^0 = \lambda_p^0 = 812$  nm. La longitud del cristall és de  $L = 1$  mm

En la figura 7 trobem representats els mòduls de la funció del cristall en funció de  $\Delta_{K_0}$  per a diferents quantitats de *chirp*. Veiem clarament com canvia la funció del cristall i com en creix l'amplada a mesura que augmentem el valor del *chirp*.

Recordem que l'estat bipartit dels fotons a la sortida del cristall ve donat per

$$|\Psi\rangle = \int d\omega_s d\omega_i \Phi(\omega_s, \omega_i) \mathcal{F}_s(\omega_s) \mathcal{F}_i(\omega_i) \times a_s^\dagger(\omega_s) a_i^\dagger(\omega_i) |0, 0\rangle, \quad (45)$$

amb la funció d'estat  $\Phi(\omega_s, \omega_i) = E_0(\omega_s + \omega_i)W(\omega_s, \omega_i)$ ; les expressions per a  $E_0$  i  $W$  són les de les equacions (8) i (44).  $\mathcal{F}_{s,i}$  són filtres com els de l'equació (40).

Per al cas del *chirp* ens preocupem tan sols d'estudiar les propietats de l'estat bipartit dels fotons, és a dir que no utilitzem un filtre com el que s'utilitzaria per detectar aquests fotons, sinó que utilitzem filtres molt més grans, de 100 i 400 nm. Els posem només per salvar la formalitat d'assegurar que el nucli dels operadors  $K_{si}(\omega_1, \omega_2)$  tingui suport compacte i pel fet que les expressions per als índexs de reflexió  $n(\omega)$  tenen un rang de validesa. Ara ens disposem a mostrar resultats concrets de l'aplicació de tècniques de *chirp* per al control de l'entrellaçament en un cas particular.

Considerem, primerament, el procés d'SPDC, amb un cristall no lineal uniaxial KTP, de tipus II *yzy*, amb una longitud  $L = 1$  mm. Aquesta vegada, la direcció de propagació  $\hat{z}$  coincideix amb l'eix principal del cristall i, per tant, els subíndexs *yzy* simbolitzen la direcció de la polarització de cada fotó. Volem veure com el *chirp* afecta l'entrellaçament de l'estat bipartit dels dos fotons a la sortida del procés d'SPDC. Així doncs, calcularem, per a diferents *chirps*, l'entrellaçament de l'estat obtingut.

Com que estem treballant amb la freqüència, que és una variable contínua, en fer la descomposició de Schmidt s'obtenen infinits valors propis, però no tots són necessaris per calcular l'entrellaçament. Utilitzarem, doncs, el paràmetre quantitat d'entrellaçament  $K = (1/\sum_k \lambda_k^2)$  per tal de mostrar la quantitat de valors propis actius. Recordem que aquest paràmetre ha estat definit anteriorment quan parlàvem d'entrellaçament. Notem de nou que  $K = 1$  representa un estat no entrellaçat.

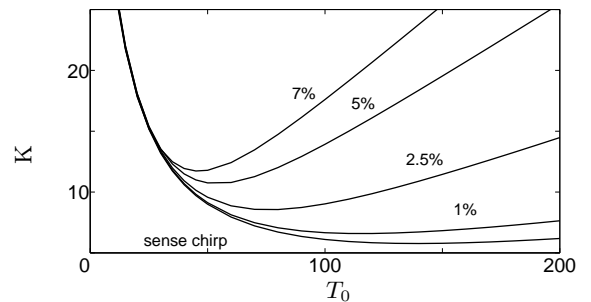


Figura 8: Quantitat d'entrellaçament en funció de l'amplada en temps del pols per a diferents percentatges de *chirp*.  $T_0$  expressat en fs. S'ha utilitzat un filtre de 100 nm

La figura (8) ens mostra els valors de la  $K$  en funció de l'amplada del pols d'entrada per a diferents *chirps*. Observem que, reduint l'amplada en temps del pols, aconseguim valors molt grans d'entrellaçament i, a més a més, la diferència entre tenir o no *chirp* resulta negligible. En canvi, quan utilitzem amplades de pols més

grans, la diferència entre els diferents *chirps* esdevé considerable i, a més a més, veiem que podem aconseguir els mateixos valors d'entrellaçament, per exemple, si prenem un pols molt curt en temps o si, per contra, prenem un pols molt més gran i utilitzem un cristall *chirpat*.

Per exemple, prenent un cristall sense *chirp* i un pols de 45 fs obtenim el mateix valor d'entrellaçament que si el cristall té un 7% de *chirp* i el pols és de 200 fs. Podem observar en la figura (10) les intensitats de les funcions que intervenen en l'estat bipartit dels fotons, precisament pels casos comentats en l'exemple.

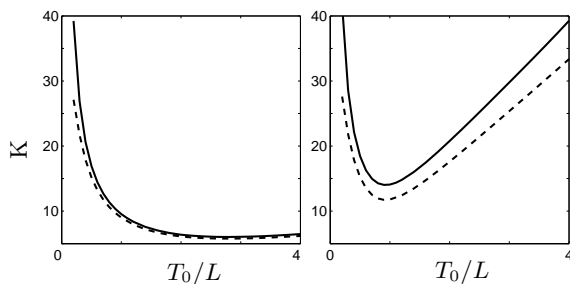


Figura 9: Quantitat d'entrellaçament en funció de  $T_0/L$  expressat en  $10^{10}$ . A l'esquerra, corbes per a cristalls sense *chirp* amb filtres de 100 i 400 nm. A la dreta, corbes per a cristalls amb un 7% de *chirp* i filtres de 100 i 400 nm. Les corbes en línia contínua corresponen a filtres de 400 nm i les discontinües a filtres de 100 nm.  $L = 1$  mm

Per tal d'evidenciar la diferència entre utilitzar filtres de 100 nm i 400 nm, en la figura (9) hem dibuixat les corbes de quantitat d'entrellaçament de cristalls sense *chirp* i amb un *chirp* d'un 7% per a 100 i 400 nm. Cal remarcar que la diferència entre un filtre i un altre resulta més important quan treballem amb polsos curts en temps. Això és perquè, justament, els polsos curts en temps tenen una gran amplada en freqüència i, per tant, els filtres els limiten més. En canvi, per a polsos més llargs, la diferència entre l'aplicació d'un o altre filtre és menys notable perquè aquests ja no limiten tant les nostres funcions, sobretot la del pols. Pel que fa a les diferències entre utilitzar o no *chirps*, veiem que les corbes per al cas d'un *chirp* del 7% difereixen molt més que no les que no tenen *chirp*. La raó és la mateixa que en el cas de polsos llargs o curts; el *chirp* fa que la funció del cristall sigui molt més ampla i, per tant, la utilització d'un o altre filtre limita més o menys el domini d'aquesta funció.

En la figura (10) es mostren les intensitats de la funció del pols  $|E_0(\omega_s + \omega_i)|^2$ , de la funció del cristall  $|W(\omega_s, \omega_i)|^2$  i de la funció d'estat  $|\phi(\omega_s, \omega_i)|^2$  per a dos casos, un en què el cristall no té *chirp* i el pols d'entrada és de 45 fs, i un altre en què el cristall té un 7% de *chirp* i el pols és de 200 fs. També mostrem els perfils de les funcions del pols i la funció del cristall, així com els valors propis més significatius de la descomposició de Schmidt.

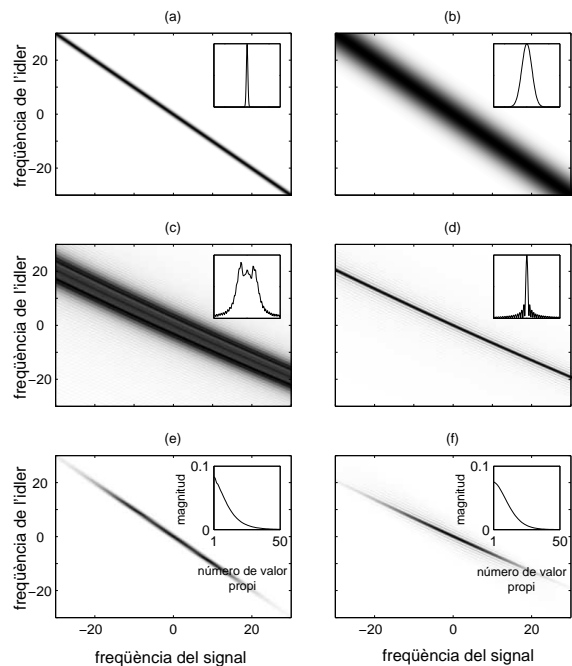


Figura 10: Intensitat de les funcions del pols,  $E_0$ , (a) i (b), del cristall,  $W$ , (c) i (d), i de la funció d'estat,  $\Phi$ , (e) i (f). En (a), (c) i (e) tenim els dibuixos corresponents a un cristall amb un *chirp* del 7% i un temps de pols de  $T_0 = 200$  fs. En (b), (d) i (f) tenim els dibuixos corresponents a un cristall sense *chirp* i  $T_0 = 45$  fs. També hem dibuixat els perfils de les funcions del pols i del cristall en (a), (b), (c) i (d), i en (e) i (f) hem dibuixat els primers 50 valors de la descomposició de Schmidt. Els valors de la freqüència estan expressats en THz

sició de Schmidt. Ambdós estats donen un mateix valor d'entrellaçament  $\approx 20$ .

Observem en aquesta figura (10) com el *chirp* canvia la forma de la funció del cristall i l'exemplar considerablement. També veiem en les gràfiques dels valors propis que, per als dos casos, el nombre de modes actius és similar. Notem, però, que és necessari utilitzar més de 100 modes per tal de calcular-ne l'entrellaçament amb una precisió de dos decimals.

Sabem que, quan no tenim cristalls amb *chirp*, la corba d'entrellaçament depèn només de la relació entre  $T_0$  i  $L$ . És a dir que si en la figura 8 haguéssim representat la quantitat d'entrellaçament en funció de  $T_0/L$ , com hem fet en la figura 9, aleshores les corbes corresponents al cristall sense *chirp* haurien estat exactament les mateixes per a un cristall de  $L = 1$  mm, com el nostre o un altre d'una altra longitud. La pregunta que sorgeix és òbvia: passa el mateix quan el cristall té *chirp*? És a dir, l'estat bipartit dels dos fotons continua depenent tan sols de la relació entre l'amplada del pols i la longitud del cristall? Doncs la resposta és que no; amb el *chirp* l'amplada de la funció del cristall no és proporcional a  $L$ , com potser hauríem pogut pensar.

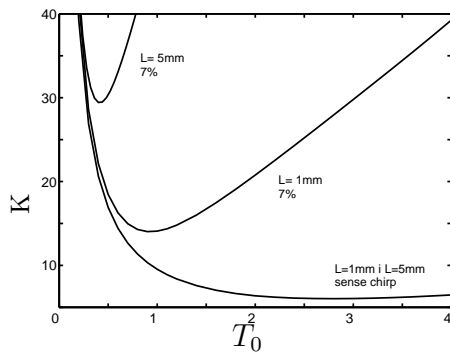


Figura 11: Quantitat d'entrellaçament en funció de  $T_0/L$  expressat en  $10^{10}$ . Corbes corresponents a cristalls de  $L = 1$  i  $L = 5$  mm, amb un 7 % de *chirp* i sense *chirp*. Filtres de 400 nm

L'augment de l'amplada de la funció del cristall depèn de la longitud del cristall. De fet, si fixem  $G_0$ , el valor final de l'amplada de la funció del cristall resulta ser pràcticament el mateix, independentment de la longitud del cristall. El que realment sí que canvia és la forma d'aquesta funció.

En la figura 11 mostrem aquest fet pintant les corbes de quantitat d'entrellaçament en funció de la relació  $T_0/L$ , corresponents a cristalls sense *chirp* i cristalls amb un 7% de *chirp*, amb longituds de  $L = 1$  mm i  $L = 5$  mm. Observem que les corbes dels cristalls sense *chirp* són idèntiques; en canvi, això no passa en els cristalls amb *chirp*. Aquest fet significa que per tal d'obtenir bones actuacions del *chirp* serà necessari escollir bé la longitud del cristall i el seu període fonamental  $\Lambda_0$ .

## Conclusions

Al llarg d'aquest treball s'han estudiat els estats bipartits en freqüència de parelles de fotons a la sortida d'un procés d'SPDC, en particular, el grau d'entrellaçament. Després s'han proposat dues tècniques per controlar aquests estats.

Primerament, s'ha vist quins eren els paràmetres d'interès per tal de controlar les funcions d'ona dels estats en freqüència dels fotons. Les característiques del cristall ens fixen les velocitats de propagació segons les diferents polaritzacions i, per tant, ens determinen el grau de correlació de la funció del cristall. La duració del pols,  $T_0$ , juntament amb la longitud del cristall,  $L$ , són paràmetres que afecten tan sols les amplades de les respectives funcions. Així, doncs, controlant el material i la mida del cristall i la duració del pols, podem controlar molt bé les propietats de l'estat bipartit dels fotons a la sortida del procés d'SPDC.

Aquests paràmetres, que ens donen el control dels estats bipartits dels fotons, resulten molt complicats de modificar fins a certs valors desitjats. Això comporta que, per disposar d'estats amb propietats molt diferents,

cal tenir diversos cristalls i diversos polsos, i alguns dels valors necessaris potser són, a la fi, impossibles d'aconseguir. Aquest fet ens porta a proposar tècniques de control dels estats que no es basin en la modificació dels paràmetres dels polsos o els materials del cristall. Es proposen dues tècniques per aconseguir-ho.

La primera consisteix a separar espectralment el pols amb una xarxa de difracció, de manera que cada component espectral es transmet a través del cristall amb diferents velocitats. Així s'aconsegueix variar directament la correlació de la funció d'estat i, per tant, amb un mateix cristall s'obtenen diferents estats amb diferents propietats. En resum, aquesta tècnica utilitza un sol pols i un sol cristall; només cal canviar la mida de la xarxa de difracció i podrem disposar d'estats amb graus molt diversos d'entrellaçament.

La segona tècnica proposada consisteix a modular el coeficient de no-linealitat,  $\chi^{(2)}$ , del cristall amb un període variable. S'ha vist que, en funció de la variabilitat d'aquest període, es pot augmentar l'amplada de la funció del cristall. I malgrat que aquesta tècnica no fa variar gaire les correlacions de la funció d'estat, sí que ens permet obtenir diferents valors d'entrellaçament. Per exemple, hem vist que amb polsos d'uns centenars de femtosegons, es poden obtenir els mateixos valors d'entrellaçament que si es treballa amb polsos d'unitats de femtosegons.

## Bibliografia

- LAW, C.K., WALMSLEY, I. A. I EBERLY, J.H, Continuous frequency entanglement: effective finite Hilbert space and entropy control, *Physical Review Letters*, **84**, 5304 (2000).
- GRICE, W. P., U'RUEN, A. B. I WALMSLEY, I. A., Eliminating frequency and space correlations in multiphoton states, *Physical Review A*, **64**, 063815 (2001).
- WEHRL, A., General properties of entropy, *Review of Modern Physics*, **50**, 221 (1978).
- PARKER, S., BOSE, S. I PLENIO, M. B., Entanglement quantification and purification in continuous-variable systems, *Physical Review A*, **61**, 032305 (2000).
- TORRES, J. P, MACIÀ, F., CARRASCO S. I TORNER, L., Engineering the frequency correlation of entangled two-photon states by achromatic phase matching, *Optics Letters*, **30**, 314 (2005).