Paritat i electromagnetisme

David Miralles
GTAM - Grup de Recerca en Tecnologies Audiovisuals i Multimedia
Enginyeria i Arquitectura La Salle, Universitat Ramon Llull, Quatre Camins 2, 08022 Barcelona, Catalunya
davidme@salle.url.edu

Resum

Els camps elèctrics i magnètics es poden representar mitjançant vectors que no es comporten de la mateixa manera sota inversions espacials. Tenint per fil conductor la transformació de paritat buscarem una formulació unificada del camp electromagnètic.

1 Reflexions i l'operador de paritat

La imatge que presenta un objecte davant d'un mirall és un bon exemple del que s'acostuma a anomenar *reflexió* [1]. Ens pot semblar que el que s'hi reflecteix és exactament la realitat, però, si hi parem atenció veurem un petit detall que no per conegut deixa de ser curiós. A la fotografia (figura 1), l'espadatxí duu l'espasa a la dreta, però el reflex la duu a l'esquerra. S'espera que tot el que faci la figura, el seu reflex ho reprodueixi. Serà així? O potser s'hauran de reformular les lleis de la física a l'altra banda del mirall? Els físics sempre havien esperat que aquestes lleis fossin les mateixes a banda i banda del mirall. El rebombori que hi hagué quan es descobrí que la interacció feble no seguia aquests costums!

Figura 1: *Realitat i reflexió*

La reflexió, però, no inverteix totes les direccions de l'espai. Només cal veure que la reflexió de la figura no és cap per avall. Quan s'inverteixen totes les direccions de l'espai es diu que s'ha efectuat una transformació de paritat.

Suposem que per descriure la posició d'un objecte utilitzem un vector $\boldsymbol{r}$. Fer inversió espacial, és a dir, canviar el sentit de les direccions espacials, ens porta a descriure des de la situació original (punt de vista actiu) l'objecte invertit mitjançant el vector $-\boldsymbol{r}$. És clar que des del punt de vista invertit (passiu), la posició de l'objecte segueix sent $\boldsymbol{r}$, ja que aquest punt de vista també ha patit el procés d'inversió (figura 2). Els vectors que es comporten com hem descrit s'anomenen *vectors polars*, Feynman els anomenava *vectors honorables* [2].

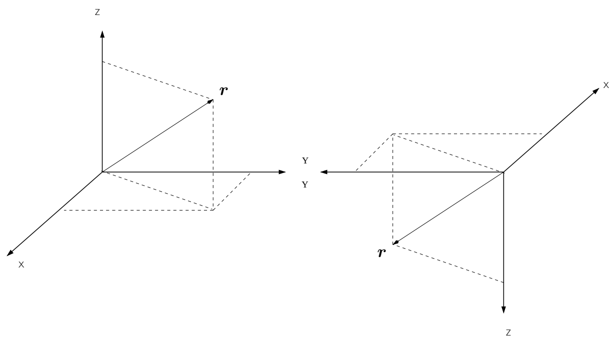

Figura 2: *Vector de posició i la seva inversió espacial*

Un aspecte important de la inversió espacial és que no es pot efectuar de manera contínua partint d'una posició inicial. És a dir, si mitjançant rotacions i translacions movem els eixos invertits de la figura anterior veurem que és impossible recuperar els originals. Es diu que són espais amb orientacions diferents. Com a conseqüència d'això hi ha magnituds, relacionades amb els girs, que tot i considerar-se tradicionalment vectorials es comporten de manera diferent un cop les hem invertit espacialment. Estudiem-ho; vegem, per exemple, el cas del moment angular. El moment angular es defineix com:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \tag{1}$$

on $\boldsymbol{r}$ és el vector de posició i $\boldsymbol{p}$ el moment lineal. És d'esperar la mateixa definició després de la inversió. Per poder invertir els elements d'aquesta expressió, definirem l'operador de paritat $\mathcal{P}$. Aquest operador serà l'encarregat d'invertir els vectors. Cal, però, decidir si treballarem transformant de manera activa o passiva. Recordem que la passiva és la que considera el punt de vista de l'espai invertit de manera que canviarà l'orientació de l'espai però $\mathcal{P}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$, ja que l'espai sencer s'ha invertit. El punt de vista actiu descriu les transformacions des de l'espai original, d'aquesta manera conservem l'orientació però, ara, $\mathcal{P}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{r}$. Nosaltres adoptarem el punt de vista actiu. Així, doncs, tenim que pel vector de posició i pel vector de moment lineal,

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{r}\,, \quad \mathcal{P}(\boldsymbol{p}) = -\boldsymbol{p}. \tag{2}$$

Aplicant, ara, l'operador paritat (i considerant-lo un operador lineal) sobre el moment angular obtenim,

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{L}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{r}) \times \mathcal{P}(\boldsymbol{p}) = (-\boldsymbol{r}) \times (-\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{L}. \tag{3}$$

Veiem, doncs, que, a diferència del vector de posició i del moment lineal, el moment angular no es comporta com un *vector honorable*, ja que és invariant sota la transformació de paritat:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}. \tag{4}$$

Això ha portat a diferenciar dos tipus de vectors: els axials o pseudovectors, invariants sota inversió espacial, i els polars que no ho són.

2 El camp magnètic, un vector axial

Més enllà de les definicions, com la del moment angular, hi ha lleis físiques on també participen vectors axials. La llei de Lorentz n'és un bon exemple. Aquesta llei descriu la trajectòria d'una partícula amb càrrega q i amb velocitat $\boldsymbol{v}$ sotmesa a un camp elèctric $\boldsymbol{E}$ i magnètic $\boldsymbol{B}$. La força que actua sobre aquesta partícula ve donada per

$$\boldsymbol{f} = q\,\boldsymbol{E} + q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{5}$$

De la segona llei de Newton sabem que el moment lineal i la força tenen el mateix caràcter vectorial, per tant $\mathcal{P}(\boldsymbol{f}) = -\boldsymbol{f}$. La càrrega, que és un escalar, no transforma sota paritat i, llavors, el camp elèctric, igual que la força, és un vector polar i transformarà sota paritat,

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{E}) = -\boldsymbol{E}. \tag{6}$$

Pel que fa al segon sumand de (5), el vector velocitat és un vector polar i, per tant,

$$\mathcal{P}(q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = q\,(-\boldsymbol{v}) \times \mathcal{P}(\boldsymbol{B}). \tag{7}$$

Aquest terme, igual que el primer sumand, ha de comportar-se sota paritat de la mateixa manera que ho farà la força. Així, caldrà que

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}. \tag{8}$$

Veiem, doncs, que el camp elèctric i el magnètic no es comporten de la mateixa manera sota inversió espacial. El camp elèctric és un vector polar i el magnètic un vector axial.

Sabem que la unificació de l'electricitat i el magnetisme ens porta al que s'anomena *camp electromagnètic*. Podem unificar també la formulació? Podem descriure el camp electromagnètic amb una sola entitat matemàtica més enllà dels vectors polars i axials?

3 L'àlgebra geomètrica

Una manera de respondre aquestes preguntes és a través de l'àlgebra geomètrica [3]. La història d'aquesta àlgebra comença el 1844, any en el qual un desconegut matemàtic alemany, Hermann Grassmann, publicà el seu treball sobre la teoria de l'extensió on sembrava les bases de la teoria dels espais vectorials n-dimensionals i del que més endavant s'anomenaria *àlgebra exterior* [4]. Aquesta teoria, permeté a Grassmann una primera aproximació algèbrica a geometries afins de qualsevol dimensió. Al mateix temps, William R. Hamilton publicà els seus primers articles sobre els quaternions, que tenen l'origen en una generalització dels nombres complexos i permeten treballar en el que avui anomenem *espai euclidià*, això sí, limitats a les tres dimensions. El 1878 William K. Clifford sintetitzà les dues teories en el que ell mateix anomenà *àlgebra geomètrica*. Malauradament, la mort de Grassmann l'any anterior i la del mateix Clifford l'any següent dugueren l'àlgebra geomètrica a l'oblit. L'any 1886 Josiah W. Gibbs presentà l'àlgebra vectorial, base de la que s'estudia actualment i que ens ha dut als vectors polars i axials. Vegem què pot aportar-hi l'àlgebra geomètrica.

Començarem a partir d'un espai vectorial euclidià de dues dimensions [5]. Un vector arbitrari expressat en una base ortonormal d'aquest espai l'escriurem com:

$$\boldsymbol{u} = u_1\,\mathbf{e}_1 + u_2\,\mathbf{e}_2, \tag{9}$$

on $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$ i $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$.

Considerarem que el quadrat d'un vector és el quadrat del seu mòdul i segons Pitàgores tindrem:

$$\mathbf{u}^2 = u_1^2 + u_2^2. \tag{10}$$

Definim ara un nou producte, el producte geomètric, que denotarem per juxtaposició dels factors, i de moment només en direm que compleix la propietat distributiva respecte de la suma. D'aquesta manera:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\mathbf{u} &= (u_1\,\mathbf{e}_1 + u_2\,\mathbf{e}_2)(u_1\,\mathbf{e}_1 + u_2\,\mathbf{e}_2)\\ &= u_1^2\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + u_2^2\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + u_1 u_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1).\end{aligned} \tag{11}$$

Si a partir d'aquesta expressió volem recuperar el quadrat del mòdul del vector $\mathbf{u}$, el producte escalar definit anteriorment no és l'única solució, ja que les condicions

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 &= 1, \end{aligned} \tag{12}$$

també permeten trobar el resultat (10) i defineixen el que s'anomena *producte geomètric*; *de quadrat unitat* i *anticommutatiu.*

Cal esbrinar, ara, quin és el significat de $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$. Aquests dos elements no són escalars ja que si ho fossin commutarien amb els vectors, cosa que com podem veure no fan si demanem que el producte geomètric sigui associatiu:

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2. \tag{13}$$

Una altra opció és que siguin vectors de l'espai euclidià. Aquests vectors tenen quadrat positiu, en canvi:

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = -(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = -1. \tag{14}$$

Per tant, tot sembla indicar que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ són elements d'un nou tipus. Un vector indica una direcció, un sentit i un mòdul, però aquest no és l'únic element geomètric possible de l'espai. En un espai de dues dimensions a més dels vectors també hi ha una superfície.[1] Dos vectors no colineals del nostre espai ens permetran definir el pla. Igual que els vectors s'han associat a fragments de recta orientats, aquests nous elements es poden considerar fragments de pla orientats. El pla que formen té una certa àrea i la seva orientació ve donada segons el sentit de gir amb què es recorre la frontera del pla (figura 3).

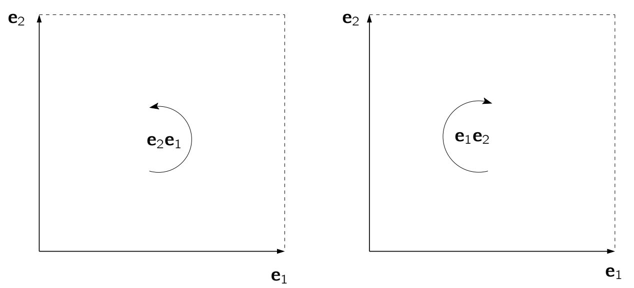

Figura 3: *Plans en dues dimensions amb orientacions diferents*

Dels productes geomètrics següents:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, \\ (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 &= (-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \\ (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)(-\mathbf{e}_1) &= -\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_2, \\ (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)(-\mathbf{e}_2) &= (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \end{aligned} \tag{15}$$

[1] Si l'espai fos de tres dimensions hi trobaríem infinites superfícies i, a més, volum.

veiem[2] que $\mathbf{e}_{21}$ gira noranta graus el vector $\mathbf{e}_1$ en el sentit antihorari i dóna com a resultat $\mathbf{e}_2$; en la segona equació girem $\mathbf{e}_2$ noranta graus més arribant a $-\mathbf{e}_1$ i així seguim fins a tornar al vector original $\mathbf{e}_1$. De la mateixa manera però generant girs en sentit contrari actuaria $\mathbf{e}_{12}$. Així, doncs, aquests elements, que anomenarem *bivectors*, estan relacionats amb el pla i el seu sentit de gir.

En resum: una combinació lineal d'escalars, de vectors $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i del bivector $\mathbf{e}_{12}$ forma l'element més general de l'àlgebra geomètrica de dues dimensions.

Coneixent el cas de dues dimensions és fàcil generar l'àlgebra geomètrica donat un espai vectorial de tres dimensions. Aquesta àlgebra, que anomenarem *àlgebra de l'espai*, es designa per Cl_3 i té per elements: escalars, vectors, bivectors i trivectors. Els elements de la base podem escriure'ls com:

$$\text{base d'escalars:} \quad \{1\}, \tag{16}$$

$$\text{base de vectors:} \quad \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \tag{17}$$

$$\text{base de bivectors:} \quad \{\mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{32}\}, \tag{18}$$

$$\text{base de trivectors:} \quad \{\mathbf{e}_{123}\}. \tag{19}$$

Un altre cop, a causa del teorema de Pitàgores, els vectors $\mathbf{e}_i$ de la base tenen per quadrat $+1$. Amb un petit càlcul podem veure que els bivectors tenen quadrat -1, igual que l'element de volum, el trivector.

En aquesta àlgebra no hi ha elements de grau superior al trivector ja que només disposem de tres elements generadors. Si provem de fer el producte geomètric entre un trivector i un vector, no apareix un suposat quadrivector, sinó un bivector:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{123}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1, \\ &= +\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{20}$$

Qualsevol altre producte que assagem també recau en un element de l'àlgebra.

Vegem com s'obté el producte vectorial usant aquesta formulació. Suposem que volem calcular el moment angular d'una partícula que ens ve descrita per un vector de posició $\boldsymbol{r}$ i un moment lineal $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{r} = r_1\,\mathbf{e}_1 + r_2\,\mathbf{e}_2 + r_3\,\mathbf{e}_3 \tag{21}$$

$$\boldsymbol{p} = p_1\,\mathbf{e}_1 + p_2\,\mathbf{e}_2 + p_3\,\mathbf{e}_3. \tag{22}$$

Tradicionalment, el producte vectorial entre aquests dos vectors es fa a través d'un determinant i s'obté com a resultat un nou vector que és perpendicular al pla que formen els vectors originals. És a dir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = (r_2p_3 - r_3p_2)\,\mathbf{e}_1 + (r_3p_1 - r_1p_3)\,\mathbf{e}_2 \\ + (r_1p_2 - p_1r_2)\,\mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{23}$$

[2] A partir d'ara compactarem la notació escrivint: $\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j \equiv \mathrm{e}_{ij}$.

Si en lloc de fer el producte vectorial fem el producte geomètric,

$$\boldsymbol{rp} = r_1 p_1 + r_2 p_2 + r_3 p_3 + (r_2 p_3 - r_3 p_2)\,\mathbf{e}_{23} + (r_3 p_1 - r_1 p_3)\,\mathbf{e}_{13} + (r_1 p_2 - p_1 r_2)\,\mathbf{e}_{12} \tag{24}$$

el resultat és un escalar i un bivector. L'escalar correspon al producte escalar dels vectors i el bivector a l'anomenat *producte exterior* o *de Grassmann*. Aquest últim representa el pla format pels dos vectors i els seus coeficients són els mateixos que els de (23).

Així, doncs, podem considerar el moment angular com l'element de grau parell (bivector) del producte geomètric $\boldsymbol{rp}$. Això s'acostuma a escriure com:

$$\boldsymbol{L} = \langle \boldsymbol{rp} \rangle_2\,. \tag{25}$$

Tractar el resultat d'un producte vectorial com un bivector ens evita introduir dimensions artificials. Part del resultat del producte geomètric de dos vectors pertany al pla que formen aquests (com ja hem dit l'altra part és el producte escalar, la projecció entre ells) i no pas a un espai ortogonal com fa el producte vectorial. Això permet definir el moment angular dins d'un espai vectorial amb només dues dimensions, cosa que amb el producte vectorial no és possible. A més, el producte geomètric es pot estendre a qualsevol dimensió sense alterar-ne la definició.

Anteriorment hem vist que els vectors axials estan lligats als girs (moment angular, camp magnètic) i, operacionalment, al producte vectorial. Ara hem mostrat, a través del moment angular, que hi ha una associació unívoca entre un vector axial i un bivector. El camp magnètic que també és un vector axial dins l'àlgebra de l'espai el podem descriure com un bivector:

$$\boldsymbol{B} = B_1\,\mathbf{e}_{23} + B_2\,\mathbf{e}_{13} + B_3\,\mathbf{e}_{12}. \tag{26}$$

D'altra banda, el camp elèctric com a vector polar seguirà representant-se mitjançant un vector dins l'àlgebra de l'espai:

$$\boldsymbol{E} = E_1\,\mathbf{e}_1 + E_2\,\mathbf{e}_2 + E_3\,\mathbf{e}_3. \tag{27}$$

Llavors el camp electromagnètic el podem expressar com:

$$\boldsymbol{F} = E_1\,\mathbf{e}_1 + E_2\,\mathbf{e}_2 + E_3\,\mathbf{e}_3 + B_1\,\mathbf{e}_{23} + B_2\,\mathbf{e}_{13} + B_3\,\mathbf{e}_{12}, \tag{28}$$

on $\boldsymbol{F}$ designa el camp electromagnètic en honor a Faraday.

4 Paritat i bivectors

Recordem que l'operador paritat deixa invariants els vectors axials i canvia de sentit els vectors polars. Què passarà amb els bivectors? Hem vist que un bivector ens dóna informació del pla i de la seva orientació. Per exemple, a la figura 3 $\mathbf{e}_{21}$ dóna una orientació, en aquest cas: de $\mathbf{e}_1$ cap a $\mathbf{e}_2$ pel camí més curt. Vegem, ara, a la figura següent (figura 4) com després de la inversió espacial és manté l'orientació i, per tant, el bivector no canviarà.

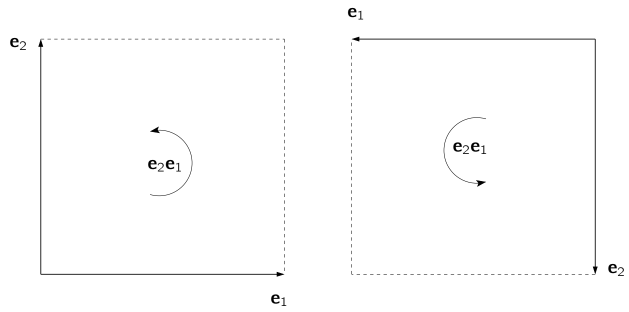

Figura 4: *Sota inversió espacial el bivector manté l'orientació*

Això mateix, de manera algèbrica, utilitzant els elements de la base, ho podem escriure com:

$$\mathcal{P}(\mathbf{e}_{ij}) = \mathcal{P}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \mathcal{P}(\mathbf{e}_i)\mathcal{P}(\mathbf{e}_j) = -\mathbf{e}_i(-\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_{ij}. \tag{29}$$

Ara estem en condicions d'aplicar l'operador paritat al camp electromagnètic. El camp elèctric, descrit per un vector polar, quedarà invertit. El camp magnètic, descrit per un bivector, segons hem vist, no canviarà.

5 Àlgebres isomorfes i l'espai de Minkowski

D'àlgebres geomètriques n'hi ha infinites tot i que estan ben classificades [6]. Per distingir-les només ens cal la dimensió de l'espai vectorial i el producte escalar dels vectors de la base. Hem vist que en l'àlgebra de l'espai el producte d'un vector ortonormat de la base per si mateix és $+1$. És per això que aquesta àlgebra es designa per Cl_3. El Cl fa referència a Clifford i el 3 als tres elements de la base ortonormada amb quadrat $+1$. Podem, però, anar més enllà. Les àlgebres geomètriques també es poden generar quan el quadrat dels elements de la base ortonormada és -1. Aquest és el cas de l'espaitemps de Minkowski.[3] L'àlgebra geomètrica formada a partir d'aquest espai la designarem per $Cl_{3,1}$, per indicar que el que tenim són tres vectors ortonormats de quadrat positiu i un de quadrat negatiu. $Cl_{3,1}$ l'anomenarem *àlgebra geomètrica de l'espaitemps*. La base d'aquesta àlgebra ve donada per setze elements: un escalar, quatre vectors $\{\bar{\mathbf{e}}_0, \bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$, sis bivectors $\{\bar{\mathbf{e}}_{01}, \bar{\mathbf{e}}_{02}, \bar{\mathbf{e}}_{03}, \bar{\mathbf{e}}_{23}, \bar{\mathbf{e}}_{13}, \bar{\mathbf{e}}_{12}\}$ (tres espaitemps i tres espacials), quatre trivectors $\{\bar{\mathbf{e}}_{012}, \bar{\mathbf{e}}_{013}, \bar{\mathbf{e}}_{023}, \bar{\mathbf{e}}_{123}\}$ i

[3] Aquest espai vectorial quadridimensional incorpora l'eix temporal. El vector temporal ortonormal té per quadrat $(\bar{\mathrm{e}}_0)^2 = -1$ i els espacials $(\bar{\mathrm{e}}_i)^2 = +1$ amb $i = 1, 2, 3$. Hem col·locat barrets per distingir-los dels elements de l'àlgebra de l'espai.

un quadrivector $\{\bar{\mathbf{e}}_{0123}\}$. Els elements de grau parell (bivectors, quadrivector i l'escalar) tenen una propietat interessant: el producte geomètric entre aquests elements sempre dóna un element de grau parell. Dit d'una altra manera, els elements parells formen un conjunt tancat sota el producte geomètric. Aquesta propietat fa d'aquest conjunt una subàlgebra de $Cl_{3,1}$ que anomenarem *subàlgebra parella*, $Cl^{+}_{3,1}$. L'element genèric d'aquesta subàlgebra serà del tipus

$$\begin{aligned} A = {} & a_0 + a_1\,\bar{\mathbf{e}}_{01} + a_2\,\bar{\mathbf{e}}_{02} + a_3\,\bar{\mathbf{e}}_{03} \\ & + b_1\,\bar{\mathbf{e}}_{23} + b_2\,\bar{\mathbf{e}}_{13} + b_3\,\bar{\mathbf{e}}_{12} + \lambda\,\bar{\mathbf{e}}_{0123}. \end{aligned} \tag{30}$$

Analitzem la base d'aquesta subàlgebra. Els bivectors espaitemps, i. e., $\bar{\mathbf{e}}_{0i}$, són de quadrat $+1$ ja que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}^2_{0i} &= \bar{\mathbf{e}}_{0i}\bar{\mathbf{e}}_{0i} = -\bar{\mathbf{e}}_{i0}\bar{\mathbf{e}}_{0i} \\ &= \bar{\mathbf{e}}_i\bar{\mathbf{e}}_i = +1 \qquad \forall\, i = 1,2,3. \end{aligned} \tag{31}$$

De manera similar podem veure que els bivectors espacials tenen quadrat -1, igual que l'element de volum. Aquesta subàlgebra parella definida a l'espaitemps de Minkowski té dimensió vuit (com es veu a (30)), la mateixa dimensió que tenia l'àlgebra de l'espai. I no només això, els elements de la base d'ambdues àlgebres tenen l'escalar i els bivectors espacials com a elements comuns. De fet, si fem operacions només entre aquests elements (escalars i bivectors espacials), no podem distingir si estem treballant en Cl_3 o bé en $Cl^{+}_{3,1}$. Fins aquí, operacionalment, tot és idèntic i podem fer la identificació següent:

$$\begin{aligned} &\text{escalar de } Cl_3 \leftrightarrow \text{escalar de } Cl^{+}_{3,1} \\ &\qquad \mathbf{e}_{ij} \leftrightarrow \bar{\mathbf{e}}_{ij} \quad \forall\, i,j = 1,2,3,\ i \neq j. \end{aligned} \tag{32}$$

Què passarà amb els bivectors espaitemps ($\bar{\mathbf{e}}_{0i}$) i l'element de volum ($\bar{\mathbf{e}}_{0123}$)? Tindran algun tipus d'equivalència amb elements de l'àlgebra de l'espai? Podem veure que sí. Tal com es pot veure en la taula 1, els quadrats d'aquests elements són iguals que els quadrats dels vectors $\mathbf{e}_i$ i de l'element de volum $\mathbf{e}_{123}$.

Espaitemps	Quadrat	**Espai**	Quadrat
$\bar{\mathbf{e}}_{0i}$	$+1$	$\mathbf{e}_i$	$+1$
$\bar{\mathbf{e}}_{0123}$	-1	$\mathbf{e}_{123}$	-1

Taula 1: *Quadrats dels elements de* $Cl^{+}_{3,1}$ *i* Cl_3

I no només això, totes les relacions d'anticommutació que compleixen els uns les compleixen els altres. En resum, sota l'equivalència

$$\mathbf{e}_i \leftrightarrow \bar{\mathbf{e}}_{0i} \tag{33}$$

no hi ha cap diferència operacional, és exactament el mateix treballar amb l'àlgebra de l'espai Cl_3 que fer-ho amb la subàlgebra parella $Cl^{+}_{3,1}$. Això és el que s'anomena un *isomorfisme*, en aquest cas, d'àlgebres.

6 El camp electromagnètic, un bivector

Uns paràgrafs enrere expressàvem el camp electromagnètic mitjançant un vector (per a la part elèctrica) i un bivector (per a la part magnètica), escrivint

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} = {} & E_1\,\mathbf{e}_1 + E_2\,\mathbf{e}_2 + E_3\,\mathbf{e}_3 \\ & + B_1\,\mathbf{e}_{23} + B_2\,\mathbf{e}_{13} + B_3\,\mathbf{e}_{12}. \end{aligned} \tag{34}$$

Ara, usant (33) escriurem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} = {} & E_1\,\bar{\mathbf{e}}_{01} + E_2\,\bar{\mathbf{e}}_{02} + E_3\,\bar{\mathbf{e}}_{03} \\ & + B_1\,\bar{\mathbf{e}}_{23} + B_2\,\bar{\mathbf{e}}_{13} + B_3\,\bar{\mathbf{e}}_{12}. \end{aligned} \tag{35}$$

Com veiem, el camp electromagnètic expressat en l'àlgebra de l'espaitemps és un bivector. Tot i que, per construcció, pugui semblar que la part elèctrica està lligada a unes components espaitemporals i la magnètica a les espacials, sota un canvi d'observador inercial, la barreja de components de les dues parts està assegurada. Dins el marc quadridimensional, el que considerem elèctric o magnètic tan sols té un sentit relatiu i, per tant, és més adequat parlar de camp electromagnètic.

Pel que fa a la paritat, la part bivectorial espacial, com ja hem vist abans (29), és invariant sota aquesta transformació. Ens queda per veure què passa amb $\mathcal{P}(\bar{\mathbf{e}}_{0i})$. La component temporal del bivector $\bar{\mathbf{e}}_{0i}$, a diferència de la component espacial, no queda afectada sota la paritat, ja que aquesta està definida com la inversió de totes les direccions de l'espai i no pas del temps. Per tant:

$$\mathcal{P}(\bar{\mathbf{e}}_{0i}) = \mathcal{P}(\bar{\mathbf{e}}_0)\mathcal{P}(\bar{\mathbf{e}}_i) = -\bar{\mathbf{e}}_{0i}.$$

Exactament el mateix que passava quan consideràvem el camp elèctric com un vector.

Així, doncs, mitjançant l'àlgebra geomètrica i amb el fil conductor de l'operador de paritat hem aconseguit descriure el camp elèctric i magnètic com un element matemàtic unificat: un camp bivectorial a l'espaitemps de Minkowski.

Agraïments

Vull agrair a M. Ribó, C. Vilella i J. M. Pozo la cura que han tingut en la revisió del text, així com els comentaris precisos del revisor. Finalment, agrair a J. R. Regué i S. Graells la seva col·laboració en el material fotogràfic.

Bibliografia

[1] WEYL, H., *Simetría*, Mc Graw-Hill Interamericana, (1991).
[2] FEYNMAN, R.P., LEIGHTON, R.B. and SANDS, M., *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, (1963).
[3] LOUNESTO, P., *Clifford Algebras and Spinors,* 2^{nd} *Edition*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press (2001).
[4] PARRA, J.M., L'àlgebra vectorial. Una història que ens cal reescriure, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 10, 75–120 (1995).
[5] VIVES, J., Fractals en àlgebres de Clifford, *Revista de Física*, 3, 28–34 (2005).
[6] PORTEOUS, I., *Clifford Algebras and the Classical Groups*, Cambridge University Press (1995).