

The Learning and Teaching of Algebra

Citation for published version (APA):

Zwaneveld, G. (2018). The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights, and Activities . *Euclides*, 93(7), 29-30.

Document status and date:

Published: 01/01/2018

Document Version:

Peer reviewed version

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

<https://www.ou.nl/taverne-agreement>

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

pure-support@ou.nl

providing details and we will investigate your claim.

Downloaded from <https://research.ou.nl/> on date: 12 Oct. 2022

Open Universiteit
www.ou.nl



Boekbespreking

The Learning and Teaching of Algebra

Bert Zwaneveld

Auteurs: Abraham Arcavi, Paul Drijvers and Kaye Stacey

Titel: The Learning and Teaching of Algebra

Ondertitel: Ideas, Insights, and Activities

Uitgever: Routledge (Abingdon, Oxon; New York, NY, 2017)

ISBN 978-0-415-74372-3

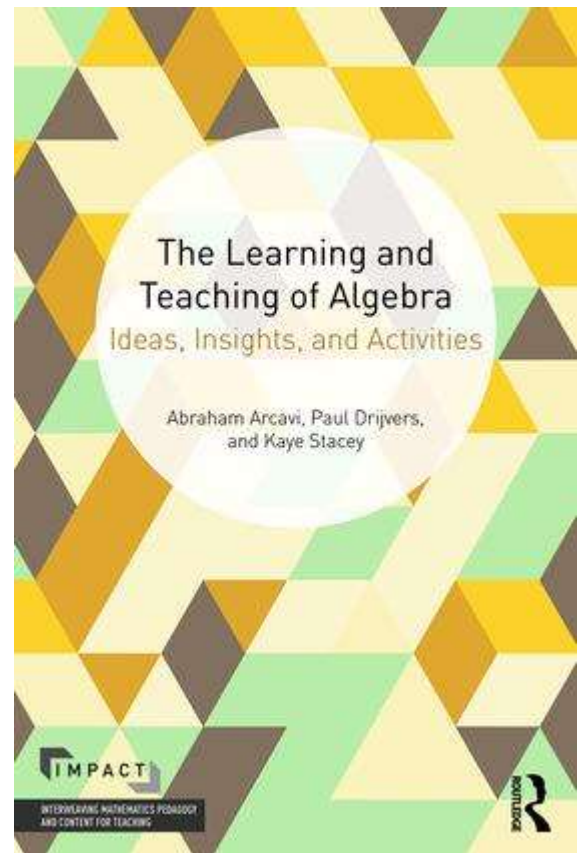
Prijs: £ 29,99 (paperback, 144 blz)

Dit boek is het eerste deel in een nieuwe serie boeken onder de titel: IMPACT dat de afkorting is van Interweaving Mathematics Pedagogy and Content for Teaching. (In de Engelstalige wereld wordt vaak de term pedagogy gebruikt, waar wij de term didactiek gebruiken.) Dit boek is bedoeld voor *students, teachers, and teacher educators, hoping that this book will contribute to making learning of algebra productive, enjoyable, and accessible to all*, zoals helemaal voorin, nog voor de inhoudsopgave, staat. Het boek bevat vijf hoofdstukken: Algebra: Setting the Scene, Some Lessons From History, Seeing Algebra Through the Eyes of a Learner, Emphases in Algebra Teaching en Algebra Education in the Digital Era. Eerst een korte samenvatting per hoofdstuk.

Algebra: Setting the Scene

De belangrijkste aspecten van de problematiek van de schoolalgebra komen aan de orde: (1) wat is het doel van algebra, (2) welke activiteiten horen daarbij, (3) welke wiskundige objecten spelen daarbij een rol? De antwoorden op deze drie vragen luiden kort samengevat als volgt. Op de eerste vraag: generalisaties uitdrukken, verbanden vaststellen, problemen oplossen, eigenschappen exploreren, stellingen bewijzen, berekeningen uitvoeren. De vijf antwoorden op de tweede vraag: Ten eerste opmerken (noticing), beschrijving, betekenis geven (denoting) en weergeven. Ten tweede: symbolische uitdrukkingen hanteren. Ten derde: 'ontsymboliseren' en lezen. Ten vierde: representaties met elkaar in verbinden. En ten laatste: algebraïsche uitdrukkingen creëren. Het antwoord op de vraag naar de objecten waar het bij algebra op school omgaat: tekens, variabelen, algebraïsche uitdrukkingen, vergelijkingen en relaties en functies. Uiteraard, zou ik bijna zeggen, worden al deze antwoorden uitgewerkt en van inspirerende voorbeelden voorzien. Dat gebeurt overigens ook in alle volgende hoofdstukken.

Some Lessons From History



Dit hoofdstuk behandelt vrij kort vier voorbeelden, relevant voor de algebra op school, uit de geschiedenis van de wiskunde. Aan de orde komen: hoe de oude Egyptenaren lineaire vergelijkingen gebruikten bij het oplossen van wat wij wel woordproblemen noemen, hoe de oude Babyloniërs kwadratische vergelijkingen oplosten, hoe de oude Arabieren bepaalde kwadratische vergelijkingen meetkundig oplosten, en hoe in de 16^e/17^e eeuw in Europa van uitdrukkingen als $A - (B + C)$ en als $A - (B - C)$ verklaard werd waarom bij het wegwerken van haakjes deze overgaan in $A - B - C$ en $A - B + C$. En ook hoe in Europa in de 18^e/19^e eeuw met negatieve getallen werd omgegaan. Die waren namelijk toen nog lang niet algemeen geaccepteerd. Dit hoofdstuk maakt duidelijk dat het niet verwonderlijk is dat leerlingen moeite met algebra hebben, en ook dat de wijze waarop (heel) vroeger algebraïsche problemen werden aangepakt, heel goed een plaats in het huidige wiskundeonderwijs kan hebben.

Seeing Algebra Through the Eyes of a Learner

De problemen van leerlingen met algebra komen in dit hoofdstuk uitvoerig aan de orde. Deze worden gebracht in het kader van wat in de (algemeen-)didactische literatuur pedagogical content knowledge (pck) heet. Dit wordt wel omschreven als 'het amalgaam van de didactische en inhoudelijke kennis van de lerares of leraar'. Hier wordt de nadruk gelegd op het inlevingsvermogen van de lerares of leraar in de manier waarop de leerlingen denken bij algebra. Zij moeten immers, vooral na het rekenen, op een andere manier gaan denken. De auteurs gebruiken de metafoer van de bifocale bril die de lerares of leraar moet opzetten: er zijn lenzen waarmee als volwassene naar algebra wordt gekeken én lenzen waarmee leerlingen ernaar kijken. Achtereenvolgens komen de volgende thema's aan de orde. Wat stellen de letters bij algebra voor? Wat is er mis met een uitleg als: $3a + 4p$ 'betekent' 3 appels en 4 peren. Hoe om te gaan met een uitdrukking als $h + 10$? Dat is op een gegeven moment niet meer het proces van 10 optellen zoals bij rekenen, maar een algebraïsch object op zich. Van dat object kan bijvoorbeeld een grafiek getekend worden. Dit staat bekend als de proces-objectdualiteit. Wat betekent het =-teken nu eigenlijk? Hoe kan algebra gebruikt worden bij het beschrijven van patronen? Denk hierbij aan de driehoeksgetallen. Welke problemen ontmoeten leerlingen bij de overgang van rekenen met getallen naar de algebra? En welke rol spelen vergelijkingen daarbij? We komen hierbij ook op het terrein van de creativiteit. Het boek geeft hier een mooi voorbeeld bij waarbij de leerlingen zelf een vergelijking bij een zeker niet triviaal probleem moeten opstellen. Zie figuur 1. Welke procedures spelen een rol bij (het begin van) het leren oplossen van vergelijkingen? Hoe kijken leerlingen naar functies? Ook hier komt de proces-objectdualiteit aan de orde: eerst is een functie een proces om bij een invoergetal de uitvoer te berekenen, maar later wordt het object met bepaalde eigenschappen. Denk aan de betekenis van de getallen 3 en 4 bij de functie $x \rightarrow 3x + 4$.

Emphases in Algebra Teaching

Dit hoofdstuk, geschreven vanuit de optiek van de lerares of leraar, zoomt in op de volgende onderwerpen: algebra en contexten, productief oefenen, eerherstel voor routine én inzicht, gebruik maken van fouten van leerlingen om ze te leren te begrijpen waarom iets fout is en hoe ze tot inzicht te brengen, de rol van bewijzen bij algebra. Denk bij dit laatste aan het bewijzen van de *abc*-formule. Denk bij het eerste aan de rol die contexten kunnen spelen om de leerlingen een gevoel te geven voor wat het doel van algebra kan zijn, en wat het nut ervan is bij het oplossen van problemen. Wat hierbij zeker van belang is de authenticiteit van de probleemsituatie voor leerlingen. Leerlingen moeten overigens dat gevoel voor het doel van algebra ook krijgen bij abstracte problemen. Dit kan, bijvoorbeeld, door aan te sluiten bij patronen met getallen. Of door de leerlingen een getal in

gedachten te laten nemen, daarmee rekenkundig te laten manipuleren en dan bijvoorbeeld op 1 uit te komen. Hoe kan dat?

Algebra Education in the Digital Era

Dit hoofdstuk bespreekt eerst een aantal digitale hulpmiddelen vanuit de technisch-algebraïsche mogelijkheden. Vervolgens komen de didactische mogelijkheden aan de orde met de nadruk op de dynamische mogelijkheden. Denk hierbij aan GeoGebra dat ook een module met een computeralgebrasysteem (cas) bevat. De volgende indeling van de didactische functies worden besproken: algebra doen, algebra leren, oefenen van vaardigheden en ontwikkelen van begrippen. Deze functies worden besproken en geïllustreerd met drie van de genoemde objecten van algebra op school: variabelen, vergelijkingen met speciaal aandacht voor de gelijkwaardigheid van de vergelijkingen die bij het stapsgewijs oplossen optreden en functies. Het hoofdstuk wordt afgesloten met een meer reflectieve, onderzoeksgeoriënteerd perspectief op het inzetten van ict bij algebra. De schrijvers merken op dat wel duidelijk is dat het inzetten van ict in het algebraonderwijs 'werkt', maar dat we niet verbaasd moeten zijn dat de effecten (vooralsnog?) vrij klein zijn. Ze eindigen dan ook met een aanbeveling: kies zorgvuldig de opdrachten en de digitale hulpmiddelen daarbij en probeer het onderwijs met deze opdrachten zo vruchtbaar mogelijk te maken door bedacht te zijn op de balans op inzicht en routine, tussen digitaal en met pen-en-papier werken, zodat inzicht, vaardigheden en het meester worden over de digitale hulpmiddelen gelijk opgaan, terwijl het gevoel voor het doel van de algebra steeds meer ontwikkeld wordt.

Besluit

Toen ik het boek uit had werd mij opnieuw duidelijk hoe complex algebra op school is. Ik denk dat het niet alleen een aantal drempelbegrippen omvat, maar zelf een drempeldomein is. Drempelbegrippen worden in de onderzoeksliteratuur gedefinieerd als begrippen die een student of leerling moet beheersen als die tot het vakgebied waar dat begrip gebruikt wordt, wil gaan behoren. Drempelbegrippen worden gekarakteriseerd door: ze geven je een heel nieuwe kijk op het vakgebied, als je het begrip eenmaal beheerst kun je eigenlijk niet meer terug naar een naïevere kijk erop, het neemt allerlei onderdelen samen, het is aanvankelijk tegen-intuïtief, het begrenst het vakgebied en het bepaalt het taalgebruik. Dit lijkt me allemaal voor algebra op school te gelden.

Hoewel ik aanneem veel van de inhoud van dit boek bij de wiskundeleraressen en –leraren min of meer bekend is, vind ik het goed dat het allemaal mooi overzichtelijk bij elkaar is gezet. Het kan een uitstekende inspiratiebron zijn voor wiskundeleraressen en –leraren in opleiding, bijvoorbeeld bij hun afstudeeronderzoek. Het biedt tal van goede voorbeelden, waarbij de theoretische achtergrond ruim aandacht krijgt. Ook wiskundesecties kunnen het goed gebruiken als bijvoorbeeld jaarthema om bepaalde onderdelen van het algebraonderwijs op hun school eens nader onder de loep te nemen en te verbeteren. Het vijfde hoofdstuk, over het inzetten van digitale hulpmiddelen bij algebra, sprak mij in dit verband zeer aan. Want ik denk dat daar nog een wereld te winnen is.

Over de auteur

Bert Zwaneveld is emeritus hoogleraar professionalisering van de leraar in het bijzonder in het wiskundeonderwijs en informaticaonderwijs van de Open Universiteit. E-mailadres: zwane013@planet.nl

Jim en Ken

Jim kocht chocolaatjes en gaf de helft aan Ken. Ken kocht snoepjes en gaf de helft aan Jim. Jim at 12 snoepjes en Ken 18 chocolaatjes. Daarna was de verhouding van het aantal snoepjes en chocolaatjes voor Jim 1:7. Voor Ken was die verhouding 1:4. Hoeveel snoepjes kocht Ken?