REDES- Revista hispana para el análisis de redes sociales
Vol.24,#1, Junio 2013
http://revista-redes.rediris.es

Modelos matemáticos de la sociedad y aplicaciones Líderes sociales.

Nelia Tello[1]

Escuela Nacional de Trabajo Social, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

José Antonio de la Peña[2]

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México y Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México.

Resumen
Revisamos someramente las teorías de liderazgo del siglo XIX, que enfatizan las características individuales del líder, y las teorías emanadas de los enfoques de Lewin y Weber, ya en el siglo XX, que enfatizan las relaciones del líder con el grupo en que asume su papel. En nuestro modelo de red social *S* hay nodos (individuos) que tienen mayor influencia, medida por el flujo de caminos que pasa por ellos. Así, matemáticamente un líder j corresponde a un nodo de la red donde un vector propio positivo v, correspondiente al radio espectral r(*S*) de la matriz A(*S*) de la red, alcanza su máximo. Si llamamos a v_x el *poder* de x, entonces se demuestra que el poder de un nodo es proporcional al poder de sus vecinos. Hay sociedades donde más de un líder existe, un ejemplo típico lo tenemos en las sociedades tribales. Estas sociedades presentan mayor inestabilidad como consecuencia de la búsqueda de la supremacía entre los posibles líderes.

Palabras clave: liderazgo, vector de Perron, poder, zona de influencia.

Abstract
We review leadership theories, in particular those of XIX century when the individual qualities of the leader were stressed, and some of XX century when the relation of the leader and the group was taken into account. Our model of social network considers a leader as the node where the maximal of walks pass through, that is, a node where the eigenvector *v* corresponding to the spectral radius of the adjacency matrix reaches a maximum. We call v_x the power of a node x and prove that it is proportional to the power of the neighbors of x. Societies where more than one leader exist are unstable due to fight for power.

Key words: lidership, Perron vector, power, zone of influence.

Muchos de los grandes filósofos clásicos, por ejemplo Platón en *La República* y Plutarco en sus *Vidas*, exploraron la pregunta "¿Qué hace a un individuo ser líder?". Implícitamente se acepta en esos escritos que los líderes son importantes en la sociedad y que hay características individuales que los líderes poseen. Esta idea se expresa todavía en el siglo XIX en los escritos de Thomas Carlyle, quién en *Héroes* (1841) identifica los talentos, habilidades y características físicas de los héroes. Similarmente, Francis Galton en *La herencia del genio* (1869), concluye que el

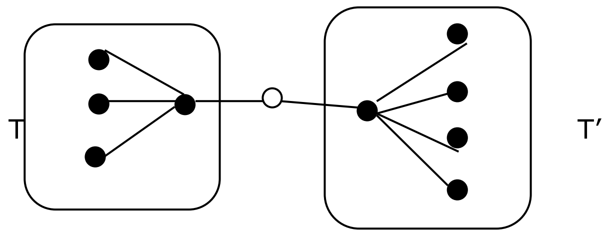
[1]E-mail: neliatello@me.com
[2] E-mail: jap@matem.unam.mx

liderazgo es una cualidad hereditaria. Así, en el pensamiento occidental hasta entrado el siglo XX, los líderes nacen, no se hacen.

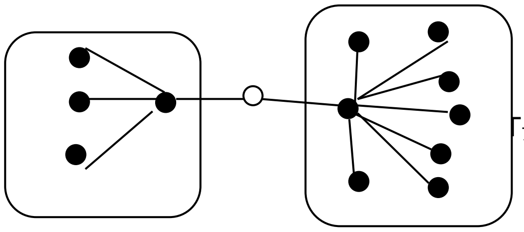
A mediados del siglo XX varios teóricos concluyeron que el liderazgo depende de la situación, tanto como de la persona. Esto es, un líder en una situación puede no serlo en otra. En 1940, Kurt Lewin, un psicólogo alemán del grupo que desarrolló la psicología de la *Gestalt*, exiliado en los Estados Unidos, desarrolló la teoría del liderazgo de grupo en diferentes ambientes de 'trabajo'. Así, la actitud del líder (autoritario, democrático o indiferente) determina la participación y eficiencia del grupo. De esta manera, la efectividad del liderazgo, su poder, depende de la relación del líder con los miembros del grupo.

Antecesor de esta línea de pensamiento, Max Weber desarrolló su teoría de liderazgo que enfatiza las características situacionales en que el líder asume su papel y la necesidad de transformarse para seguir siendo exitoso. Así el líder maneja dos tipos de situaciones paradigmáticas: la *transaccional* y la *transformacional*. En el primer caso, el líder trabaja dentro del ambiente establecido para alcanzar resultados, como en el caso del llamado líder burocrático. En el segundo caso, el líder dirige a la sociedad en cambios estructurales usando su carisma personal para lograr sus metas.

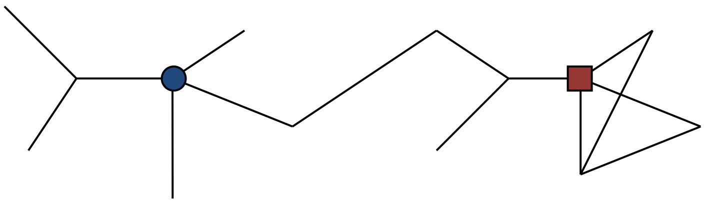
Dada una red social *S*, nuestro modelo puramente gráfico-combinatorio ignora cualquier atributo que pueda conferirse a los individuos, que no son sino nodos de la red. En cambio, el liderazgo de un individuo en la red *S* se debe medirse en función de las interconexiones de la red. Exploremos esta idea: un individuo j en la red S tiene c(j) vecinos, de manera que podríamos pensar que es más influyente aquél con más vecinos. Observemos el siguiente diagrama:



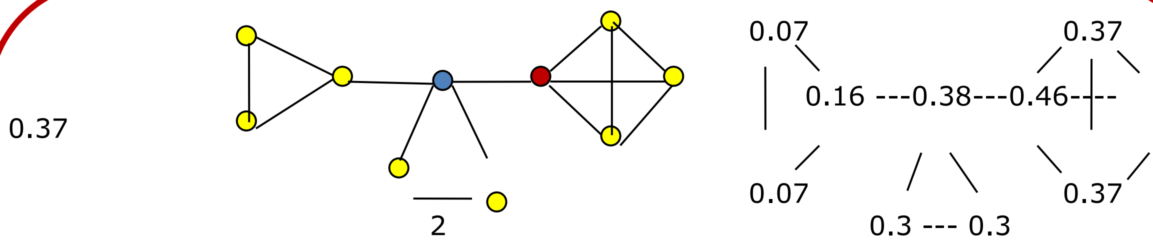
donde el único vértice j con c(j)=2 juega un papel especial en la red, es un nodo *puente*. No cabe duda que el nodo j es el más influyente en la red, pero ¿cuál es la cualidad que determina su influencia? Diríamos que el hecho que todo camino entre un punto en el conjunto T y un punto del conjunto T' pase por j determina su poder. Pero consideremos ahora la siguiente red, muy similar a la anterior.

T3  T7

De alguna manera el 'centro de la acción' en la red se ha desplazado hacia el centro de la estrella T_7. ¿Cuál es en general el nodo de mayor influencia? La solución del problema consiste en considerar el *peso* de cada nodo x como *la probabilidad* p_x *de que un camino arbitrario en la red S termine en el nodo x*. Así, un nodo x con mayor peso será más frecuentemente visitado que otro y con menor peso, diremos que x es *más poderoso* que y. El nodo más poderoso de la red *S* es un *líder*.



Una red, en sentido matemático, está formada por nodos unidos por aristas. Cada nodo tiene un 'peso' diferente en la red, de acuerdo al papel del nodo en la conectividad de la red. El peso del nodo se determina de acuerdo con un teorema de álgebra lineal conocido bajo el nombre de *Teorema de Perron*. En la red dibujada, el nodo marcado con el cuadrado tiene el mayor peso seguido por el nodo marcado por el círculo. El peso de los nodos en la red de 'links' entre las páginas de Internet es la base del cálculo que hace *Google* para establecer sus respuestas a consultas. Este criterio puede usarse también para la toma de decisiones: ¿dónde construir una estación de trenes importante en la red ferroviaria? ¿Dónde colocar un laboratorio nacional que dé servicio a instituciones de una región?



La gráfica G de una red social formada por tres clanes de tamaño 2, 3 y 4 y un individuo (azul) que no pertenece a ningún clan. Consideramos la matriz A(G) de la red con ecuación característica

$$x^{10} - 17x^{8} - 14x^{7} + 90x^{6} + 144x^{5} - 89x^{4} - 338x^{3} - 253x^{2} - 56x + 4 = 0$$

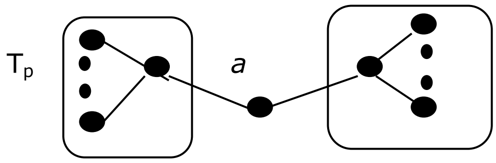
que tiene soluciones r=3.24, 2.72, 2, 0.56, -1 con multiplicidad 4, -2 y -2.02. El *radio espectral* r tiene un *vector de Perron* asociado *u* cuyas coordenadas (todas positivas) las escribimos sobre los vértices de la gráfica, de manera que

$$A(G)\, u = r\, u, \text{ con } \sum_x u_x = 1$$

Los valores de *u* nos llevan a identificar al vértice rojo como el *líder* de la red G, seguido en importancia por el vértice azul. Por supuesto, estos cálculos se llevan a cabo con programas de cómputo. Nosotros hemos usado *Mapple*.

Observemos que G tiene máximo peso de nodos igual a 4 y dado que G contiene un clan con 4 miembros, las propiedades de *decrecimiento en subredes* nos indican que $3 < r < 4$, como en efecto se comprueba.

En el caso de tener dos estrellas T_p y T_q unidas por un nodo puente *a*:



Entonces

$$\text{r } u = A(G)\, u = \begin{pmatrix} 0 & \dots 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots 0 & 1 & 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{p+1} \\ w \\ v_{q+1} \\ \dots \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{p+1} \\ \dots \\ w + pu_1 \\ u_{p+1} + v_{q+1} \\ w + qv_1 \\ \dots \\ v_{q+1} \end{pmatrix}$$

que luego de algunos cálculos resulta r $= \sqrt{\frac{p+q+2-\sqrt{4+(p-q)^2}}{2}}$. Es fácil deducir las coordenadas del *vector de Perron u*, y encontrar condiciones necesarias y suficientes para que 'el hombre del puente' *a* sea un líder. En efecto,

*u=(1,…,1,*r*,1+v,*r*v,v,…v)*, donde $v = \frac{1}{r^2-(q+1)}$.

Así, *1+v* > r y *1+v* > r*v* , o sea, *a* es un líder, si y solamente si (p-3)(q-3) ≤ 0.

Interpretaciones del liderazgo definido por el vector de Perron.

Recodemos que dada una red social *S* con n nodos y matriz de adyacencia A= *A*(*S*)=(a_{ij}) las entradas a_{ij} determinan las relaciones 'directas' en la red, esto es las aristas. Las potencias de la matriz A^m=($a_{ij}^{(m)}$) determinan el número de caminos de longitud m entre cada par de nodos i,j. Si u es un vector propio de A con valor propio λ, esto es, Au=λu, entonces para las potencias se tiene A^m u=λ^m u. En particular para el radio espectral r se tiene que el número N_m total de caminos de longitud m satisface

$$\text{r} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{N_m} \; .$$

Observamos que $N_m = \sum_{i,j} a_{ij}^{(m)}$ y también r $= \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{a_{ij}^{(m)}}$, esto significa que el crecimiento del número de caminos $a_{ij}^{(m)}$ como función de la longitud *m* sigue un comportamiento exponencial r^m y esto ¡entre dos puntos cualesquiera!

Definamos una nueva matriz positiva B=A/r tal que el límite $B^{\infty}=\lim_{m\to\infty} B^m$ existe y acepta el mismo vector propio u de A para el valor propio 1. Como $B^{\infty} B=B^{\infty}$, entonces cada renglón de B es un vector propio de B con valor propio 1. El *Teorema de Perron-Frobenius* nos dice que el valor propio r tiene multiplicidad algebraica 1, lo que implica que todos los renglones de B^{∞} son iguales a u.

Supongamos que la matriz A=A(S) de la red sólo indica la conectividad de la red, esto es, los valores de a_{xy} son 0 o 1 y elijamos un vector propio u de A con $\sum_x u_x=1$. ¿Qué interpretación podemos dar a $u_x= B^{\infty}_{xx}$? Este número mide el porcentaje de caminos que termina en el nodo x, esto es, la probabilidad de que un camino arbitrario en la red S termine en el nodo x.

Consideremos una red social S con una estructura tribal, esto es, cada individuo pertenece a un clan. Dentro de un clan C, cada individuo x tiene el mismo número de vecinos, esto es n(C)-1, donde n(C) es el número de nodos en C, mientras el total de contactos de x son c(x)=n(C)-1 +c'(x), donde c'(x) es el número de nodos y conectados con x, de forma que $y \notin C$. El peso u_x del nodo x satisface:

$$\sum_{x\neq y\in C} u_y + \sum_{y\notin C} a_{xy}u_y = r\, u_x \quad \text{o bien,} \quad \sum_{y\in C} u_y + \sum_{y\notin C} a_{xy}u_y = (r-1)\, u_x\,.$$

De donde se deduce que el líder del clan C no es aquél que tiene más contactos con otros clanes, sino aquél que tiene contactos con los más poderosos de otros clanes.

Intentando generalizar este último resultado, proponemos que el *poder* u_x de cada individuo en la red S depende del poder de los individuos que lo rodean. Así podemos suponer que

$$u_x = \frac{1}{k}\sum_y a_{xy}u_y$$

o sea, u_x se obtiene como cierto promedio del poder de sus vecinos. Resulta que ku=Au, de donde, una vez más por el Teorema de Perron, se obtiene k=r y u es el vector de pesos tal como se ha definido antes[3].

El método de calcular el vector propio de Perron en una red es también la base del llamado *algoritmo de Google*, que define el programa del buscador de internet más usado del mundo. En efecto, entre todas las páginas de internet se puede definir una red determinada por las citas de una página en otra. De esta manera la red de páginas tiene una matriz de adyacencia A que determina el radio espectral r y un

[3] Hay diferentes aproximaciones a los conceptos d liderazgo y poder en la literatura. El modelo aquí usado se acerca más a los conceptos de influencia y prestigio, y al modelo de centralidad de intermediación ("betweenness centrality") usado en el análisis de redes sociales por científicos sociales.

vector propio correspondiente *u* con todas sus coordenadas positivas. Así, cada página de internet x tiene asignado un peso u_x. Cuando se requiere al buscador Google con un cierto término o frase *f*, Google encuentra todas las páginas que contienen *f*, digamos $p_1(f),\ldots,p_m(f)$ y las ordena de acuerdo a su peso, de manera que la primera página resultado de la búsqueda será aquella con peso $u_{p(f)}$ máximo. El liderazgo de la página así seleccionada queda manifiesto cuando se comparan los resultados de búsquedas usando otros *browsers*.

Influencia de un individuo en una red social.

Una persona *influye* sobre otra cuando tiene el poder de persuadirla o forzarla a cambiar su punto de vista, su opinión o su actuación. En el mundo real, son muchas las razones por las que una persona puede tener este poder sobre otra, por ejemplo, por su credibilidad y prestigio, por dinero, por presión ejercida a través de la opinión pública. En nuestro modelo de redes sociales, la influencia debe de manifestarse como una *asimetría en la estructura de la red*.

Así, en una red social *S* diremos que el nodo x influye sobre el nodo y si el poder u_x de x es mayor que u_y, donde como antes, el vector positivo *u* satisface A*u*=r*u* con A=A(*S*) la matriz de la red y r el radio espectral. La *influencia* de *x* sobre *y*, para x ≠ y, se define como

$$i(x{:}y)=\frac{u_x-u_y}{u_x},$$

en caso en que este número sea positivo, de manera que si *x* influye en *y* se tiene $0 < i(x{:}y) < 1$. La *zona de influencia* del nodo *x* es el conjunto *Z(x)* de nodos *y* con $i(x{:}y) > 0$, además aceptamos que *x* î *Z(x)* con $i(x{:}x)=1$. Las siguientes propiedades de la función *Z* son claras:

(a) La influencia *i(x:y),* y por tanto los conjuntos *Z(x),* no depende del vector propio *u* elegido.

(b) Un nodo *x* es líder si *Z(x)=S*. El converso no es necesariamente cierto, de hecho se tiene que si *x* es líder entonces $Z(x)=S- S^x$, donde S^x es el conjunto de líderes *y* ≠ *x*. De esta manera, *Z(x)=S* exactamente cuando *x* es el único líder.

(c) Si *y* î *Z(x)* entonces *Z(y)* í *Z(x)*. Además, si *Z(y)* = *Z(x)* entonces x=y. Para demostrar la última afirmación, basta observar que *Z(y)* = *Z(x)* implica que $u_x=u_y$, pero esto no es posible si *x* ≠ *y* y además $i(x{:}y)>0$.

La *influencia* del nodo *x* en la red *S* está definida como

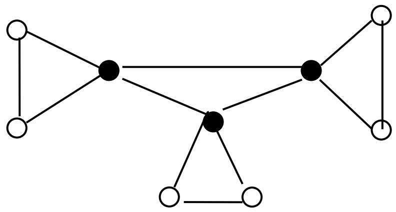
$$i(x{:}S)=\sum_y i(x{:}y).$$

Un resultado sencillo, pero no obvio es que los líderes son los individuos más influyentes en la sociedad. Formalmente:

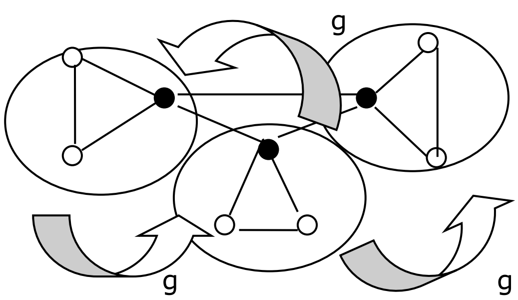
Teorema: El nodo *x î S* corresponde a un líder si y solamente si $i(x{:}S) \geq i(y{:}S)$ para todo nodo *y î S*.

Demostración: Si x es un líder y y es otro nodo cualquiera, tenemos $u_x \geq u_y$, lo que implica $i(x{:}z) \geq i(y{:}z)$ para toda *z î S*, o sea, $i(x{:}S) \geq i(y{:}S)$. Para el converso, supongamos que x es un nodo con máxima influencia en S. Elegimos un líder y en S, que por la primera parte de la demostración tiene $i(y{:}S) \geq i(x{:}S)$. La característica definitoria de x implica que $i(x{:}S) = i(y{:}S)$ que sólo es posible si $u_x = u_y$. Entonces x es un líder (tal vez no el único). QED

Muchos ejemplos de redes se pueden construir con múltiples líderes, uno de ellos:



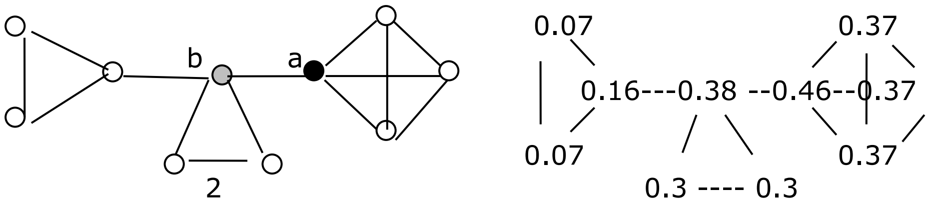
Para generalizar el ejemplo, observemos que siempre que la red S acepta un isomorfismo (también llamado *simetría*) $g\colon S \to S$ de manera que no hay nodos fijos, esto es, $g(x) \neq x$, para todo nodo x, tenemos que $Au^g = A^g u^g = (Au)^g = ru^g$, que implica $u^g = u$, y en particular, $u_{g(x)} = u_x$ para un líder x. Esto implica que hay al menos tantos líderes de S como el orden del isomorfismo g. En el caso anterior tenemos un isomorfismo g de orden 3, esto es, $g^3=1$.



El argumento anterior demuestra el siguiente resultado.

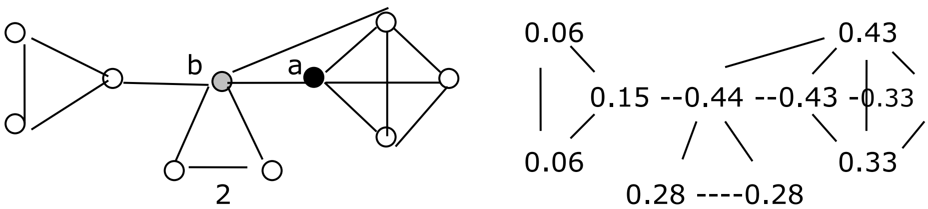
Teorema: Sea S una sociedad con un único líder, entonces no existen simetrías 1≠ g: S → S.

Consideremos el problema de varios líderes con más detenimiento. De hecho otros personajes sin ser líderes pueden ser altamente influyentes en la sociedad y pueden aspirar a ser líderes. Tomemos el ejemplo antes considerado de red social:



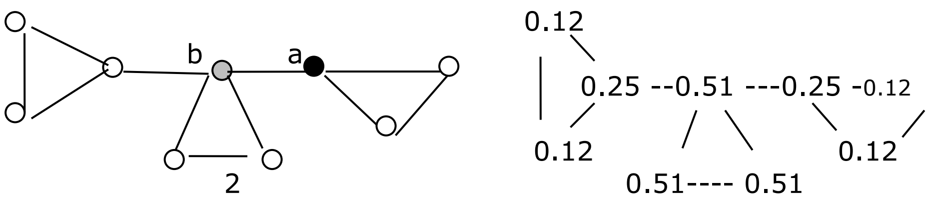
El nodo *a* es líder con una influencia en la red *i(a:S)*= 4.8, mientras el nodo b tiene una influencia *i(b:S)*= 3.71. Aunque el liderazgo de *a* en la red parece bien definido, el nodo *b* podría 'intentar' convertirse en nuevo líder ¿qué podría hacer?

(1) Agregar un nuevo contacto entre *b* y algún nodo cercano al líder *a*, produce una nueva red *S'* como a continuación se muestra.



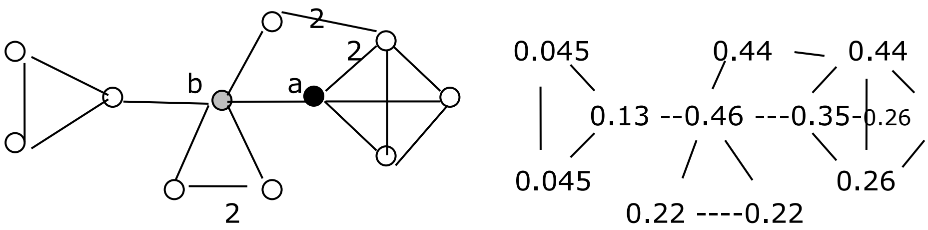
El vector propio *u'* de la matriz de la red *S'* correspondiente al nuevo radio espectral r=3.57 se muestra enseguida de la red. En este caso, *b* resulta el nuevo líder de la red, como deseábamos mostrar.

(2) Suprimir un nodo del clan del líder *a,* produce una nueva red *S'* como a continuación se muestra.



El nuevo radio espectral es r=3, y encontramos 3 nuevos líderes en la red, todos ellos del clan de *b.*

(3) Agregar un nodo a la red que esté relacionado estrechamente tanto con el 'aspirante' a líder *b* como con algún miembro del clan de *a*, produce una nueva red S' que tiene un vector propio u' correspondiente al radio espectral r=4.02 , como se muestra enseguida.



Como vemos, el nodo *b* resulta, una vez más, el nuevo líder de la red. No es difícil interpretar las acciones del aspirante a líder en la realidad de una sociedad, sobre todo si comparamos nuestro modelo con sociedades primitivas como las consideradas en capítulos anteriores.

Luego del estudio de Chagnon en 1968 acerca de la tribu de los Yanomamo en el Amazonas, se pensó que sus continuas guerras ejemplificaban la condición de la naturaleza humana primitiva. Para algunos esto implicaba la presencia de la agresión en nuestros genes. En 1974, Marvin Harris ofreció una explicación alternativa. Afirmó que las guerras intestinas de los Yanomami se debían a presiones ocasionadas por la escasez de alimentos, específicamente animales de caza. Pero un examen cuidadoso de la ecología del Amazonas llevó a concluir que la hipótesis de Harris estaba equivocada. En el año 2000, una nueva teoría, debida a Patrick Tierney, parece desbancar a las previas. En esta explicación, la devastación del medio ambiente producida por los invasores occidentales es el motor de los enfrentamientos tribales. Ofrecemos aquí otra explicación posible.

En una sociedad S con dos o más líderes interesados en el liderazgo de la tribu, la búsqueda de mayor poder sobre otros individuos, para así hacerse del liderazgo, es inevitable. Este poder se puede obtener por medios 'amistosos' como los nuevos contactos políticos (caso 1), tanto como por mecanismos salvajes como el asalto, la violación y el asesinato (casos 2,3).

Referencias bibliográficas

Bendix, Reinhard (1977). *Max Weber: An Intellectual Portrait*. University of California Press

Cialdini, Robert B. (2001). ‵‵Influence: Science and practice (4th ed.)′′. Boston: Allyn & Bacon.

Chagnon, N. (1968): *Yanomamö: The Fierce People*, U. of Michigan.

Chagnon, N. (2002) *Adaptation and Human Behavior: An Anthropological Perspective* (with Lee Cronk and William Irons).

Cvetkovic, D., Doob, M. and Sachs (1980) H. *Spectra of Graphs -- Theory and applications*. Academic Press.

Ferguson, Brian (2010) "The birth of war: an archaeological survey concludes that warfare, despite its malignant hold on modern life, has not always been part of the human condition". Natural History. FindArticles.com. 30 May, 2010.

Gantmacher, F.R. (1974)*The theory of matrices*.Vol II. Chelsea, New York.

Dunbar, R.I.M. (1992) *Neocortex size as a constraint on group size in primates*, *Journal of Human Evolution*, vol. 20, pp. 469-493.

Fei Chen, Zengqiang Chen, Zhongxin Liu, Linying Xiang, Zhuzhi Yuan (2008). *Group decision making with multiple leaders: local rules, weighted networks and consensus.* International Journal of Systems, Control and Communications - Vol. 1, No.2 pp. 227 - 239.

Gladwell, Malcolm (2000). The Tipping Point - How Little Things Make a Big Difference. Little, Brown and Company.

Kelman, H. (1958). Compliance, identification, and internalization: Three processes of attitude change. *Journal of Conflict Resolution*, *1*, 51-60.

De la Peña, J.A. (1996) *Algebra Lineal Avanzada*. Fondo de Cultura Económica. México.