QÜESTIIÓ, vol. 24, 1, p. 189-204, 2000

COMPARACIÓN DE DOS TABLAS DEMOGRÁFICAS: APROXIMACIÓN A SU SIGNIFICACIÓN ESTADÍSTICA

ERNESTO J. VERES FERRER
Universidad de Valencia*

En este trabajo se analiza la significación estadística de la posible igualdad de dos tablas demográficas. Concretamente, se presenta la aplicabilidad de un clásico contraste de los métodos estadísticos –el de homogeneidad de dos distribuciones– para contrastar la hipótesis nula «H_0 = las dos tablas demográficas son iguales, esto es, responden a una misma estructura del fenómeno demográfico estudiado», frente a la alternativa que niega la anterior. Ambas tablas se refieren a un único fenómeno demográfico para el mismo ámbito territorial y dos momentos diferentes de tiempo (contraste temporal), o para la misma referencia temporal en dos poblaciones de ámbito territorial distinto (contraste territorial). Se aplica la metodología descrita en dos situaciones: para la comparación de los niveles de mortalidad de dos provincias, y sobre dos tablas-tipo correspondientes a sendos niveles de mortalidad.

Comparison of two demographic tables: approximation to their statistical significance

Palabras clave: Calendario, contraste de hipótesis, intensidad, tabla demográfica, tablas-tipo de mortalidad, test de la χ^2

Clasificación AMS (MSC 2000): 62F03, 62G10, 62P05, 62P25, 92 H20

* Departamento de Economía Aplicada. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Valencia. Campus de los Naranjos. 46022 Valencia. E-mail: Ernesto.Veres@uv.es.

– Recibido en marzo de 1999.
– Aceptado en noviembre de 1999.

1. INTRODUCCIÓN

El modelo conocido como *tabla demográfica* permite analizar un fenómeno demográfico F a través de cierto suceso característico A, que supondremos irrepetible. La información para el análisis es proporcionada por la observación de la incidencia del suceso A sobre una cohorte, estudiándose la frecuencia con la que ese suceso característico va apareciendo desde una edad inicial −que denotamos por x_0−, hasta una edad final en la que el suceso deja de hacer su aparición −denotada por x_ω−.

En nuestro desarrollo, supondremos −salvo indicación al contrario− que la tabla demográfica es *completa*, esto es, que las edades o duraciones consideradas están tomadas unidad a unidad (por edades o duraciones simples), y que éstas tienen la consideración de *duraciones o edades exactas*. También la supondremos definida a partir de las tres series biométricas fundamentales siguientes:

- serie de individuos no alcanzados por A antes de la edad x, denotada por $\{L_x\}_{x=x_0}^{x_\omega}$ (serie de supervivientes);
- serie del flujo relativo del suceso A entre dos edades consecutivas x y $x+1$, denotada por $\{D(x,x+1)\}_{x=x_0}^{x_\omega-1}$ (serie de flujo de sucesos); y,
- serie de probabilidades de que un individuo, en el momento de llegar a la edad x, sea alcanzado por el suceso A antes de llegar a $x+1$, denotada por $\{q_x\}_{x=x_0}^{x_\omega-1}$ (serie de probabilidades de ocurrencia del suceso A).

Suponiendo una cohorte ficticia con L_0 efectivos iniciales (generalmente, 10^4 ó 10^5 individuos), las relaciones entre las tres series anteriores son las siguientes:

$$\begin{aligned} D(x,x+1) &= L_x - L_{x+1} \\ q_x &= \frac{D(x,x+1)}{L_x} \end{aligned}$$

por lo que, conocida una cualquiera de las series, son conocidas las otras dos.

La *intensidad* y el *calendario* son dos índices analíticos básicos que se deducen fácilmente de una tabla demográfica. La intensidad I −expresada en términos absolutos− representa el número de individuos que acaban por ser alcanzados por el suceso A a lo largo de la vigencia del fenómeno estudiado:

$$I = L_{x_0} - L_{x_\omega} = \sum_{x=x_0}^{x_\omega-1} D(x,x+1)$$

mientras que, en términos relativos, esa intensidad puede definirse como el porcentaje de individuos alcanzados por A sobre el total de efectivos iniciales L_{x_0}.

El calendario $d(x,x+1)$ representa la distribución por edades de la intensidad anterior. Se trata de una distribución de probabilidad condicional:

$$d(x,x+1) = \frac{D(x,x+1)}{I}$$

Como síntesis analítico del calendario puede utilizarse cualquier medida estadística, cuya interpretación sea la propia de la Estadística Descriptiva. En particular, la media aritmética:

$$\begin{aligned} \overline{d} &= \sum_{x=x_0}^{x_\omega-1} \left(\left(x+\frac{1}{2} \right) \times d(x,x+1) \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{I} \left(x_0 L_{x_0} + \sum_{x=x_0+1}^{x_\omega-1} L_x - (x_\omega - 1) L_{x_\omega} \right) \end{aligned}$$

donde se supone la distribución uniforme del suceso A dentro de cada intervalo de edades x y $x+1$.

Con los elementos anteriores, pretendemos determinar, con significación estadística, si dos tablas demográficas $-$correspondientes a dos momentos diferentes, o a dos territorios distintos$-$ son iguales. Para ello se propone el contraste de homogeneidad basado en el test de la χ^2, aplicado sobre las respectivas series $D(x,x+1)$.

Cuando las diferencias entre las dos tablas demográficas son grandes, resulta evidente a simple vista su significación. En efecto, el orden de magnitud de las diferencias entre sus respectivas series biométricas confirman la variación $-$en uno u otro sentido$-$ entre los niveles alcanzados por el fenómeno F expresados por ambas tablas. Resulta irrelevante, pues, efectuar cualquier otro tipo de análisis. Sin embargo, cuando las diferencias alcanzadas en dichas series biométricas y en los indicadores clásicos deducidos de ellas no son lo suficientemente grandes como para valorar a simple vista su significación, podemos preguntarnos por la *significación estadística* de esas pequeñas diferencias. Comprendemos, pues, la plena aplicación de las técnicas y modelos estadísticos para intentar explicarla.

2. CONTRASTE DE HOMOGENEIDAD

La serie del flujo relativo del suceso A entre dos edades consecutivas x y $x+1$, $\left\{D(x, x+1)\right\}_{x=x_0}^{x_\omega-1}$, expresa sobre una generación ficticia de L_0 elementos (la potencia de la tabla, que generalmente suele tomar los valores 10.000 ó 100.000 personas) la frecuencia de aparición del fenómeno demográfico estudiado F, para el nivel expresado a través de la serie de probabilidades $\left\{q_x\right\}_{x=x_0}^{x_\omega-1}$ de la correspondiente tabla.

Consideremos, pues, que los flujos recogidos en sendas series de las dos tablas demográficas consideradas corresponden a las observaciones de dos universos −las derivadas de la incidencia del fenómeno F en dos momentos de tiempo, o en dos territorios, a comparación−, y que se han clasificado atendiendo al mismo criterio «edad de la persona al incidir sobre él el suceso característico A». En una tabla completa, el criterio puede llegar, por ejemplo y en el caso de la mortalidad, a 101 alternativas excluyentes (de «0 años» a «100 o más años», edad por edad simple), mientras que en una abreviada, las alternativas excluyentes pueden ser, por ejemplo, de 21 (de «0 años», de «1 a 4 años», de «5 a 9 años», de «10 a 14» años, ..., de «95 o más años», esto es, agrupando quinquenalmente la edad y distinguiendo las muertes de 0 años). Para otros fenómenos, la extensión de las clasificaciones son más reducidas: por ejemplo y para la fecundidad, 35 categorías de clasificación, si es medida con edades simples, y 7 en el caso de clasificación por grupos quinquenales de edad. Denotemos por $L_0^{t_1}$ y $L_0^{t_2}$ las respectivas potencias de ambas tablas demográficas, que corresponden a los tiempos o territorios diferentes t_1 y t_2.

La población asociada a cada una de estas tablas puede representarse a través de una variable aleatoria ξ_x, que adopta valores sobre las categorías de clasificación contenidas en aquéllas. La formulación de las hipótesis a contrastar se establecen en los siguientes términos muy conocidos:

H_0: los niveles del fenómeno F en t_1 y t_2 son homogéneos,
o, lo que es lo mismo, las distribuciones que expresan la
ocurrencia por edades de F son iguales
frente a la alternativa
H_1: los niveles del fenómeno F en t_1 y t_2 no son homogéneos,
o, lo que es lo mismo, las distribuciones que expresan la
ocurrencia por edades de F son diferentes.

Observemos que el contraste propuesto atiende solamente a la estructura de incidencia por edades del fenómeno estudiado F, esto es, a su calendario. De ahí que las hipótesis a contrastar puedan reformularse así:

H_0: los calendarios del fenómeno F son iguales
frente a la alternativa
H_1: los calendarios del fenómeno F son diferentes.

Planteadas las hipótesis de esta manera, el contraste considerará que el fenómeno F actúa de forma diferente siempre y cuando los respectivos calendarios sean distintos, aún pudiendo ser igual la intensidad de las dos tablas a comparar.

Este contraste de homogeneidad entre poblaciones conduce a considerar los flujos $D(x, x+1)$ como manifestaciones de la variable aleatoria ξ_x estudiada sobre el colectivo teórico de las L_0 personas. La tabla de presentación de datos, obtenida a partir de sendas tablas demográficas, tendría, pues, la siguiente estructura:

Tabla 1.

Año \ \ Territorio	**Edad**					**Total**
	x_0	x_1	....	$x_\omega - 1$	x_ω	
t_1	$D_0^{t_1}$	$D_1^{t_1}$	....	$D_{\omega-1}^{t_1}$	$L_\omega^{t_1}$	$L_0^{t_1}$
t_2	$D_0^{t_2}$	$D_1^{t_2}$	....	$D_{\omega-1}^{t_2}$	$L_\omega^{t_2}$	$L_0^{t_2}$
Total	T_0	T_1	....	$T_{\omega-1}$	T_ω	$L_0^{t_1}+L_0^{t_2}$

y en donde: $L_0^{t_i}$ es la potencia respectiva de la tabla t_i; para simplificar la notación, se establece que $D(x_k, x_{k+1}) = D_k$ y $L_{x_\omega}^{t_i} = L_\omega^{t_i}$; ω expresa la última categoría de clasificación utilizada y que corresponde a la última edad en la que ya no incide sobre la población el fenómeno demográfico F estudiado; y, finalmente, $D_k^{t_1} + D_k^{t_2} = T_k$, $\forall\, x_k \neq x_\omega$, y $L_\omega^{t_1} + L_\omega^{t_2} = T_\omega$.

En la tabla anterior se incluye como última categoría de clasificación la de los supervivientes finales no afectados nunca por el fenómeno demográfico F. En efecto, la correcta aplicación de la χ^2 en un test de homogeneidad obliga a la consideración de sucesos excluyentes como criterio de clasificación para las poblaciones tratadas (en nuestro caso, las dos tablas demográficas), sucesos que además constituyan una partición de las poblaciones de ambas.

Sobre la tabla anterior se calcula el conocido estadístico:

$$\chi^2 = \sum_{i=t_1,t_2} \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{\left(D_k^i - \dfrac{L_0^i \times T_k}{L_0^{t_1}+L_0^{t_2}}\right)^2}{\dfrac{L_0^i \times T_k}{L_0^{t_1}+L_0^{t_2}}+} + \sum_{i=t_1,t_2} \frac{\left(L_\omega^{t_i} - \dfrac{L_0^i \times T_\omega}{L_0^{t_1}+L_0^{t_2}}\right)}{\dfrac{L_0^i \times T_\omega}{L_0^{t_1}+L_0^{t_2}}}$$

que se distribuye aproximadamente según una χ^2 con ω grados de libertad. La resolución del contraste, previa fijación de la región crítica, es inmediata: un alto valor para el estadístico χ^2 está indicando que las diferencias entre los valores observados y los esperados son lo suficientemente significativas para determinar comportamientos diferentes del fenómeno F en el tiempo o en el espacio.

Conviene hacer notar que en la expresión anterior de χ^2 el valor absoluto tanto del numerador como el denominador se ven afectados por el orden de magnitud de los datos utilizados. Esto es, dicho valor se ve afectado por el orden de magnitud del tamaño de la muestra. En efecto, si todos los datos de la tabla que define al estadístico χ^2 se multiplican por una constante, el estimador también se ve afectado por esa misma constante. Este es el motivo por el que, a la hora de trabajar con datos concretos, deben prepararse previamente para que el contraste, por la alta magnitud de las frecuencias a comparar, no rechace sistemáticamente la hipótesis nula: valores inflados del tamaño muestral total invalidan la prueba. Runyon & Haber (1967) advierten de este efecto no deseado hablando del error de la N inflada, y Cochran (1952) demuestra que la potencia del contraste tiende a la unidad cuando el tamaño muestral es grande.

Dado que cada tabla demográfica parte de un efectivo inicial $L_0^{t_i}$ que es arbitrario, la fijación de este valor incial afecta a la aplicación posterior del contraste. De ahí que corresponda fijar la potencia de cada tabla (el efectivo de la generación ficticia inicial). Para una tabla por edades simples es de preveer, aproximadamente, una tabla resultante para el estadístico χ^2 de $2\times(\omega+1)$ casillas. Por tanto, el número mínimo de muestra, esto es, de población a considerar deberá ser mayor de $5\times 2\times(\omega+1)$ personas, a fin de que en todas las casillas pudiera aparecer el número mínimo exigido en la metodología general del contraste. En caso contrario, ese número total podría disminuir previa agrupación de categorías de clasificación. También disminuiría considerablemente este número en el caso de tablas con edades agrupadas. En cuanto al valor máximo, su fijación debe atender al efectivo total real del que se han obtenido los datos con los que se calcularon las tablas demográficas a comparar. La correcta aplicación del test de la χ^2 exige que los valores de todas las celdillas de la tabla de datos reflejen la intensidad real del fenómeno demográfico. Se hace necesario, pues, introducir el factor de elevación

$$F^{t_i} = \frac{\widehat{I}_0^{t_i}}{I_0^{t_i}} = \frac{\hat{I}_0^{t_i}}{\sum_{x=0}^{\omega-1} D_x^{t_i}}$$

en donde $\widehat{I}_0^{t_i}$ es el *número total de sucesos reales A ocurridos en la población de referencia* t_i, factor a partir del cual vuelven a calcularse la potencia y el calendario de cada una de las tablas a utilizar en el contraste.

Así pues, las nuevas potencias respectivas para ambas tablas, $\widehat{L}_0^{t_i}$, serán:

$$\widehat{L}_0^{t_i} = L_0^{t_i} \times \frac{\widehat{I}_0^{t_i}}{I_0^{t_i}} = L_0^{t_i} \times \frac{\widehat{I}_0^{t_i}}{\sum_{x=0}^{\omega-1} D_x^{t_i}} = L_0^{t_i} \times F^{t_i}$$

En el caso de que la tabla se hubiera calculado con los datos de más de un año, el total $\widehat{I}_0^{t_i}$ utilizado en el factor de elevación sería la correspondiente media de los totales de los años considerados. A partir de la potencia $\widehat{L}_0^{t_i}$, los flujos utilizados en la definitiva tabla de cálculo del estadístico χ^2 se recalculan según:

$$\widehat{D}_x^{t_i} = \widehat{L}_x^{t_i} \times q_x^{t_i} \qquad x = 0, 1, \ldots, \omega - 1$$

siendo

$$\widehat{L}_x^{t_i} = L_x^{t_i} \times F^{t_i} \qquad x = 0, 1, \ldots, \omega - 1, \omega$$

los correspondientes valores de la serie de supervivientes de la tabla demográfica acomodada a la nueva potencia $\widehat{L}_0^{t_i}$, por lo que el estadístico χ^2 toma ahora la expresión:

$$(1) \qquad \chi^2 = \sum_{i=t_1,t_2} \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{\left(\hat{D}_k^i - \dfrac{\hat{L}_0^i \times \left(\hat{D}_k^{t_1} + \hat{D}_k^{t_2} \right)}{\hat{L}_0^{t_1} + \hat{L}_0^{t_2}} \right)^2}{\dfrac{\hat{L}_0^i \times \left(\hat{D}_k^{t_1} + \hat{D}_k^{t_2} \right)}{\hat{L}_0^{t_1} + \hat{L}_0^{t_2}}} + \sum_{i=t_1,t_2} \frac{\left(\hat{L}_\omega^{t_i} - \dfrac{\hat{L}_0^i \times \left(L_\omega^{t_1} + L_\omega^{t_2} \right)}{\hat{L}_0^{t_1} + \hat{L}_0^{t_2}} \right)}{\dfrac{\hat{L}_0^i \times \left(L_\omega^{t_1} + L_\omega^{t_2} \right)}{\hat{L}_0^{t_1} + \hat{L}_0^{t_2}}}$$

El proceso descrito es equivalente a considerar en la expresión de χ^2 un valor modificado para $D_x^{t_i}$ según la expresión:

$$\widehat{D}_x^{t_i} = D_x^{t_i} \times \frac{\widehat{L}_0^{t_i}}{L_0^{t_i}} = D_x^{t_i} \times F^{t_i}$$

manteniéndose por tanto la misma estructura de proporcionalidad entre los flujos $\widehat{D}_x^{t_i}$ que la existente entre los flujos $D_x^{t_i}$ de la tabla original:

$$\frac{\widehat{D}_x^{t_i}}{\widehat{D}_{x+1}^{t_i}} = \frac{D_x^{t_i}}{D_{x+1}^{t_i}}$$

siendo además iguales los calendarios de ambas tablas (la original, y la transformada con la nueva potencia) $\widehat{d}\,(x, x+1) = d(x, x+1)$, y las respectivas medias de los calendarios $\widehat{\overline{d}} = \overline{d}$, al verificarse:

$$\begin{aligned}
\hat{d}(x, x+1) &= \frac{\hat{D}_x}{\hat{I}} = \frac{D_x \times F}{I \times F} = d(x, x+1) \\
\widehat{\overline{d}} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\widehat{I}} \left(x_0\, \widehat{L}_{x_0} + \sum_{x=x_0+1}^{x_\omega - 1} \widehat{L}_x - (x_\omega - 1)\, \widehat{L}_{x_\omega} \right) = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\widehat{I}} \times \frac{\widehat{I}}{I} \left(x_0 L_{x_0} + \sum_{x=x_0+1}^{x_\omega - 1} L_x - (x_\omega - 1) L_{x_\omega} \right) = \overline{d}
\end{aligned}$$

En definitiva, la correcta aplicación del contraste obliga a homogeneizar la escala de las series de flujo de sucesos de ambas tablas demográficas a utilizar, para que así la generación ficticia inicial de las mismas sea de $\widehat{L}_0^{t_i}$ efectivos reales, agrupando posteriormente las edades necesarias para conseguir frecuencias superiores a 5, según se establece en la teoría general de estos contrastes. Finalmente, la generalización a la comparación simultánea de más de dos tablas demográficas es inmediata.

3. APLICACIÓN

Planteamos dos aplicaciones distintas del contraste de homogeneidad anterior. En la primera de ellas, se estudia la significación estadística de la diferencia entre los calendarios de la mortalidad para la población de dos provincias (comparación territorial); en la segunda, la metodología anterior se aplica para determinar la significación de dos modelos de tablas-tipo, también de mortalidad. Como el fenómeno demográfico considerado en ambos ejemplos –la mortalidad– tiene como intensidad relativa la unidad, la aplicación de la metodología anterior se simplifica notablemente, al resultar ser

$$L_{\omega}^{t_i} = 0$$

y, por lo tanto

$$L_0^{t_i} = I_0^{t_i} \qquad (2)$$

con la consiguiente desaparición de la última categoría de clasificación en la Tabla 1.

3.1. Aplicación primera

Para las provincias de Valencia y Alicante, y para la población total (sin distinguir sexo), son conocidas sus tablas completas de mortalidad, centradas en el período 1989-1992, expresadas ambas para unos efectivos iniciales de 10^5 personas. Dados los bajos niveles de mortalidad alcanzados por las poblaciones de ambas provincias –que puede apreciarse comparando, por ejemplo, sus esperanzas de vida como indicador sintético más utilizado–, tiene pleno sentido plantearse por su significación estadística, toda vez que, a simple vista, no llega a apreciarse el sentido y la fuerza de las inevitables diferencias entre ellas.

Las defunciones teóricas para ambos ámbitos, una vez reducida la escala de sus tablas de mortalidad correspondientes a la de una generación ficticia de $\widehat{L}_0^{t_1} = \widehat{I}^{t_1} = 10{,}401$ personas para Alicante y $\widehat{L}_0^{t_2} = \widehat{I}^{t_2} = 19{,}073$ para Valencia (media respectiva de las defunciones ocurridas en ambas provincias en el cuatrienio 1989-1992) y agrupadas las edades para conseguir frecuencias esperadas superiores a 5, se recogen en la tabla siguiente:

Tabla 2. Defunciones teóricas. Población total. Tablas de mortalidad 1989-1992. Provincias de Alicante y Valencia

Edad	Alicante	Valencia	Edad	Alicante	Valencia	Edad	Alicante	Valencia
0	63	134	39	14	30	71	201	394
1	8	14	40	15	31	72	221	425
2	5	8	41	17	33	73	236	460
3 y 4	6	13	42	19	35	74	254	490
5 y 6	6	9	43	20	36	75	270	522
7 y 8	5	7	44	21	39	76	287	556
9 a 11	6	10	45	24	44	77	307	600
12 y 13	5	9	46	25	49	78	332	627
14 y 15	9	16	47	28	54	79	358	664
16	7	12	48	28	57	80	377	698
17	8	14	49	32	65	81	402	726
18	9	16	50	34	73	82	417	736
19	9	17	51	38	78	83	420	755
20	9	18	52	40	84	84	418	751
21	9	18	53	46	97	85	415	725
22	10	19	54	48	100	86	401	693
23	10	21	55	53	105	87	376	655
24	11	22	56	57	116	88	352	602
25	11	23	57	64	125	89	328	551
26	11	25	58	69	135	90	299	495
27	11	26	59	75	146	91	251	412
28	12	26	60	82	160	92	217	353
29	12	26	61	89	173	93	188	305
30	11	26	62	96	185	94	158	258
31	11	26	63	104	203	95	128	209
32	12	25	64	114	220	96	96	159
33	11	25	65	127	240	97	67	111
34	11	27	66	136	259	98	43	70
35	11	27	67	148	282	99	24	40
36	12	27	68	162	308	100	12	20
37	12	28	69	173	332	101 ó +	7	13
38	13	29	70	185	361			

A partir de esas defunciones teóricas, el estadístico χ^2 definido en (1) toma el valor:

$$\chi^2 = 35,31$$

lo que, para una significación del 5 % en una χ^2_{94}, no permite rechazar la hipótesis nula.

Conclusión: las estructuras por edades de la mortalidad de las provincias de Alicante y Valencia, para el período 1989-1992, son significativamente iguales.

3.2. Aplicación segunda

La segunda aplicación se realiza sobre un caso muy particular de tablas demográficas: las *tablas-tipo* o *tablas-modelo* de mortalidad. Estas tablas suministran las relaciones empíricas entre ciertos datos sobre la mortalidad conocidos, pero incompletos, y las series biométricas de una tabla de mortalidad abreviada. Su uso está muy extendido, y es de plena aplicabilidad en los procesos proyectivos. La notación desarrollada con anterioridad se simplifica notablemente ahora, ya que el fenómeno demográfico mortalidad tiene como intensidad la unidad y las potencias de ambas tablas son iguales.

El objetivo de esta segunda aplicación, pues, consiste en determinar la significación de dos modelos de tablas-tipo, correspondientes a las mujeres para los niveles 26 y 27 de la zona occidental, tomadas de Coale y Guo (1991). Y, concretamente, determinar a partir de qué potencia esas tablas no pueden considerarse representativas de mortalidades diferentes, para cierta significación estadística previamente fijada.

La Tabla 3 recoge la serie de defunciones teóricas de dichas tablas. La potencia utilizada en ellas es de 10^6 efectivos:

Tabla 3. Tablas-tipo de mortalidad

	Nivel 27		**Nivel 26**	
Edad	**Supervivientes**	**Defunciones**	**Supervivientes**	**Defunciones**
0	1,000,000	2,831	1,000,000	4,033
1	997,169	1,194	995,967	1,454
5	995,975	145	994,513	459
10	995,830	128	994,054	383
15	995,702	571	993,671	1,003
20	995,131	1,126	992,668	1,433
25	994,005	1,495	991,235	1,825
30	992,510	1,673	989,410	2,170
35	990,837	2,205	987,240	3,027
40	988,632	3,458	984,213	4,711
45	985,174	5,306	979,502	7,309
50	979,868	9,276	972,193	11,523
55	970,592	11,549	960,670	16,333
60	959,043	17,190	944,337	24,888
65	941,853	24,787	919,449	37,934
70	917,066	43,813	881,515	64,897
75	873,253	89,801	816,618	115,903
80	783,452	167,203	700,715	185,228
85	616,249	237,742	515,487	225,531
90	378,507	226,049	289,956	184,253
95	152,458	120,321	105,703	85,478
100	32,137	32,137	20,225	20,225
Total		1,000,000		1,000,000

La expresión del estadístico χ^2, en este caso de coincidencia de potencias e intensidad unidad, es más simple (ver 2):

$$\chi^2 = \sum_{i=niveles26,27} \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{\left(D_k^i - \frac{I^i \times T_k}{I^{26}+I^{27}}\right)^2}{\frac{I^i \times T_k}{I^{26}+I^{27}}} = \sum_{i=niveles26,27} \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{\left(D_k^i - \frac{T_k}{2}\right)^2}{\frac{T_k}{2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{\left(D_k^{26} - \frac{D_k^{26}+D_k^{27}}{2}\right)^2}{\frac{D_k^{26}+D_k^{2}7}{2}} + \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{\left(D_k^{27} - \frac{D_k^{26}+D_k^{27}}{2}\right)^2}{\frac{D_k^{26}+D_k^{2}7}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{\left(D_k^{26}-D_k^{27}\right)^2}{\left(D_k^{26}+D_k^{27}\right)} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{\left(D_k^{27}-D_k^{26}\right)^2}{\left(D_k^{26}+D_k^{27}\right)} = \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{\left(D_k^{26}-D_k^{27}\right)^2}{D_k^{26}+D_k^{27}}$$

Una primera aproximación a la situación planteada queda recogida en la Tabla 4, en la que se aplica el contraste desarrollado en el apartado anterior para diferentes potencias. Dado el objetivo previsto, en esta aplicación no es necesario modificar las potencias de las tablas-tipo:

Tabla 4. Nivel de significación: 5 %

Potencia de la tabla	χ^2	Grados libertad	Significación
1.000.000	28157.7	21	Si
10.000	281.2	19	Si
1.000	28.0	13	Si
500	14.0	11	No

De la Tabla 4 se deduce que la potencia de las tablas-tipo que hace no rechazable la hipótesis de su igualdad debe estar situada entre los valores 500 y 10^3. Por lo tanto, y tras la aplicación sucesiva del contraste anterior para un nivel de significación del 5 %, se concluye que la potencia límite a partir de la cual existe significación es de 752 individuos (χ^2 = 21.02 y 12 grados de libertad).

Conclusión: hay que descender a una población extraordinariamente pequeña −con un número total anual máximo de defunciones de 752 mujeres− para poder afirmar que las tablas correspondientes a los niveles 26 y 27 para las mujeres de la zona occidental, tomadas de Coale y Guo (1991), responden a una estructura de mortalidad semejante.

BIBLIOGRAFÍA

Coale, A. & Guo, G. (1991). «Utilización de nuevas tablas modelo de mortalidad para tasas de mortalidad muy bajas en proyecciones demográficas», en *Boletín de Población de las Naciones Unidas*, 30. Naciones Unidas. Nueva York.

Cochran, W.G. (1952). «The χ^2 test of goodness of fit». *Ann. Math. Statist.*, 23, 315-345.

Cochran, W.G. (1954). «Some methods for strengthening the common χ^2 test». *Biometrics*, 10, 417-451.

Leguina, J. (1981). *Fundamentos de Demografía*. Siglo XXI Editores. Madrid.

Runyon, R. & Haber, A. (1967). *Fundamentals of Behavioral Statistics*. Addison-Wesley. Massachusetts.

Suchindran, C.M. & Namboodiri, K. (1987). *Life Table Techniques and their Application*. Orlando, Academic Press.

ENGLISH SUMMARY

COMPARISON OF TWO DEMOGRAPHIC TABLES: APPROXIMATION TO THEIR STATISTICAL SIGNIFICANCE

ERNESTO J. VERES FERRER
Universidad de Valencia*

In this work is analyzed the statistical significance of the possible equality of two demographic tables. Concretely, it is presented the applicability of a classic tests of the statistical methods —that Chi-Square test— to contrast the null hypothesis «H_0 = two demographic tables are equal, this is, answer to a same structure of the studied demographic phenomenon», against the alternative that denies it. Both tables are referred to an only demographic phenomenon for the same territorial area and two different moments of time (temporal test), or for the same temporal reference in two populations of different territorial area (territorial test). The methodology applied is described for two situations: for the comparison of the mortality levels of two provinces, and on two tables-type corresponding at each mortality levels.

Keywords: Calendar, Chi-Square test, demographic table, hypothesis testing, intensity, life tables-type

AMS Classification (MSC 2000): 62F03, 62G10, 62P05, 62P25, 92 H20

---

* Departamento de Economía Aplicada. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Valencia. Campus de los Naranjos. 46022 Valencia. E-mail: Ernesto.Veres@uv.es.

– Received March 1999.
– Accepted November 1999.

The model known as *demographic table* allows one to analyse a single demographic phenomenon F by means of a certain characteristic event A, which we suppose is unrepeatable. The information for the analysis is provided by observing the incidence of event A on a cohort, studying the frequency with which this characteristic event begins to appear from an initial age $-$which we denote by x_0- , until a final age when the event no longer appears $-$denoted by $x_\omega-$.

The demographic table includes three fundamental biometric series. Once any of the series is known, the other two are also known: *series of survivors*, $\left\{L_x\right\}_{x=x_0}^{x_\omega}$; *event flow series*, $\left\{D(x,x+1)\right\}_{x=x_0}^{x_\omega-1}$; and *series of probabilities of an occurrence of event A, or hazard series*, $\left\{q_x\right\}_{x=x_0}^{x_\omega-1}$.

Intensity I and *Calendar* $d(x,x+1)$, are two basic analytical indices which are easily deduced from a demographic table.

With the previous elements, in this paper we intend to determine, with statistical significance, if two demographic tables $-$corresponding to two different moments, or to two distinct territories$-$ are equal. For this we propose the homogeneity test based on the χ^2 Chi-Square test, applied to the respective series $D(x,x+1)$.

When there are large differences between the two demograghic tables, their significance is plainly evident. In fact, the order of magnitude of the differences between their respective biometric series confirms the variation $-$in one direction or another$-$ between the levels reached by phenomenon F expressed by both tables. It is irrelevant, therefore, to carry out any other type of analysis. However, when the differences are reached by said biometric series and the classic indicators deduced from these are not sufficiently large to evaluate their significance at a simple glance, we can wonder about the *statistical significance* of these small differences. We can therefore understand the full application of the statistical techniques and models to attempt to explain it (this approach involves incorporating technical demographic tables into the study, which are Statistical Methods) and, in particular, the hypothesis testing.

We therefore consider that the flows of events A gathered in each series of the two demographic tables considered correspond to the observations of the two populations $-$those derived from the incidence of phenomenon F in two moments in time, or in two territories, to be compared$-$, and that they have been classified according to the same criteria «age of the person when characteristic event A takes place». We denote by $L_0^{t_1}$ and $L_0^{t_2}$ the respective powers of both demographic tables, which correspond to the different times or territories t_1 and t_2.

The population associated with each of these tables may be represented by means of a random variable ξ_x, which adopts values on the categories of classification contained in these. The formulation of the hypothesis to be contrasted is established in the following well-known terms:

H_0: levels of phenomenon F in t_1 and t_2 are homogeneous,
or, equally, distributions which express the occurrence of ages of F are equal
as opposed to the alternative
H_1: the levels of phenomenon F in t_1 and t_2 are not homogenous, or,
equally ,distributions which express the occurrence by ages of F are different

We observed that the proposed contrast only looks at the structure of incidence by ages of phenomenon F studied, that is, to its calendar. Hence the hypothesis to be contrasted may be reformulated in the following way:

H_0: the calendars of phenomenon F are equal
as opposed to the alternative
H_1: the calendars of phenomenon F are different

When the hypotheses are described in this way, the contrast will consider that phenomenon F behaves in a different way provided that the respective calendars are different, even though the intensity of the two tables to be compared are equal.

This homogenous contrast between populations leads one to consider flows $D(x, x+1)$ as manifestations of the random variable ξ_x studied on the collective theory of L_0 people. The data double entry table, obtained from these democratic tables, would therefore have the following structure:

Year \ \ Territory	**Age**					**Total**
	$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{x_1}$	....	$\boldsymbol{x_\omega - 1}$	$\boldsymbol{x_\omega}$	
$\boldsymbol{t_1}$	$D_0^{t_1}$	$D_1^{t_1}$	....	$D_{\omega-1}^{t_1}$	$L_\omega^{t_1}$	$L_0^{t_1}$
$\boldsymbol{t_2}$	$D_0^{t_2}$	$D_1^{t_2}$	....	$D_{\omega-1}^{t_2}$	$L_\omega^{t_2}$	$L_0^{t_2}$
Total	$\boldsymbol{T_0}$	$\boldsymbol{T_1}$	....	$\boldsymbol{T_{\omega-1}}$	$\boldsymbol{T_\omega}$	$L_0^{t_1} + L_0^{t_2}$

in which: $L_0^{t_i}$ is the respective power of table t_i; to simplify the notation one establishes that $D(x_k, x_{k+1}) = D_k$ and $L_{x_\omega}^{t_i} = L_\omega^{t_i}$; ω expresses the last classification category used which corresponds to the last age when demographic phenomenon F studied has no more incidence on the population; and, finally, $D_k^{t_1} + D_k^{t_2} = T_k$, $\forall\, x_k \neq x_\omega$, and $L_\omega^{t_1} + L_\omega^{t_2} = T_\omega$.

The previous table includes as a last category of classification those final survivors who were never affected by demographic phenomenon F, in order for the correct application of the χ^2 in a homogeneity test, which forces one to consider the excluded events as a criteria of classification for the populations dealt with (in our case, the two demographic tables), events which also constitute a partition of both populations.

One should note that the homogeneity contrast is sensitive to the order of magnitude of the data used. This is why, when working with concrete data, these must be previously prepared so that the contrast, by the high magnitude of frequencies to compare, does not systematically contradict the null hypothesis: inflated samples of total sample size invalidate the test. The preparation of the original information is carried out taking into account the effective totals of the real flow of events from those which have been obtained from the data with which the demographic tables were calculated to be compared.

Finally, in this paper two different applications of the previous homogeneity contrast are proposed. In the first of these, we study the statistical significance of the difference between the mortality calendars for the population of the two provinces (territorial comparison); and in the second, the previous methodology is applied in order to determine the significance of the two life table-type models.