QÜESTIIÓ, vol. 25, 3, p. 393-414, 2001

UNA GENERALIZACIÓN DE LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS LOG-NORMAL Y DE GOMPERTZ COMO PROCESOS DE ITÔ

JUAN GÓMEZ GARCÍA

FULGENCIO BUENDÍA MOYA*

Estudiamos una ecuación diferencial estocástica de Itô que es una generalización de los modelos estocásticos logarítmico-normal y de Gompert. Reducimos la ecuación mediante una transformación de cambio de estado a otra que resulta una generalización de la ecuación de Langevin, que rige el proceso de Uhlenbeck-Ornstein. A partir de la expresión analítica de las soluciones de ésta y de la original estudiamos las características estadísticas de ambos procesos solución, en particular los momentos de las distribuciones finito dimensionales, sus funciones de densidad de transición, las distribuciones límite y las condiciones de estacionariedad, obteniendo que la expresada generalización del proceso de U-O es el único proceso Gaussiano, Markoviano y estacionario no centrado en tiempo continuo. Por otra parte, se establece que las potencias del proceso lognormal-Gompertz generalizado satisfacen una E.D.E. del mismo tipo.

A generalization of the log-normal and Gompertz stochastic processes as Itô processes

Palabras clave: Ecuación diferencial estocástica, ecuaciones de Kolmogorov, proceso log-normal, proceso de Gompertz, proceso de Uhlenbeck-Ornstein, ecuación de Langevin

Clasificación AMS (MSC 2000): 60H10

* Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía. Facultad de Economía y Empresa. Universidad de Murcia. 30100 Murcia, España.

– Recibido en marzo de 2000.
– Aceptado en junio de 2001.

1. INTRODUCCIÓN

Los procesos estocásticos de difusión han sido profusamente empleados en las dos últimas décadas para analizar el comportamiento de fenómenos económicos, sociales, biológicos, médicos, etc. [véase, p.e., los libros de Bharucha-Reid (1960), Bartolomew (1973), Wong-Hajek (1985), Sobczyk (1991), Todorovic (1992), Ricciardi (1977), Malliaris and Brock (1982), Sengupta (1986), Gutierrez-Valderrama (1994), McShane (1994), Kijima (1997), etc.]. En particular, los procesos de difusión log-normales, unidimensionales y multidimensionales, se han aplicado en el estudio y modelización de variables económicas. Tintner and Sengupta (1972) consideran este tipo de procesos como gobernadores de aquellos fenómenos en que podemos suponer que la tendencia media de la evolución de la variable en periodos cortos de tiempo (media infinitesimal del proceso) y la desviación cuadrática media de la variable en periodos cortos de tiempo (varianza infinitesimal del proceso) son proporcionales al valor de la variable. Así, Tintner and Thomas (1963), Tintner and Patel (1966), Tintner y Bello (1968), Tintner and Sengupta (1972) y Moreno Bas (1974), por ejemplo, presentan el proceso definido por su función de densidad de transición o por sus coeficientes de tendencia y de difusión.

Por otra parte el modelo estocástico de Gompertz ha sido utilizado para el estudio del crecimiento de ciertas poblaciones o de la difusión de innovaciones tecnológicas y de nuevos productos en el mercado [ver Skiadas, Giovanis and Dimoticalis (1993)].

La presentación de los modelos estocásticos de difusión a partir de los coeficientes de tendencia y de difusión precisa de un análisis acerca de la existencia de un tal proceso y, sobre todo, de la confirmación de que la función de densidad de transición puede obtenerse como solución de alguna de las ecuaciones de Kolmogorov asociadas al proceso. Por otra parte, las ecuaciones de Kolmogorov, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo parabólico, son en general de dificil resolución y se requieren a menudo técnicas especiales de aproximaciones numéricas [ver Bouleau (1988) o Todorovic (1992), p.e.]. En realidad estas ecuaciones han sido resueltas explícitamente sólo en unos pocos casos simples [ver Bharucha-Reid (1960), Arnold (1974), Bhattacharya-Waymire (1990) ó Sobczyk (1991), p.e.]. A este respecto hay que destacar el trabajo de Ricciardi (1976) sobre la posibilidad, en determinados casos muy particulares, de reducir las ecuaciones de Kolmogorov a las de un proceso Wiener, y el de Gutiérrez *et al.* (1997) acerca de la construcción de funciones de densidad de transición de ciertas extensiones no necesariamente homogéneas de un proceso de difusión. En cualquier caso, el conocer únicamente los momentos infinitesimales del proceso o la función de densidad de transición, limita las posibilidades de estudio del proceso.

En este trabajo consideramos un proceso de difusión que es una extensión de los modelos logarítmico-normal (o de crecimiento exponencial o Malthusiano) y de crecimiento de Gompertz, a través de la solución de una ecuación diferencial estocástica de Itô. De esta manera, hacemos todo el estudio del proceso a partir exclusivamente de la expresión analítica de la solución de la ecuación. En particular, obtenemos las expresiones de los momentos de las distribuciones finito dimensionales del proceso, a diferencia de los trabajos vía ecuaciones de Kolmogorov, que no disponen de la expresión del proceso y sólo dan los de la distribución unidimensional o variable general del proceso. Una recopilación de estos modelos, para poblaciones, puede verse, entre otros muchos trabajos, en Ricciardi (1977) y (1986). Entendemos que este estudio de una generalización de los procesos lognormal y de Gompert vía ecuaciones de Itô mejora en cuanto a rigor de método y amplitud de resultados a los que se han realizado anteriormente vía ecuaciones de Kolmogorov. El trabajo se completa con un estudio de las potencias de los procesos log-normales, generalizados y estrictos, utilizando igualmente la E.D.E. que satisfacen, del que no tenemos conocimiento que existan tratamientos anteriores similares.

2. PLANTEAMIENTO DE LA E.D.E. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

Sea la ecuación diferencial estocástica (E.D.E.) de Itô

$$\begin{aligned} &dX(t) = [a - b\log X(t)]\,X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dW(t) \qquad t \in [0,\infty) \\ &\text{con } X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^+;\ a, b, \sigma \ \underline{\text{constantes}} \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $X(t)$ es un proceso con valores en $(0,\infty) = \mathbb{R}^+$ y, naturalmente, $W(t)$ un proceso de Wiener unidimensional estándar.

Se tiene aquí, pues, que las funciones coeficientes drift y de martingala de la ecuación son, respectivamente

$$m(t,x) = m(x) = (a - b\log x)\,x \qquad \sigma(t,x) = \sigma(x) = \sigma x$$

En la E.D.E. (2.1), para $b = 0$ aparece la E.D.E. Malthusiana, que rige el proceso logarítmico-normal, y para $a = 0$ se tiene el modelo estocástico de Gompertz [ver, p.e., Skiadas, Giovanis and Dimoticalis (1994)].

Los coeficientes de la E.D.E. (2.1) cumplen las condiciones que permiten plantear esta ecuación [ver, p.e., Wong and Hajek (1985)], ya que $\forall T \in [0,\infty)\ \forall x \in (0,\infty)$ tenemos

$$\int_0^T |m(t,x)|\,dt = \int_0^T |a - b\log x|\,|x|\,dt = |a - b\log x|\,|x|\,T < \infty$$

$$\int_0^T |\sigma(t,x)|^2 dt = \int_0^T \sigma^2 x^2 dt = \sigma^2 x^2 T < \infty$$

En cuanto a probar la existencia de solución global única para (2.1), observaremos primero que esta ecuación es atípica en el sentido de que su coeficiente drift $m(t,x) = (a - b\log x)x$ sólo está definido para $x > 0$, y no sabemos si se le puede aplicar el resultado clásico del teorema de existencia y unicidad de soluciones, donde siempre se supone $m(t,x)$, $\sigma(t,x) : [t_0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[t_0, T] \subseteq \mathbb{R}_0^+$, medibles, etc. Por tanto, en vez de aplicar directamente dicho teorema a (2.1), procederemos aplicando a esta ecuación una transformación de *cambio de estado* [ver, p.e. Bhattacharya-Waymire (1990), pg. 382 ó Ikeda-Watanabe (1989), pgs. 197 y siguientes]. Así, definimos la variable $Y(t) = \log X(t)$ y aplicando el lema de Itô obtenemos

$$dY = \frac{dX}{X} - \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{X}\right)^2$$

que junto con (2.1) nos da

$$dY = \left(a - \frac{1}{2}\sigma^2 - bY\right)dt + \sigma\, dW$$

pues $\left(\frac{dX}{X}\right)^2 = [(a - b\log X)\,dt + \sigma\, dW]^2 = \sigma^2 dt$ (aplicando las reglas de cálculo estocástico). Entonces, para $Y(t)$ tenemos la E.D.E.

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{aligned} &dY = (\mu - bY)\,dt + \sigma\, dW \text{ con } \mu = a - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ &\text{con c.i. } Y(0) = \log X(0) = Y_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Para esta ecuación (2.2) es sencillo comprobar la verificación de las condiciones del teorema de existencia y unicidad de soluciones de una E.D.E. autónoma o tiempo-independiente [ver, p.e. Arnold (1974), pgs. 152-153], así que existe una solución global única $Y(t)$ de (2.2) que es un proceso de difusión. Resulta de esto que $X(t) = e^{Y(t)}$ es un proceso de difusión (teorema de cambio de estado) que, evidentemente, verifica (2.1). Probamos así la existencia de procesos de difusión solución de la E.D.E. (2.1). La unicidad de las soluciones de (2.2) determina la de las soluciones de (2.1). (Vemos que la aplicación de la transformación $Y(t) = \log X(t)$ antes de saber si $X(t)$ existe debe entenderse en sentido condicional, es decir suponiendo que $X(t)$ existe, lo que será cierto si y sólo si $Y(t)$, solución de (2.2), existe).

Llegamos, pues, a que la E.D.E. (2.1) tiene una única solución global $\{X(t), t \geqslant 0\}$ que es un proceso de difusión con coeficientes de tendencia y de difusión

$$A_1(t,x) = m(t,x) = (a - b\log x)x \quad \text{y} \quad A_2(t,x) = \sigma^2(t,x) = \sigma^2 x^2$$

respectivamente, y cuya función de densidad de transición $p'(x,t/x_0,t_0)$ verifica, y es su única solución, la ecuación atrasada de Kolmogorov [ver Ikeda-Watanabe (1989), pg. 215]:

$$\frac{\partial p'(x,t/x_0,t_0)}{\partial t_0} + (a - b\log x_0)\, x_0 \frac{\partial p'(x,t/x_0,t_0)}{\partial x_0} + \frac{1}{2}\sigma^2 x_0^2 \frac{\partial^2 p'(x,t/x_0,t_0)}{\partial x_0^2} = 0$$

(2.3) $$p'(x,t/x_0,t_0) = \delta(x - x_0)\,, t > t_0$$

3. ESTUDIO DEL PROCESO SOLUCIÓN DE LA E.D.E.

Para estudiar el proceso $\{X(t)\,, t \geqslant 0\}$ solución de (2.1), resolveremos primero la ecuación (2.2)

$$dY = (\mu - bY)\, dt + \sigma dW \text{ con } \mu = a - \frac{1}{2}\sigma^2$$
$$\text{con c.i. } Y(0) = \log X(0) = Y_0 \in \mathbb{R}$$

[Para $\mu = 0$ y $b > 0$ es la llamada ecuación de **Langevin** y el proceso solución el de **Uhlenbeck-Ornstein**: ver, p.e., Bouleau (1988)], cuya única solución $\{Y(t)\,, t \geqslant 0\}$, como hemos visto antes, es una difusión con coeficientes de tendencia (o coeficiente drift) y de difusión, respectivamente

$$A'_1(t,y) = \mu - by \qquad A'_2(t,y) = \sigma^2$$

y cuya función de densidad de transición $p(y,t/y_0,t_0)$ verifica la ecuación atrasada de Kolmogorov

$$\frac{\partial p(y,t/y_0,t_0)}{\partial t_0} + (\mu - by_0) \frac{\partial p(y,t/y_0,t_0)}{\partial y_0} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 p(y,t/y_0,t_0)}{\partial y_0^2} = 0$$

(3.1) $$\text{con } p(y,t/y_0,t_0) = \delta(y - y_0)\,,\ t > t_0$$

Consideraremos ahora una ecuación similar a la (2.2) pero con condiciones iniciales más generales, tomando un punto $t_o \in [0,\infty)$ arbitrario:

(3.2) $$dY = (\mu - bY)\, dt + \sigma dW \text{ con } \mu = a - \frac{1}{2}\sigma^2$$
$$\text{con c.i. } Y(t_0) = \log X(t_0) = C$$

donde $Y(t_0) = C$ es una variable aleatoria no degenerada e independiente de $W(t) - W(t_0)\,,\ t \geqslant t_0$. La solución de esta ecuación nos permitirá encontrar directamente la función de densidad de transición del proceso $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ solución de (2.2), y nos proporcionará también la solución de cualquier otra con condiciones iniciales más particulares, como la propia (2.2).

Establecemos la relación (para $b \neq 0$)

$$d\left\{e^{b(t-t_0)}\left[Y(t)-\frac{\mu}{b}\right]\right\} = e^{b(t-t_0)} b\left[Y(t)-\frac{\mu}{b}\right] dt + e^{b(t-t_0)} dY(t)$$

$$= e^{b(t-t_0)}\left\{dY(t)+[bY(t)-\mu]\,dt\right\} = e^{b(t-t_0)}\sigma dW(t) \tag{3.3}$$

que podemos expresar en su forma integral

$$e^{b(t-t_0)}\left[Y(t)-\frac{\mu}{b}\right] = Y(t_0)-\frac{\mu}{b}+\int_{t_0}^{t} e^{b(s-t_0)}\sigma dW(s) \tag{3.4}$$

o bien

$$Y(t) = \frac{\mu}{b}+e^{-b(t-t_0)}\left[Y(t_0)-\frac{\mu}{b}+\sigma\int_{t_0}^{t} e^{b(s-t_0)} dW(s)\right] \tag{3.5}$$

Si utilizamos ahora el resultado [ver, p.e. Ikeda-Watanabe (1989), pgs. 214-215, ó Arnold (1974), pgs. 146-148] que establece que la probabilidad de transición del proceso solución de (2.2) es la ley de probabilidad del proceso solución de la ecuación que se obtiene al sustituir en (2.2) la condición inicial por $Y(t_0) = y_0$, obtenemos de (3.5) que la densidad de transición $p(y,t/y_0,t_0)$ de $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ es la función de densidad de la variable general del proceso

$$Y(t,t_0,y_0) = \tfrac{\mu}{b}+e^{-b(t-t_0)}\left[y_0-\tfrac{\mu}{b}+\sigma\int_{t_0}^{t} e^{b(s-t_0)} dW(s)\right] \tag{3.5$'$}$$

por lo que $Y(t,t_0,y_0)$ es la variable $Y(t)$ del proceso solución de (2.2) condicionada por $Y(t_0) = y_0$: $Y(t)/Y(t_0) = y_0$.

Puesto que la variable $\int_{t_0}^{t} e^{b(s-t_0)} dW(s)$ es $N\left(0, \int_{t_0}^{t} e^{2b(s-t_0)} ds\right)$ [ver propiedades de la integral estocástica, p.e. en Arnold (1974)], resulta de $(3.5)'$ que $Y(t,t_0,y_0)$, es una variable Gaussiana con

$$E[Y(t,t_0,y_0)] = E[Y(t)/Y(t_0)=y_0] = \frac{\mu}{b}+e^{-b(t-t_0)}\left(y_0-\frac{\mu}{b}\right) \tag{3.6}$$

$$Var\left[Y\left(t,t_0,y_0\right)\right] = Var\left[Y\left(t\right)/Y\left(t_0\right)=y_0\right] = e^{-2b(t-t_0)}\sigma^2\int_{t_0}^{t} e^{2b(s-t_0)}ds$$

$$= \frac{\sigma^2}{2b}e^{-2b(t-t_0)}\left[e^{2b(t-t_0)}-1\right] = \frac{\sigma^2}{2b}\left[1-e^{-2b(t-t_0)}\right] \tag{3.7}$$

Así que la función de densidad de transición $p\left(y,t/y_0,t_0\right)$ del proceso $\{Y\left(t\right),t\geqslant 0\}$, solución de (2.2) será

$$p\left(y,t/y_0,t_0\right) = f_{Y\left(t\right)/Y\left(t_0\right)}\left(y/y_0\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{b}\left[1-e^{-2b(t-t_0)}\right]}}\exp\left\{\frac{-b\left[y-\frac{\mu}{b}-\left(y_0-\frac{\mu}{b}\right)e^{-b(t-t_0)}\right]^2}{\sigma^2\left[1-e^{-2b(t-t_0)}\right]}\right\}$$

con

$$\mu = a-\frac{1}{2}\sigma^2;\ y,y_0\in\mathbb{R};\ t>t_0;\ f_{Y(t_0)}\left(y_0\right)>0 \tag{3.8}$$

donde $f_{Y(t_0)}$ es la función de densidad de $Y\left(t_0\right)$.

Si en (3.5), (3.6) y (3.7) le damos a t_0 el valor 0 y tenemos en cuenta que $Y\left(0\right) = \log X\left(0\right)\in\mathbb{R}$, tenemos que la solución $\{Y\left(t\right),t\geqslant 0\}$ de la E.D.E. (2.2) es un proceso Gaussiano con

$$Y\left(t\right) = \frac{\mu}{b}+e^{-bt}\left[Y\left(0\right)-\frac{\mu}{b}+\sigma\int_0^t e^{bs}dW\left(s\right)\right] \tag{3.9}$$

$$E\left[Y\left(t\right)\right] = \frac{\mu}{b}+e^{-bt}\left(Y\left(0\right)-\frac{\mu}{b}\right) \tag{3.10}$$

(3.11)

$$Cov\left[Y\left(t\right),Y\left(s\right)\right] = e^{-b(t+s)}Cov\left[\sigma\int_0^t e^{bu}dW\left(u\right),\sigma\int_0^s e^{bu}dW\left(u\right)\right]$$

$$= e^{-b(t+s)}\left[\sigma^2 Cov\left(\int_0^t e^{bu}dW\left(u\right),\int_0^s e^{bu}dW\left(u\right)\right)\right]$$

$$= e^{-b(t+s)}\left[\sigma^2\int_0^{min(t,s)} e^{2bu}du\right] = e^{-b(t+s)}\left[\frac{\sigma^2}{2b}\left(e^{2bmin(t,s)}-1\right)\right]$$

$$(3.12)\qquad Var\left[Y\left(t\right)\right]=\frac{\sigma^2}{2b}\left[1-e^{-2bt}\right]$$

y cuya función de densidad de transición está dada por (3.8).

La función generatriz de momentos de las distribuciones finito dimensionales del proceso $\{Y(t), t \geqslant 0\}$es, para cada colección finita $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_k}$ $(t_1 < t_2 < \cdots < t_k)$

(3.13)

$$F\left(u_1,u_2,\ldots,u_k\right)=E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{k}u_iY_{t_i}\right)\right]=\exp\left[\sum_{i=1}^{k}u_iE\left(Y_{t_i}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}u_iu_jCov\left(Y_{t_i},Y_{t_j}\right)\right]$$

con $E\left(Y_{t_i}\right)$ y $Cov\left(Y_{t_i}, Y_{t_j}\right)$ dadas por (3.10) y (3.11) respectivamente.

En particular, para la distribución unidimensional o variable general del proceso, $Y(t)$, se tiene

$$(3.14)\qquad F_{Y(t)}\left(u\right)=\exp\left\{u\left[\frac{\mu}{b}+e^{-bt}\left(Y\left(0\right)-\frac{\mu}{b}\right)\right]+\frac{1}{2}u^2\left[\frac{\sigma^2}{2b}\left(1-e^{-2bt}\right)\right]\right\}$$

El proceso $\{X(t), t \geqslant 0\}$, solución única de la E.D.E. (2.1) está, después del estudio precedente, log-normalmente distribuido $\left(X(t) = X(0)\, e^{Y(t)-Y(0)}, X(0) = e^{Y(0)} \in \mathbb{R}\right)$y su función de densidad de transición $p'(x,t/x_0,t_0)$ es, si $x_0 = e^{y_0}$, aplicando la fórmula del cambio de variable para densidades condicionadas y después de (3.8):

$$\begin{aligned}
p'\left(x,t/x_0,t_0\right) &= f_{X(t)/X(t_0)}\left(x/x_0\right)=\left|\frac{1}{x}\right|f_{Y(t)/Y(t_0)}\left(\log x/\log x_0\right)=\\
&=\frac{1}{x}p\left(\log x,t/\log x_0,t_0\right)\\
&=\frac{1}{x\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{b}\left[1-e^{-2b(t-t_0)}\right]}}\exp\left\{\frac{-b\left[\log x-\frac{\mu}{b}-\left(\log x_0-\frac{\mu}{b}\right)e^{-b(t-t_0)}\right]^2}{\sigma^2\left[1-e^{-2b(t-t_0)}\right]}\right\}
\end{aligned}$$

$$(3.15)\qquad \forall x,x_0\in\mathbb{R}^+;\ t>t_0;\ f_{X(t_0)}\left(x_0\right)>0,\text{donde } \mu=a-\frac{1}{2}\sigma^2$$

Los momentos de las distribuciones finito-dimensionales del proceso log-normal generalizado $\{X(t), t \geqslant 0\}$ se deducen ahora de las fórmulas (3.14) y (3.13) de la función generatriz de momentos de las distribuciones unidimensional y k-dimensionales de su proceso Gaussiano soporte $\{Y(t), t \geqslant 0\}$. Son particularmente interesantes

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E\left(e^{Y(t)}\right) = F_{Y(t)}(1) = \\ &= \exp\left\{\left[\frac{\mu}{b} + e^{-bt}\left(\log X(0) - \frac{\mu}{b}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma^2}{2b}\left(1 - e^{-2bt}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} E\left[X(t)^2\right] &= E\left(e^{2Y(t)}\right) = F_{Y(t)}(2) = \\ &= \exp\left\{2\left[\frac{\mu}{b} + e^{-bt}\left(\log X(0) - \frac{\mu}{b}\right)\right] + 2\left[\frac{\sigma^2}{2b}\left(1 - e^{-2bt}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} E(X_t X_s) &= E\{\exp[Y(t) + Y(s)]\} = F(1,1) = \\ &= \exp\left\{EY(t) + EY(s) + \frac{1}{2}VarY(t) + \frac{1}{2}VarY(s) + Cov[Y(t), Y(s)]\right\} = \\ &= \frac{2\mu}{b} + \left[\log X(0) - \tfrac{\mu}{b}\right]\left(e^{-bt} + e^{-ts}\right) + \tfrac{\sigma^2}{4b}\left[2 - e^{-2bt} - e^{-2bs} + 2e^{-b(t+s)}\left(e^{2b\,min(t,s)} - 1\right)\right] \end{aligned} \tag{3.18}$$

de donde se pueden obtener inmediatamente la varianza y la función covarianza del proceso.

(Observamos que si bien el proceso logarítmico-normal propiamente dicho es un caso particular, para $b = 0$, sus características estadísticas, y en particular su función de densidad de transición [ver, p.e., Capocelli and Ricciardi (1974) y para el caso no homogéneo Buendía Moya y Gómez García (1995)]

$$p(x, t/x_0, t_0) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t - t_0)}} \exp\left\{-\frac{[\log x - \log x_0 - \mu(t - t_0)]^2}{2\sigma^2(t - t_0)}\right\} \quad \text{con } \mu = a - \frac{1}{2}\sigma^2 \tag{3.19}$$

no pueden obtenerse de las del proceso solución de la E.D.E. (2.1) haciendo $b = 0$, en cuyo caso la ecuación (2.2) es la E.D.E. del movimiento Browniano aritmético).

4. LAS DISTRIBUCIONES DE EQUILIBRIO Y LA ESTACIONARIEDAD

Como hemos indicado en el apartado anterior, para $b > 0$ el proceso $Y(t) = \log X(t)$ que, como sabemos, verifica (2.2):

$$dY = (\mu - bY)\,dt + \sigma dW \text{ con } \mu = a - \frac{1}{2}\sigma^2$$
$$Y(0) = Y_0 = \log X(0) \in \mathbb{R}$$

es una extensión del proceso de Uhlenbeck-Ornstein, que aparece como solución de la E.D.E. anterior para $\mu = 0$ y $b > 0$).

De (3.7) se obtiene:

Para $b < 0$, es $\lim_{t\to\infty} Var\left[Y(t)/Y(t_0) = y_0\right] = \infty$. (Sucede igual para $b = 0$, como puede verse en las referencias anteriores para ese caso). En contraste, para $b > 0$ aunque $Var\left[Y(t)/Y(t_0) = y_0\right]$ también crece con t, se tiene $\lim_{t\to\infty} Var\left[Y(t)/Y(t_0) = y_0\right] = \dfrac{\sigma^2}{2b}$. Similarmente, para $b > 0$, en (3.6) observamos que $\lim_{t\to\infty} E\left[Y(t)/Y(t_0) = y_0\right] = \dfrac{\mu}{b}$.

Si ahora aplicamos que una sucesión de variables aleatorias normales $Y_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$, con $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ y $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, converge en distribución a una variable normal $Y \sim N(\mu, \sigma)$ (basta considerar las funciones generatrices de momentos de las variables Y_n), obtenemos de (3.10) y (3.12) en particular, para $b > 0$, que $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ y por tanto $\{X(t), t \geqslant 0\}$ (la función $X(t) = e^{Y(t)}$ conserva la convergencia en distribución) tienen una distribución de equilibrio no degenerada, que es independiente de la condición inicial. Esto es

$$Y \sim N\left(\frac{\mu}{b}, \frac{\sigma^2}{2b}\right) \text{ independientemente de } Y(0). \tag{4.1}$$

$$X \sim \text{Log-normal, con } E(X) = \exp\left(\frac{\mu}{b} + \frac{\sigma^2}{4b}\right) \tag{4.2}$$

que es, pues, independiente de $X(0)$.

Se tiene, por tanto, de lo precedente, como en (3.8) y (3.15), para las densidades de probabilidad de transición a las distribuciones límite

$$p(y, y_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{b}}} \exp\left[-\frac{b\left(y - \frac{\mu}{b}\right)^2}{\sigma^2}\right] \tag{4.3}$$

$$p(x, x_0, t_0) = \frac{1}{x\sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{b}}} \exp\left[-\frac{b\left(\log x - \frac{\mu}{b}\right)^2}{\sigma^2}\right] \tag{4.4}$$

que son independientes de y_0 (ó de x_0) y de t_0.

Podemos determinar las condiciones en las que el proceso $Y(t)$, solución de la E.D.E.

$$\begin{aligned} &dY = (\mu - bY)\,dt + \sigma dW \text{ con } \mu = a - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ &Y(0) = C \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde C es una v.a. dada no degenerada e independiente de $W(t)\,,\ t \geqslant 0$, es estacionario.

Su solución, como en (3.9), es

$$Y(t) = \frac{\mu}{b} + e^{-bt}\left[Y(0) - \frac{\mu}{b} + \sigma\int_0^t e^{bs}dW(s)\right] \tag{4.6}$$

Entonces, si $Y(0)$ es Gaussiana, se tiene que $Y(t)$ es un proceso Gaussiano con

$$E[Y(t)] = \frac{\mu}{b} + e^{-bt}\left\{E[Y(0)] - \frac{\mu}{b}\right\} \tag{4.7}$$

(4.8)
$$\begin{aligned} Var[Y(t)] &= e^{-2bt}\left\{Var[Y(0)] + \sigma^2\int_0^t e^{2bs}ds\right\} = e^{-2bt}\left\{Var[Y(0)] + \frac{\sigma^2}{2b}\left(e^{2bt} - 1\right)\right\} \\ &= e^{-2bt}\left\{Var[Y(0)] + \frac{\sigma^2}{2b}\left(e^{2bt} - 1\right)\right\} = e^{-2bt}\left\{Var[Y(0)] - \frac{\sigma^2}{2b}\right\} + \frac{\sigma^2}{2b} \end{aligned}$$

(4.9)
$$\begin{aligned} Cov[Y(t),Y(s)] &= e^{-b(t+s)}Cov\left\{Y(0) + \sigma\int_0^t e^{bu}dW(u)\,,\, Y(0) + \sigma\int_0^s e^{bu}dW(u)\right\} \\ &= e^{-b(t+s)}\left\{Var[Y(0)] + Cov\left[Y(0)\,,\ \sigma\int_0^s e^{bu}dW(u)\right] + \right. \\ &\quad +Cov\left[Y(0)\,,\ \sigma\int_0^t e^{bu}dW(u)\right] + \\ &\quad \left. +\sigma^2 Cov\left[\int_0^s e^{bu}dW(u), \int_0^t e^{bu}dW(u)\right]\right\} = \\ &= e^{-b(t+s)}\left\{Var[Y(0)] + \sigma^2\int_0^{min(t,s)} e^{2bu}du\right\} = \\ &= e^{-b(t+s)}\left\{Var[Y(0)] + \frac{\sigma^2}{2b}\left(e^{2b\,min(t,s)} - 1\right)\right\} = \\ &= e^{-b(t+s)}\left\{Var[Y(0)] - \frac{\sigma^2}{2b}\right\} + \frac{\sigma^2}{2b}e^{-b|t-s|} \end{aligned}$$

De modo que si

$$Var[Y(0)] = \frac{\sigma^2}{2b} \quad \text{y} \quad E[Y(0)] = \frac{\mu}{b} \tag{4.10}$$

se tiene

$$\begin{aligned} Cov[Y(t), Y(s)] &= \frac{\sigma^2}{2b} e^{-b|t-s|} \\ E[Y(t)] &= \frac{\mu}{b} = \text{cte} \end{aligned} \tag{4.11}$$

y el proceso $Y(t)$, solución de la E.D.E. (4.5), es *estacionario en sentido amplio* [ver, p.e., Wong (1971)], y puesto que es Gaussiano (si $Y(0)$ es una variable Gaussiana), es *estacionario.* Como es solución única de una E.D.E. es un proceso de Markov, pero independientemente de esto, las condiciones (4.10), que nos dan las fórmulas (4.11), y el carácter Gaussiano determinan la condición de Markov, pues la expresión de la covarianza verifica la condición necesaria y suficiente para que un proceso Gaussiano sea de Markov. Puesto que la función covarianza de un proceso Markoviano, Gaussiano y estacionario es necesariamente de la forma $R(t,s) = Ce^{-K|t-s|}$ [ver, p.e., Papoulis (1980)], y las funciones media y covarianza determinan completamente todas las distribuciones finito dimensionales de un proceso Gaussiano, concluimos que este proceso con la condiciones (4.10), y que además puede considerarse separable, es el único Gaussiano, Markoviano y estacionario no centrado en tiempo continuo. Es decir, dado un proceso Gaussiano, Markoviano y estacionario, con función de covarianza $R(t,s) = Ce^{-K|t-s|}$ y media m, su ley coincide con la del proceso Y solución de (4.5), tomando $b = K$, $\sigma^2 = 2KC$ y $a = (m+C)K$.

(Para $\mu = 0$ es centrado y se trata, entonces, del proceso de **U-O** propiamente dicho, como es bien sabido).

Obviamente, las condiciones (4.10), con $Y(0) = \log X(0)$, y el carácter Gaussiano de la distribución inicial $Y(0)$ determinan también la estacionariedad de nuestro proceso lognormal y de Gompertz generalizados, solución de la E.D.E. que resulta de modificar en (2.1) la condición inicial:

$$\begin{aligned} & dX(t) = [a - b\log X(t)]X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dW(t) \qquad t \in [0,\infty) \\ & X(0) = K \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde ahora K es una v.a. no degenerada e independiente de $W(t), t \geqslant 0$.

5. POTENCIAS DE LOS PROCESOS LOG-NORMALES (generalizados y estrictos)

Consideramos de nuevo la ecuación diferencial de Itô (2.1):

$$dX = (a - b\log X)\, X\, dt + \sigma X\, dW \quad t \in [0,\infty)$$
$$X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^+;\ a, b, \sigma \text{ ctes.}$$

donde hemos puesto X por $X(t)$ y W por $W(t)$, como haremos frecuentemente en adelante para simplificar la notación.

Sea ahora el proceso dado por

$$\begin{aligned} Q(t) &= A(t)\,[X(t)]^{\gamma(t)} \\ A(t) &\neq 0,\ \gamma(t) \neq 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $A(t)$ y $\gamma(t)$ son funciones reales derivables para cada $t \in [0,\infty)$.

Aplicando el lema de Itô, de (2.1) y (5.1) obtenemos que la ecuación diferencial de Itô para Q es

$$\begin{aligned} dQ &= \left(\dot{A}X^{\gamma} + \dot{\gamma}AX^{\gamma}\log X\right) dt + A\gamma X^{\gamma-1} dX + \frac{1}{2}A\gamma(\gamma-1)\, X^{\gamma-2}\,(dX)^2 \\ &= \left(\dot{A}X^{\gamma} + \dot{\gamma}AX^{\gamma}\log X\right) dt + A\gamma X^{\gamma-1}\left[(a - b\log X)\, X dt + \sigma X\, dW\right] \\ &+ \frac{1}{2}A\gamma(\gamma-1)\, X^{\gamma-2}\sigma^2 X^2 dt = \\ &= \left[\frac{\dot{A}}{A} + \gamma\left(a + \frac{(\gamma-1)}{2}\sigma^2\right) + (\dot{\gamma} - \gamma b)\log X\right] AX^{\gamma}dt + \sigma\gamma AX^{\gamma}dW \\ &= \left[\frac{\dot{A}}{A} + \gamma\left(a + \frac{(\gamma-1)}{2}\sigma^2\right) + \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - b\right)\gamma\log X\right] Qdt + \sigma\gamma Q\, dW \\ &= \left[\frac{\dot{A}}{A} + \gamma\left(a + \frac{(\gamma-1)}{2}\sigma^2\right) + \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - b\right)(\log Q - \log A)\right] Qdt + \sigma\gamma Q\, dW \end{aligned} \tag{5.2}$$

con $\dot{A} = \frac{dA}{dt}$ y $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$.

Si A y γ son constantes, de (5.2) con $\dot{A} = \dot{\gamma} = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} dQ &= \left\{\gamma\left[a + \frac{(\gamma-1)}{2}\sigma^2\right] + b\log A - b\log Q\right\} Qdt + \sigma\gamma Q\, dW \\ &= (a' - b\log Q)\, Qdt + \sigma' QdW \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde $a' = \gamma\left[a + \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma^2\right] + b\log A$ y $\sigma' = \sigma\gamma$ son constantes.

Comparando (2.1) con (5.3), vemos que la estructura de la E.D.E. para Q es la misma que para X, excepto para los valores de los parámetros:

Las variables aleatorias potencias de X (procesos log-normales generales) tienen la misma familia distribucional que X.

En el caso $b = 0$, que corresponde a un proceso $X(t)$ log-normal con E.D.E.

$$\text{(5.4)} \qquad \begin{aligned} &dX = aX\,dt + \sigma X\,dW,\ t \in [0,\infty) \\ &X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

la ecuación (5.3) puede escribirse

$$\text{(5.5)} \qquad \begin{aligned} &dQ = a'Qdt + \sigma' QdW,\ t \in [0,\infty) \\ &Q(0) = Q_0 \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Q satisface la ecuación (5.4) cambiando a_0 por a' y σ por σ'. Por tanto, las potencias (exponente constante) de procesos log-normales son también log-normales.

Como la solución de (5.4) es [ver, p.e., Malliaris and Brock (1982)]

$$\text{(5.6)} \qquad X(t) = X(0)\exp[\mu t + \sigma W(t)],\ t \geqslant 0 \quad \text{con } \mu = a - \frac{1}{2}\sigma^2$$

de aquí y de (5.5), obtenemos

$$\text{(5.7)} \qquad \begin{aligned} Q(t) &= Q(0)\exp[\mu' t + \sigma' W(t)] = Q(0)\exp\left[\left(a' - \frac{1}{2}\sigma'^2\right)t + \sigma' W(t)\right] \\ &= Q(0)\exp\left[\gamma\left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \gamma\sigma W(t)\right] \end{aligned}$$

y se tiene para la esperanza del proceso [ver, p.e., Skiadas, Giovanis and Dimoticalis (1994)]

$$\text{(5.8)} \qquad E[Q(t)] = Q(0)\exp\left(a't\right) = Q(0)\exp\left[\gamma\left(a + \frac{\gamma - 1}{2}\sigma^2\right)t\right]$$

que para $A = 1$ da

$$E\left\{[X(t)]^{\gamma}\right\} = [X(0)]^{\gamma} \exp\left[\gamma\left(a + \frac{\gamma - 1}{2}\sigma^2\right)t\right] \tag{5.9}$$

y en el caso especial $\gamma = -1$ obtenemos

$$E\left[\frac{1}{X(t)}\right] = \frac{1}{X(0)} e^{\left(-a+\sigma^2\right)t} \tag{5.10}$$

OBSERVACIONES

1. Estos procesos que hemos estudiado como soluciones de ecuaciones de Itô tienen función de transición estacionaria, son homogéneos. Esto es natural porque están regidos por ecuaciones autónomas o tiempo-independientes. Entonces, la función de densidad de transición puede ponerse en la forma $p(t; x_0, x)$ [ó $p(t; y_0, y)$], pues

$$p(x,t/x_0,t_0) = p(x, t - t_0/x_0, 0) = p\left(x, t'/x_0, 0\right) = p\left(t'; x_0, x\right)$$

   y cambiando t' por t podremos escribir $p(t; x_0, x)$. Pero en ese caso, en las ecuaciones atrasadas de difusión (2.3) habrá que sustituir el término $\dfrac{\partial p'(x,t/x_0,t_0)}{\partial t_0}$ por $-\dfrac{\partial p'(t;x_0,x)}{\partial t}$ y en la (3.1) el término $\dfrac{\partial p(y,t/y_0,t_0)}{\partial t_0}$ por $-\dfrac{\partial p(t;y_0,y)}{\partial t}$.

2. Si en la E.D.E. (2.1) que rige el procesos log-normal generalizado, sustituimos σ por $-\sigma$, el proceso solución de la nueva E.D.E. resultante tiene, evidentemente, el mismo coeficiente de tendencia $A_1(t,x) = (a - b\log x)x$ y el mismo coeficiente de difusión $A_2(t,x) = \sigma^2 x^2$ que el anterior, por lo que tiene el mismo generador infinitesimal, que determina unívocamente la función de transición, y la misma función de densidad de transición que la solución de (2.1). Como son procesos Markovianos con el mismo espacio de valores y la misma distribución inicial, los dos procesos tienen *la misma ley*. Y lo mismo puede decirse de la solución de la E.D.E. (2.2) si sustituimos σ por $-\sigma$. A esta misma conclusión se llega sin más que considerar que cambiar σ por - σ en las E.D.E. (2.1) ó (2.2) equivale a cambiar $W(t)$ por - $W(t)$, que también es un movimiento browniano estándar.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a los evaluadores las precisas y minuciosas aclaraciones y sugerencias que nos han indicado, así como sus valiosos comentarios.

REFERENCIAS

Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Equations. Theory and Applications*. John Wiley.

Bartolomew, D. J. (1973). *Stochastic Model for Social Processes*. 2º edic. John Wiley.

Bharucha-Reid (1960). *Elements of the theory of Markov Processes. and their applications*. McGraw-Hill.

Bhattacharya, R. N. & Waymire, E. C. (1990). *Stochastic Processes with Applications*. John Wiley.

Bouleau, N. (1988). *Processus Stochastiques et Applications*. Hermann.

Buendía Moya, F. & Gómez García, J. (1995). «Estudio del proceso estocástico logarítmico-normal unidimensional con factores exógenos como solución de una ecuación de Itô». *IX Reunión Asepelt-España*, Santiago de Compostela.

Capocelli, R. M. & Ricciardi, L. M. (1974). «A diffusion model for population growth in random environment». *Theor. Pop. Biol.*, 5, 28-41.

Gihman and Skorohod (1972). *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag.

Gutiérrez, R. & Valderrama, M., eds. (1994). *Selected Topics on Stochastic Modelling*. World Scientific.

Gutiérrez, R.; Ricciardi, L. M.; Román, P. & Torres, F. (1997). «First-Passage-Time Densities for Time non-Homogeneous Diffusion Processes». *Journal of Applied Probability*, 34, 623-631.

Ikeda, N-Watanabe, S. (1989). *Stochastic Differential Equations and Diffussion Processes*. North-Holland.

Kijima, M. (1997). *Markov Processes for Stochasting Modelling*. Chapman & Hall.

Malliaris, A. G. & Brock, W. A. (1982). *Stochastic Methods in Economics and Finance*. North-Holland.

Moreno Bas, E. (1974). «Una aplicación de los procesos markovianos de difusión logarítmico-normales a los ingresos y gastos de las Administraciones Públicas». *Hacienda Pública Española*, 0028.

McShane, E. J. (1994). *Stochastic Calculus and Stochastic Models*. Academic Press.

Papoulis, A. (1980). *Probabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos*. Eunibar.

Ricciardi, L. M. (1976). «On the transformation of diffusion processes in the Wiener process». *J. Math. Anal. Appl.*, 54, 185-199.

Ricciardi, L. M. (1977). «Diffusion Processes and Related Topics in Biology». *Lecture Notes in Biomathematics*, 14. Springer-Verlag.

Ricciardi, L. M. (1986). «Stochastic Population Theory: Diffussion Processes». In Hallam and Levin (eds.), *Biomathematics*, 17, *Mathematical Ecology*. Springer-Verlag.

Sengupta, J. K. (1986). *Stochastic Optimization and Economic Models*. D. Reidel Publishing Company.

Skiadas, C. H.; Giovanis, A. N. & Dimoticalis, I. (1993). «A sigmoid stochastic growth model derived from the revised exponential». In J. Janssen and C. H. Skiadas (eds.), *Applied Stochastic Models and Data Analysis*. World Scientific.

Skiadas, C. H.; Giovanis, A. N. & Dimoticalis, I. (1994). «Investigation of Stochastic. Differential Models: The Gompertzian Case». In Gutiérrez-Valderrama (eds.), *Selected Topics on Stochastic Modelling.* World Scientific).

Sobczyk, K. (1991). *Stochastic Differential Equations whit Applications to Physics and Engineering*. Kluwer Academic Publishers.

Tintner, G. & Bello (1968). «Aplicación de un proceso de difusión logarítmico-normal al crecimiento ecomómico». *Trabajos de Estadística,* 19, 83-97.

Tintner, G. & Patel, R. C. (1966). «A lognormal diffusion process applied to the development of Indian agriculture with some considerations on economic policy». *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistic*, 18, 36-44.

Tintner, G. & Sengupta, J. K. (1972). *Stochastic Economics*. Academic Press.

Tintner, G. & Thomas, E. J. (1963). «Un modele stochastique de développement économique avec application a l'industrie Anglaise». *Revue d'Economie Politique*, 73, 143-47.

Todorovic, P. (1992). *An Introduction to Stochastic Processes and their Applications*. Springer-Verlag.

Wong, E. (1971). *Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems.* McGraw-Hill Book Company.

Wong, E. & Hajek, B. K. (1985). *Stochastic Processes in Engineering System*. McGraw Hill.

ENGLISH SUMMARY

A GENERALIZATION OF THE LOG-NORMAL AND GOMPERTZ STOCHASTIC PROCESSES AS ITÔ PROCESSES

JUAN GÓMEZ GARCÍA
FULGENCIO BUENDÍA MOYA*

We study a stochastic process, of which Log-normal and Gompertz processes are particular cases, as solution of a stochastic differential equation (S.D.E.). The moments of finite dimensional distributions are studied along with the transition density function, the equilibrium distribution and the stationarity conditions. We deduce the that the powers of the process, and in particular those of the Log-normal one, verify an S.D.E. of the same type.

Keywords: Stochastic differential equation, Kolmogorov equations, log-normal process, Gompertz process, Uhlenbeck-Ornstein process, Langevin equation

AMS Classification (MSC 2000): 60H10

* Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía. Facultad de Economía y Empresa. Universidad de Murcia. 30100 Murcia, Spain.

– Received March 2000.
– Accepted June 2001.

1. INTRODUCTION

The log-normal stochastic diffusion processes have been extensively applied in the analysis of various economic variables. Their study, when taking as starting point the transition density function or that of the diffusion and trend coefficients (using Kolmogorov equations in this case) poses certain difficulties as well as huge limitations. We study herein a more general type of process and we start exclusively from the analytical expression of an S.D.E. solution.

2. S.D.E. APPROACH. EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTIONS

Let the Itô S.D.E. be

$$\begin{aligned} &dX(t) = [a - b\log X(t)]\, X(t)\, dt + \sigma X(t)\, dW(t) \\ &\text{with } X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^+;\ a, b, c \text{ constant} \end{aligned} \tag{2.1}$$

where $X(t)$ is a process with values in $(0,\infty) = \mathbb{R}^+$. In this S.D.E. (2.1), for $b = 0$ the Malthusian S.D.E., which governs the logarithmico-normal process appears, and for $a = 0$ we have the Gompertz stochastic model.

The equation makes sense and since its drift coefficient $m(t,x) = (a - b\log x)\, x$ is only defined for $x > 0$, it is atypical. Thus, in order to prove the existence of a unique global solution for (2.1), we will apply a *state change transformation* to this equation [see, e.g., Bhattacharya-Waymire (1990), pg. 382]. Thus we define the $Y(t) = \log X(t)$ variable, and from the Itô lemma, together with (2.1), we obtain

$$\begin{aligned} &dY = (\mu - bY)\, dt + \sigma\, dW \text{ with } \mu = a - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ &\text{with } Y(0) = \log X(0) = Y_0 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.2}$$

which has a unique solution $\{Y(t), t \geqslant 0\}$, which is a diffussion with drift and diffusion coefficients $A_1'(t,y) = \mu - by$ and $A_2'(t,y) = \sigma^2$, respectively [see, e.g., Arnold (1974), pgs. 152-153]. As a result of the above, $\left\{X(t) = e^{Y(t)}, t \geqslant 0\right\}$ is a diffusion process, the unique solution of (2.1), and with drift and diffusion coefficients $m(t,x) = (a - b\log x)\, x$ and $\sigma^2(t,x) = \sigma^2 x$, respectively.

3. STUDY OF THE S.D.E. SOLUTION PROCESS

First we will consider an equation similar to (2.2) but with more general initial conditions and taking any $t_o \in [0,\infty)$ point:

$$
\begin{aligned}
&dY = (\mu - bY)\,dt + \sigma dW \text{ con } \mu = a - \frac{1}{2}\sigma^2 \\
&\text{con c.i. } Y(t_0) = \log X(t_0) = C
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

where $Y(t_0) = C$ is a random variable which is non degenerated and independent of $W(t) - W(t_0)$, $t \geqslant t_0$. From the solution of this equation

$$
Y(t) = \frac{\mu}{b} + e^{-b(t-t_0)}\left[Y(t_0) - \frac{\mu}{b} + \sigma\int_{t_0}^{t} e^{b(s-t_0)}\,dW(s)\right] \tag{3.2}
$$

we deduce that the transition density $p(y,t/y_0,t_0)$ of $\{Y(t), t \geqslant 0\}$, the solution of (2.2), is the density function of the general variable of the process [see, e.g. Ikeda-Watanabe (1989), pp. 214-215].

$$
Y(t,t_0,y_0) = \frac{\mu}{b} + e^{-b(t-t_0)}\left[y_0 - \frac{\mu}{b} + \sigma\int_{t_0}^{t} e^{b(s-t_0)}\,dW(s)\right] \tag{3.3}
$$

Thus, we have

(3.4)

$$
p(y,t/y_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi\sigma^2}{b}\left[1 - e^{-2b(t-t_0)}\right]}} \exp\left\{\frac{-b\left[y - \dfrac{\mu}{b} - \left(y_0 - \dfrac{\mu}{b}\right)e^{-b(t-t_0)}\right]^2}{\sigma^2\left[1 - e^{-2b(t-t_0)}\right]}\right\}
$$

Also from (3.2), if we give t_0 the value 0 and we take into account that $Y(0) = \log X(0) \in R$, we obtain that the solution $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ of the S.D.E. (2.2) is a Gaussian process with

$$
Y(t) = \frac{\mu}{b} + e^{-bt}\left[Y(0) - \frac{\mu}{b} + \sigma\int_{0}^{t} e^{bs}\,dW(s)\right] \tag{3.5}
$$

whose transition density function is given by (3.4). [For $\mu = 0$ and $b > 0$, (2.2) it is the Langevin equation and the solution process is the Uhlenbeck-Ornstein one: see, e.g., Bouleau (1988)]. From (3.5) we obtain the statistical characteristics of the process

$\{Y(t), t \geqslant 0\}$, in particular the generatrix function of moments of the finite-dimensional distributions. The $\{X(t), t \geqslant 0\}$ process, which is the solution of the S.D.E. (2.1) is, after the preceeding study, log-normally distruibuted $\left(X(t) = X(0)\, e^{Y(t)-Y(0)}, X(0) = \right.$ $\left. = e^{Y(0)} \in \mathbb{R}\right)$ and its transition density function $p'(x, t/x_0, t_0)$ is deduced immediately from (3.4). The moments of its finite-dimensional distributions are obtained from generatrix function of moments of the one-dimensional and k-dimensional distributions of the Gaussian process $\{Y(t), t \geqslant 0\}$.

4. THE EQUILIBRIUM DISTRIBUTIONS AND THE STATIONARITY

De (3.5), for $b < 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} Var[Y(t)] = \infty$ is obtained. (The same occurs for $b = 0$). For $b > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} Var[Y(t)] = \dfrac{\sigma^2}{2b}$ and $\lim\limits_{t\to\infty} E[Y(t)] = \dfrac{\mu}{b}$. It is concluded, for $b > 0$, that $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ and, therefore, $\{X(t), t \geqslant 0\}$, have non degenerated equilibrium distributions (convergence in distribution) which are independent of the initial condition. That is $Y \sim N\left(\dfrac{\mu}{b}, \dfrac{\sigma^2}{2b}\right)$ and X~Log-normal.

Now let the $Y(t)$ process, the solution of the S.D.E., be

$$\begin{aligned} &dY = (\mu - bY)\, dt + \sigma dW \text{ with } \mu = a - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ &Y(0) = C \end{aligned} \tag{4.1}$$

where C is a given non degenerated r.v. and independent of $W(t)$, $t \geqslant 0$. The solution de this S.D.E. is

$$Y(t) = \frac{\mu}{b} + e^{-bt}\left[Y(0) - \frac{\mu}{b} + \sigma\int_0^t e^{bs} dW(s)\right] \tag{4.2}$$

Then, if $Y(0)$ is Gaussian, it holds that $Y(t)$ is a Gaussian process. If, moreover, $Var[Y(0)] = \dfrac{\sigma^2}{2b}$ and $E[Y(0)] = \dfrac{\mu}{b}$, we obtain

$$Cov[Y(t), Y(s)] = \frac{\sigma^2}{2b} e^{-b|t-s|} \quad \text{and} \quad E[Y(t)] = \frac{\mu}{b} = cte \tag{4.3}$$

and the $Y(t)$ process, the solution of the S.D.E. (4.1), is *stationary* [see, e.g., Wong (1971)]. It is the only Gaussian, Markovian and stationary process which is not centred on continuous time. (For $\mu = 0$ it is centred and we have the U-O process). The same conditions with $Y(0) = \log X(0)$, also determine the stationarity of our generalised log-normal and Gompertz processes.

5. POWERS OF THE LOG-NORMAL PROCESSES

If $\{X(t), t \geqslant 0\}$ is the solution of the S.D.E. (2.1), we consider the process given by

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{cases} Q(t) = A(t)\,[X(t)]^{\gamma(t)} \\ A(t) \neq 0,\ \gamma(t) \neq 0 \end{cases}$$

with $A(t)$ and $\gamma(t)$ being real derivable functions for each $t \in [0, \infty)$. By applying the Itô lemma, of (2.1) y (5.1), we obtain the Itô differential equation for $Q(t)$, that for constant A and γ is

$$\text{(5.2)} \qquad dQ = \left(a' - b\log Q\right) Qdt + \sigma' QdW$$

where $a' = \gamma\left[a + \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma^2\right] + b\log A$ and $\sigma' = \sigma\gamma$ are constant.

Thus we have that the powers of log-normal, generalised or strict (case b=0) processes, are of the same type.