

УДК 550.343.09

DOI: <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v42i3.2020.204700>

Моделювання сейсмічної реакції прошарку ґрунту в рамках нелокальної моделі суцільного середовища

О. В. Кендзера, С. В. Микуляк, Ю. В. Семенова, С. І. Скуратівський, 2020

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, Київ, Україна

Надійшла 17 березня 2020 р.

Згідно із сучасними дослідженнями, сейсмічні ризики руйнування будівель і споруд залежать не тільки від близькості їх розташування до епіцентрів землетрусів, а також від реакції ґрунтових масивів, які під ними залягають. Особливо важливим є співмірність набору резонансних частот ґрунтового масиву та власних частот розташованих на ньому об'єктів. Відомо, що ґрунти є реологічно складними середовищами, які неможливо описати в рамках простих математичних моделей, тому виникає необхідність розробки нових чи модифікації вже відомих моделей. Для опису динаміки неоднорідного ґрунтового масиву застосовано модель, яка є просторово нелокальним загальненням лінійної математичної моделі Кельвіна-Фойгта. Метою роботи є оцінювання реакції прошарку ґрунту на зсувне деформування, коли ґрунтовий масив суттєво неоднорідний. На основі розв'язку крайової задачі для ґрунтового прошарку у формі стоячих хвиль побудовано залежність коефіцієнта підсилення амплітуди хвилі на поверхні прошарку від частоти гармонічного збурення, прикладеного до підшви масиву. Показано, що модель описує затухання коливань на високих частотах та зсув резонансних частот у низькочастотну область. Для оцінювання цих ефектів на основі методів асимптотичного аналізу досліджено довжину частотного інтервалу, який містить основну частину спектра. Висновки щодо впливу неоднорідності ґрунту на його резонансні властивості сформульовано шляхом аналізу результатів, отриманих у рамках класичної моделі Кельвіна-Фойгта та її нелокального узагальнення. Запропонований підхід аналізу відгуку прошарку ґрунту є перспективним для практичного використання в інженерній справі, при проведенні робіт із сейсмічного мікрорайонування.

Ключові слова: амплітудно-частотна характеристика ґрунтів, резонансні властивості ґрунтів, нелокальні моделі, методи моделювання реакції середовища на сейсмічні впливи.

Вступ. Сейсмічний ризик руйнування будь-якого об'єкта при землетрусі залежить від сейсмічної небезпеки на території його розташування та сейсмічної вразливості. Сейсмічну вразливість можна суттєво зменшити, якщо є надійні дані щодо сейсмічної небезпеки території [Семенова, 2015; Кендзера, Семенова, 2018]. Сейсмічна небезпека, визначена за картами загального сейсмічного районування з додатку Б ДБН В.1.1-12:2014 [ДБН В.1.1-12:2014], стосується лише ґрунтів II категорії за сейсмічними властивостями згідно

з ДБН В.1.1-12:2014 та не враховує реакції місцевих ґрунтових умов на сейсмічний вплив. Відомо, що під час землетрусу поведінка будівлі залежатиме і від того, на яких ґрунтах вона зведена. Для врахування впливу місцевих ґрунтів на інтенсивність, форму запису і спектр коливань на вільній поверхні проводяться роботи з сейсмічного мікрорайонування.

Для сейсмостійкого проектування необхідно знати не лише величину інтенсивності коливань і значення максимальних пікових прискорень, а й інформацію про

розподіл сейсмічних впливів за частотою. Відомо, що ґрунтова товща веде себе як амплітудно-частотний фільтр: на деяких частотах коливання майже не змінюються, а на інших або підсилюються, або поглинаються. При проектуванні сейсмостійких будівель і споруд важливо не допускати, щоб максимумами частотної характеристики ґрунтової товщі збігалися із власними частотами будівель і споруд.

В основному розглянуто діапазон частот від 0,05 до 20 Гц. Цей діапазон становить найбільший інтерес при сейсмічному мікрорайонуванні, оскільки в цьому діапазоні знаходяться частоти коливань основних типів будівель, споруд та їх несучих конструкцій, а також максимумами спектрів коливань при сильних землетрусах.

Аналіз наслідків землетрусів останніх десятиліть [Спітак, 1988; Лома Пріета, 1989; Нортридж, 1994; Кобе, 1995; Нефтегорськ, 1995; Тайвань, 1999; Гуджарат, 2001] підтвердив, що на ступінь пошкоджень більшою мірою впливають ґрунтові умови, ніж магнітуда або енергія землетрусу. Наприклад, при землетрусі Лома Пріета в Каліфорнії (1989 р.) з магнітудою 7,1 найбільших пошкоджень зазнала частина Сан-Франциско, яка розташована на молодих морських глинистих відкладах. Аналіз сейсмограм показав, що порівняно з іншими ділянками амплітуди коливань на цих ґрунтах були посилені в 6—10 разів на частотах близько 1 Гц та в 2—3 рази на частотах 3—5 Гц. Власні частоти більшості зруйнованих 3—4-поверхових будинків становили близько 3 Гц [Boatwright et al., 1992]. Тому детальні сейсмологічні дослідження та математичне моделювання відгуку суттєво неоднорідних масивів на сейсмічний вплив набувають особливої актуальності щодо оцінювання сейсмічної безпеки та проектування сейсмостійких будівель і споруд [Семенова, 2015; Кендзера, Семенова, 2018], зокрема атомних станцій.

Методи моделювання сейсмічної реакції ґрунтів забезпечують достатньо точні результати лише за наявності надійних сейсмогеологічних моделей ґрунтового середовища під досліджуваним майданчиком.

Сейсмогеологічна модель є зображенням геологічного середовища у вигляді просторового розподілу фізичних властивостей, які визначають поширення пружних коливань. Складовими частинами сейсмогеологічної моделі є шари (пласти) з різними фізичними властивостями і обмежені в просторі доволі простими за формою межами (підшовою та покрівлею шару). В межах шару фізичні властивості вважаються сталими (однорідні шари) або змінюються монотонно (градієнтні шари).

На практиці зазвичай використовують шарувато-однорідні моделі, серед яких частіше всього розглядають прості моделі горизонтально-шаруватих середовищ. Сейсмогеологічні моделі горизонтально-шаруватих середовищ достатньо добре апроксимують розрізи осадового шару в більшості районів будівництва. Відносно шарувато-градієнтних середовищ практичне використання знаходять моделі з вертикальними градієнтами швидкостей, що відображають переважно загальну закономірність зміни з глибиною пружних властивостей в товщах осадових відкладів.

Однак ґрунт як багатокомпонентна система [Ґрунтоведение, 2005] не є однорідним та пружним, а являє собою гетерогенне структуроване середовище. Шар ґрунтової товщі містить включення, порожнини та інші неоднорідності. Тому для опису динамічної поведінки такого середовища необхідно застосовувати складніші моделі, в яких враховано їх структурну неоднорідність.

У цій статті розглянуто задачу оцінювання амплітудно-частотних характеристик суттєво неоднорідної ґрунтової товщі в умовах сейсмічного навантаження на її підшову. Новизна цієї задачі полягає в урахуванні негуківської поведінки матеріалу, моделювання якої здійснено в рамках теорії узагальнених середовищ.

Просторово-часова нелокальна модель ґрунту. Для структурованих середовищ характерні такі властивості, як неоднорідність полів напружень та деформацій, нелінійність, залежність від швидкості деформування, дисипативність, дилатансія тощо

[Ляхов, 1982; Ishihara, 1996; Kramer, 1996; Ostrovsky, Johnson, 2001; Guyer, Johnson, 2000; Кендзера, Рушицький, 2017].

Моделювання таких середовищ здійснюється в рамках дискретного або континуального підходу. Перший дає змогу будувати моделі, досить близькі до реальних середовищ, з детальним урахуванням будови та взаємодії структурних елементів. Однак він потребує значних обсягів обчислювальних ресурсів, початкових даних, інформації про мікроставистовість матеріалу. Інтерпретація результатів обчислень у цьому класі, як правило, є складною. Другий підхід — континуальний, який спирається на розвинений математичний апарат.

Всі континуальні моделі можна поділити на два класи. До першого належать моделі, в яких мікроструктура представлена сукупністю зон, таких, що кожен зону розглядають як однорідний класичний континуум, а їх об'єднання є неоднорідним континуумом.

У другому класі використовують однорідні континууми, де вплив мікроструктури враховують через осереднення властивостей структурованих середовищ [Eringen, 1976, 2002; Kunin, 1982, 1983; Aifantis, 1987, 1999; Fleck, Hutchinson, 1993; Metrikine, Askes, 2002]. У моделях цього класу визначальні рівняння є нелокальними у просторі. Це означає, що напруження в довільній точці пов'язане не тільки з деформацією в цій точці, а й з напруженнями в сусідніх точках. Релаксацийні та в'язкі ефекти у структурованих середовищах описують нелокальними часовими моделями, у яких напруження в певний момент часу залежать від деформацій у попередні моменти часу. Проте таке розділення ефектів нелокальності у просторі та часі, як показано у публікаціях [Zubarev, Tishchenko, 1974; Филиппов, Хантулева, 1984; Rudyak, Yanenko, 1985; Даниленко та ін., 2008], можливо тільки за умови, що відхилення від локальності є незначним, тобто коли виконуються умови $l/L \ll 1$ та $\tau/T \ll 1$, де l — характерний мікромасштаб, наприклад, розмір неоднорідності чи радіуса кореляцій, L — характерний макромасштаб, τ та T — відповідно характерні часові мікро- та макромасшта-

би. Часовим мікромасштабом може бути, наприклад, час релаксації.

Концепцію часово та просторово нелокальних середовищ також розвинуто у працях В. А. Даниленка та співавторів [Danulyenko et al., 1993, 2011; Даневич, Даниленко, 1995, 2004, 2005; Даниленко, Даневич, 2008; Vladimirov et al., 2012]: обґрунтовано нелокальні рівняння стану з позицій нерівноважної термодинаміки та отримано вагомні результати щодо нелінійних хвиль, їх структури та біфуркацій у нелокальних нерівноважних середовищах.

Континуальні нелокальні моделі використовують для опису таких характерних явищ, як дисперсія хвиль, що поширюються у гранульованих матеріалах [Mühlhaus, Oka, 1996; Metrikine, Askes, 2002], концентрація напружень в околі неоднорідностей (вершин тріщин, порових пустот, вкраплень неоднорідностей з іншими властивостями тощо) [Eringen, 1992], локальна втрата міцності у твердих тілах, пов'язана з дислокаціями [Mühlhaus, Aifantis, 1991; Peerlings et al., 1996], локалізація напружень у процесі деформування структурованих середовищ [Bazant, Pijaudier-Cabot, 1998] та інші.

Однією із найпростіших моделей з часовою нелокальністю є модель Кельвіна — Фойгта:

$$\sigma_{ij} = G\varepsilon_{ij} + \eta \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}, \quad (1)$$

де σ_{ij} та ε_{ij} — відповідно тензори локальних напружень і деформацій. Цю модель широко застосовують для опису динаміки в'язких осадових порід, зокрема ґрунтів [Kramer, 1996], проте модель може бути узагальнена для врахування також просторової нелокальності.

У інтегральному формулюванні [Eringen, 1983] напруження в точці \mathbf{x} залежить від напружень у прилеглих точках, обмежених деякою областю V , згідно з рівнянням

$$\bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}, l) \sigma_{ij}(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}), \quad (2)$$

де $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ — локальні напруження; ядро α —

функція, яка також залежить від розміру неоднорідностей чи радіуса кореляції, причому граничний перехід $l \rightarrow 0$ дає локальну модель середовища $\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y}, l) \rightarrow \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. У статті [Eringen, 1983] показано, що ядро α є функцією Гріна для оператора $1 - \varepsilon^2 \nabla^2$ (ε — формальний параметр, пропорційний l), тобто

$$(1 - \varepsilon^2 \nabla^2) \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}, l) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Застосувавши оператор $1 - \varepsilon^2 \nabla^2$ до лівої і правої частин рівняння (2), отримаємо зв'язок локального та нелокального напружень

$$(1 - \varepsilon^2 \nabla^2) \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}.$$

Підставивши σ_{ij} в рівняння Кельвіна—Фойгта (1), отримаємо узагальнення цього рівняння, в якому також ураховується просторова нелокальність поля напружень:

$$(1 - \varepsilon^2 \nabla^2) \bar{\sigma}_{ij} = G \varepsilon_{ij} + \eta \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}. \quad (3)$$

Зважаючи на те, що найнебезпечнішими для споруд є поперечні хвилі, розглядаємо найпростішу одновимірну задачу про хвильове зсувне деформування. У цьому випадку узагальнене рівняння Кельвіна—Фойгта (3) матиме вигляд

$$\tau - \beta \tau_{zz} = G \gamma + \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t},$$

де $\tau = \bar{\sigma}_{12}$, $\gamma = \varepsilon_{12}$, $\beta = \varepsilon^2$. Тут коефіцієнт β має розмірність квадрата характерного розміру неоднорідностей.

Постановка крайової задачі для пласта та аналіз її розв'язку. Розглянемо шар ґрунту з густиною ρ , товщиною H , що лежить на жорсткій основі та має вільну поверхню. Введемо систему координат (u, z) з початком координат на вільній поверхні (рис. 1).

Вважаємо, що матеріал ґрунту містить розподілені включення, на контактах яких напруження суттєво відрізняється від напруження сусідніх зон. Тоді стан середовища опишемо просторово нелокальним рівнянням стану Кельвіна—Фойгта, яке разом з рівнянням руху становить замкнуту систему:

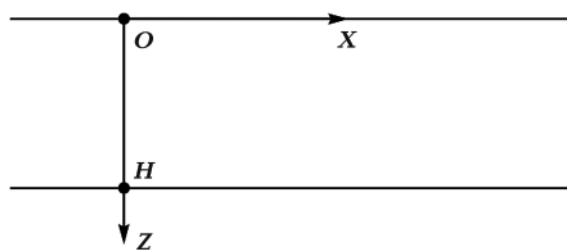


Рис. 1. Схематичне зображення прошарку ґрунту товщиною H .

Fig. 1. The schematic representation of the soil layer of thickness H .

$$\begin{aligned} \tau - \beta \tau_{zz} &= G \gamma + \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \\ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Крайові умови задачі визначаються на вільній поверхні, що передбачає відсутність напружень:

$$\tau - \beta \tau_{zz} \Big|_{z=0} = 0. \quad (5)$$

Таким чином, задачею досліджень є встановлення властивостей розв'язків системи (4) з крайовими умовами (5).

Дослідимо гармонічні розв'язки системи у вигляді стоячих хвиль:

$$u = U(z) e^{i\omega t}, \quad \tau = W(z) e^{i\omega t}. \quad (6)$$

Підстановка співвідношень (6) в систему (4) дає змогу звести систему (4) до двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} W - \beta W'' &= GU + \eta i \omega U', \\ \rho (i \omega)^2 U &= W', \end{aligned}$$

які, у свою чергу, зводяться до рівняння другого порядку:

$$U'' + \Omega^2 U = 0, \quad (7)$$

$$\text{де } \Omega^2 = \frac{\rho \omega^2}{G + \eta i \omega - \beta \rho \omega^2}.$$

Розв'язок рівняння (7) добре відомий:

$$U = A \cos \Omega z + B \sin \Omega z.$$

Сталі визначимо із крайових умов (5):

$$\tau - \beta \tau_{zz} \Big|_{z=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

Тоді $B=0$.

Отже, остаточно $u(z, t) = A \cos \Omega z e^{i\omega t}$. Для характеристики проходження хвилі через прошарок використовуємо таку величину, як передавальна функція:

$$F = \frac{u(z=0; t)}{u(z=H; t)},$$

де $u(z=H; t)$ — зміщення на глибині H . Як відомо [Kramer, 1996], модуль цієї функції $|F|$ є коефіцієнтом підсилення. Якщо зміщення на поверхні прошарку визначається стоячими хвилями, то функція F є незалежною від часу.

Зокрема, у нашому випадку

$$F = \frac{1}{\cos \Omega H},$$

що формально збігається з випадком [Kramer, 1996].

Доцільно ввести такі позначення: хвильове число — $k = \frac{\omega}{v_s}$, швидкість поширення поперечної хвилі — $v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, коефіцієнт затухання [Kramer, 1996] — $2\xi = \frac{\omega \eta}{G}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \Omega H &= H \omega \sqrt{\frac{\rho}{G + \eta i \omega - \beta \rho \omega^2}} = \\ &= \frac{Hk}{\sqrt{1 + 2\xi i - \beta k^2}}. \end{aligned}$$

Для порівняння результатів досліджень з результатами, описаними у публікації [Kramer, 1996], вважатимемо, що

$$\beta = \alpha H^2.$$

Таке припущення цілком природне, оскільки новий безрозмірний параметр α характеризує відношення розміру неоднорідності до товщини прошарку, визначаючи тим самим просторовий масштаб, за якого нелокальність можна вважати слабкою, а модель застосовною.

Отже, коефіцієнт підсилення

$$|F| = \frac{1}{\left| \cos \frac{Hk}{\sqrt{1 + 2\xi i - \alpha (Hk)^2}} \right|}. \quad (8)$$

На рис. 2 зображено графіки коефіцієнта $|F|$ як функції від Hk при $\alpha=0$ та $\alpha=0,004$, коефіцієнт $\xi=0,05$ вибрано так, як у публікації [Kramer, 1996].

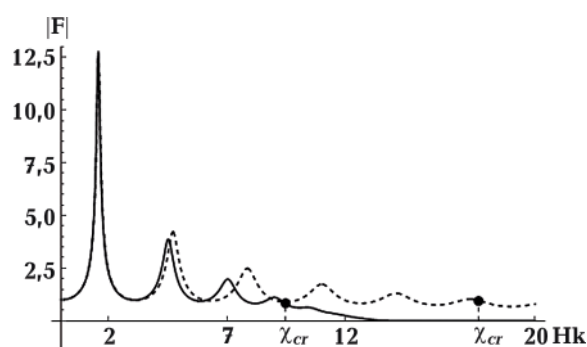


Рис. 2. Графіки залежності коефіцієнта підсилення $|F|$ від Hk при $\alpha=0$ та $\alpha=0,004$. Коефіцієнт $\xi=0,05$ [Kramer, 1996].

Fig. 2. The dependences of the amplification factor $|F|$ on Hk at $\alpha=0$ and $\alpha=0,004$. The damping ratio $\xi=0,05$ [Kramer, 1996].

Проаналізуємо детальніше функцію (8). Для цього перейдемо від комплекснозначної до функції дійсного аргументу. Нехай

$$x = Hk, \quad a = 1 - \alpha x^2, \quad b = 2\xi.$$

Тоді, використавши формулу

$$\begin{aligned} \sqrt{a + bi} &= \pm \left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{|z| - a}{2}} \right), \\ |z| &= \sqrt{a^2 + b^2}, \end{aligned}$$

перетворимо знаменник виразу (8):

$$\cos \frac{x}{\sqrt{1 - \alpha x^2 + 2\xi i}} = \cos \left(\frac{xa_1}{a_1^2 + b_1^2} - i \frac{xb_1}{a_1^2 + b_1^2} \right), \quad (9)$$

$$\text{де } a_1 = \sqrt{\frac{|z| + a}{2}}, \quad b_1 = \sqrt{\frac{|z| - a}{2}}.$$

Врахувавши, що $a_1^2 + b_1^2 = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ та $|\cos(x - iy)| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$, вираз (4) запишемо у вигляді

$$|F| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{xa_1}{|z|}\right) + \sinh^2\left(\frac{xb_1}{|z|}\right)}}.$$

Як бачимо на рис. 2, основна частина спектра розташовується на скінченному інтервалі частот. Оцінимо його довжину. Для цього зазначимо, що $\cos^2\left(\frac{xa_1}{|z|}\right) \leq 1$, тоді як $\sinh^2\left(\frac{xb_1}{|z|}\right) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$. Тому за суттєвих значень аргументу коливання тригонометричної функції зменшуються. Як граничне значення частоти x_{cr} , за якої величина гіперболічної функції не є переважною, виберемо так, щоб $\sinh\left(\frac{x_{cr}b_1}{|z|}\right) = 1$. Тоді

$$\frac{x_{cr}b_1}{|z|} = \operatorname{arcsinh}(1) \equiv A. \quad (10)$$

Проаналізуємо детальніше отримане співвідношення. Перетворивши вираз (10), можна отримати

$$x_{cr} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2(a^2 + b^2)}} = A.$$

Окремо розглянемо випадок моделі без урахування просторової нелокальності, коли $\alpha=0$. Тоді $a=1$, $b=2\xi \ll 1$,

$$\begin{aligned} x_{cr} \sqrt{\frac{\sqrt{1+4\xi^2}-1}{2(1+4\xi^2)}} &= \\ = A \Rightarrow x_{cr} \sqrt{\frac{1+2\xi^2+O(\xi^3)-1}{2(1+O(\xi))}} &= \\ = A \Rightarrow x_{cr} = \frac{A}{\xi}. \end{aligned} \quad (11)$$

Якщо $\alpha > 0$, то виконаємо перетворення виразу (10) за умови, що $b = 2\xi \ll 1$, тоді як $a = 1 - \alpha x^2 > 0$ та немале. Отже,

$$\begin{aligned} x_{cr} \sqrt{\frac{a\sqrt{1+(b/a)^2} - a}{2(a^2 + b^2)}} = A &\Rightarrow x_{cr} \sqrt{\frac{b^2}{4a^3}} = \\ = A \Rightarrow x_{cr} \frac{\xi}{a\sqrt{a}} = A. \end{aligned} \quad (12)$$

Інакше кажучи, для оцінювання межі частотного спектра потрібно знайти розв'язок рівняння (12):

$$x_{cr} \frac{\xi}{(1 - \alpha x_{cr}^2)\sqrt{1 - \alpha x_{cr}^2}} = A.$$

Нехай $x_{cr}^2 = w$, тоді

$$w\xi^2 = A^2(1 - \alpha w)^3. \quad (13)$$

Слід наголосити, що рівняння (13) містить два малі параметри — ξ та α . Тому виконаємо масштабне перетворення $\alpha w = y$ та отримаємо

$$y\varepsilon = A^2(1 - y)^3, \quad (14)$$

де $\varepsilon = \xi^2/\alpha$.

Очевидно, що оскільки при $y=0$ функція $f(y) = y\varepsilon - A^2(1-y)^3$ набуває від'ємного значення $f(0) = -A^2 < 0$, а при $y=1$ додатного значення $f(1) = \varepsilon > 0$, то на інтервалі $(0; 1)$ існує принаймні один дійсний корінь. Очевидно, що такий корінь єдиний, оскільки ліва та права частини рівняння (14) — монотонно зростаюча та спадна функції відповідно.

У загальному вигляді розв'язок кубічного рівняння мало інформативний, тому розглянемо випадок, коли ε є малою величиною.

Побудуємо асимптотичний розв'язок рівняння (14) на основі методу малого параметра:

$$y = 1 + \varepsilon^{1/3} y_1 + \varepsilon^{2/3} y_2,$$

де

$$y_1 = -\frac{1}{A^{2/3}}, \quad y_2 = \frac{1}{3A^{4/3}}.$$

Отже, маємо оцінку довжини частотного інтервалу

$$x_{cr} = \sqrt{\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{A^{2/3}} \left(\frac{\xi^2}{\alpha} \right)^{1/3} + \frac{1}{3A^{4/3}} \left(\frac{\xi^2}{\alpha} \right)^{2/3} \right)}. \quad (15)$$

Якщо зафіксувати значення параметрів $\alpha=0,004$, $\xi=0,05$, то $\varepsilon=0,625$ — мала величина. Тоді $x_{cr} = 9,46$. Якщо $\alpha=0$, то $x_{cr} = A/\xi=17,63$. На рис. 2 знайдені межові точки зображено позначками «•», що досить добре означають інтервал $(0; x_{cr})$, на якому розміщуються основні резонанси.

На основі величини x_{cr} також корисним є оцінювання кількості резонансів. Дійсно, резонанси визначаються мінімумами знаменника функції $|F|$. У свою чергу, ці мінімуми визначаються точками, коли $\cos^2\left(\frac{xa_1}{|z|}\right) = 0$, тобто $\frac{xa_1}{|z|} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, \dots$

З отриманого співвідношення оцінимо ціле число n при $x=x_{cr}$, тобто

$$n = \left[\frac{xa_1}{\pi|z|} - \frac{1}{2} \right]_{x=x_{cr}},$$

де функція $[\bullet]$ — ціла частина числа. Тоді кількість резонансів — $(n+1)$.

Наприклад, при $\alpha=0$, $n = \left[\frac{xa_1}{\pi|z|} - \frac{1}{2} \right]_{x=x_{cr}} = 5$,

отже, кількість резонансів — 6 при $\alpha=0,004$,

$n = \left[\frac{xa_1}{\pi|z|} - \frac{1}{2} \right]_{x=x_{cr}} = 3$ і кількість резонансів

Список літератури

Вознесенский Е. А., Кушнарева Е. С., Фуникова В. В. Природа и закономерности затухания волн напряжений в грунтах. Москва: Флинта, 2014. 104 с.

Грунтоведение. Под ред. В. Т. Трофимова. Москва: Наука, 2005. 1023 с.

Даневич Т. Б., Даниленко В. А. Нелінійні нелокальні моделі багатокомпонентних релаксуючих середовищ з внутрішніми осциляторами. *Доп. НАН України*. 2005. № 1. С. 106—110.

Даневич Т. Б., Даниленко В. А. Рівняння стану нелінійного середовища з внутрішніми змінними із урахуванням часової та просторової нелокальності. *Доп. НАН України*. 1995. № 10. С. 133—136.

Даневич Т. Б., Даниленко В. А. Точні аналітичні розв'язки нелінійних рівнянь динаміки

— 4, що збігається з кількістю максимумів на рис. 2.

Висновки. Для оцінювання реакції неоднорідного ґрунту на зсувне навантаження запропоновано використовувати просторово нелокальні математичні моделі. На основі розв'язку крайової задачі встановлено спектр резонансних частот, на яких спостерігається значне підсилення амплітуди коливань ґрунту на вільній поверхні прошарку. Показано, що врахування нелокальних ефектів спричинює зсув резонансних піків у бік низькочастотного діапазону та їх суттєве затухання у височастотному діапазоні. Запропоновано оцінювання довжини частотного інтервалу, на якому розташовується основна кількість збуджених (резонансних) частот. Розроблений підхід дає змогу уніфікувати порівняння результатів, отриманих за допомогою різних моделей, швидко оцінити кількість та положення основних резонансних частот. З огляду на це описані дослідження є перспективними для використання в інженерній сейсмології та для подальшого розвитку числових методів аналізу реакції ґрунтів на сейсмічні впливи.

Робота частково фінансується за НДР 0118U000044.

релаксуючих середовищ з просторовою та часовою нелокальністю. *Доп. НАН України*. 2004. № 3. С. 110—114.

Даниленко В. А., Даневич Т. Б., Скуратівський С. І. Нелінійні математичні моделі середовищ з часовою та просторовою нелокальністю. Київ: Вид. Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, 2008. 86 с.

ДБН В.1.1-12:2014. Будівництво в сейсмічних районах України. Київ: Вид. Мінрегіобуд України, Укрархбудінформ, 2014. 110 с.

Кендзера О. В., Руцицький Я. Я. Про нелінійні моделі деформування ґрунтової товщі і поширення сейсмічних коливань. *Доп. НАН України*. 2017. № 11. С. 44—51. <https://doi.org/10.15407/dopovid2017.11.044>.

- Кендзера О., Семенова Ю. Влияние осадочной толщи на сейсмичные колебания на территории Ташлицкой гидроаккумулирующей электростанции. *Геодинамика*. 2018. № 1(24). С. 91—99. <https://doi.org/10.23939/jgd2018.01.091>.
- Ляхов Г. М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. Москва: Наука, 1982. 288 с.
- Семенова Ю. В. Моделирование реакции грунта при сейсмическом микрорайонировании строительных участков. *Геофиз. журн.* 2015. Т. 37. № 6. С. 137—153. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v37i6.2015.111181>.
- Филиппов Б. В., Хантулева Т. А. Граничные задачи нелокальной гидродинамики. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1984. 86 с.
- Aifantis, E. C. (1999). Gradient deformation models at nano, micro, and macro scales. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 121, 189—202. <https://doi.org/10.1115/1.2812366>.
- Aifantis, E. C. (1987). The physics of plastic deformation. *International Journal of Plasticity*, 3(3), 211—247. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(87\)90021-0](https://doi.org/10.1016/0749-6419(87)90021-0).
- Bazant, Z. P., & Pijaudier-Cabot, G. (1988). Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics*, 55(2), 287—293. <https://doi.org/10.1115/1.3173674>.
- Boatwright, J., Seekins, L. C., Fumal, Th. E., Lui, H. P., & Mueller, C. S. (1992). Loma Prieta, California earthquake of October 17, 1989, strong ground motion and ground failure, Marina District: ground-motion amplification. In *Loma Prieta, California earthquake of October 17, 1989: Marina District* (pp. F35—F49). US Government Printing Office. Washington, D.C.
- Danylenko, V. A., Sorokina, V. V., & Vladimirov, V. A. (1993). On the governing equations in relaxing media models and self-similar quasiperiodic solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26(23), 7125.
- Danylenko, V. A., Danevych, T. B., Makarenko, O. S., Skurativskiy, S. I., & Vladimirov, V. A. Self-organization in nonlocal non-equilibrium media. Киев: Изд. Ин-та геофизики НАН Украины, 2011.
- Eringen, A. C. (1976). *Continuum Physics. 4. Polar Nonlocal Field Theories*. New York: Academic Press, 288 p.
- Eringen, A. C. (2002). *Nonlocal Continuum Field Theories*. New York: Springer, 376 p.
- Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54, 4703. <https://doi.org/10.1063/1.332803>.
- Eringen, A. C. (1992). Vistas of nonlocal continuum physics. *International Journal of Engineering Science*, 30(10), 1551. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(92\)90165-D](https://doi.org/10.1016/0020-7225(92)90165-D).
- Fleck, N. A., & Hutchinson, J. W. (1993). A phenomenological theory for gradient effects in plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41, 1825—1857.
- Guyer, R. A., & Johnson, P. A. (2009). *Nonlinear Mesoscopic Elasticity: The Complex Behavior of Granular Media including Rocks, Soil, Concrete*. Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim, 391 p.
- Ishihara, K. (1996). *Soil Behavior in Earthquake Geotechnics*. Oxford: University Press, 360 p.
- Kramer, S. L. (1996). *Geotechnical Earthquake Engineering*. N. J., Prentice Hall, Upper Saddle River, 672 p.
- Kunin, I. A. (1982). *Elastic Media with Microstructure* (Vol. 1. One-dimensional Models). Berlin: Springer-Verlag, 296 p.
- Kunin, I. A. (1983). *Elastic Media with Microstructure* (Vol. 2. Three-dimensional Models). Berlin: Springer-Verlag, 272 p.
- Metrikine, A. V., & Askes, H. (2002). One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure Part 1: Generic formulation. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21(4), 555—572. [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(02\)01218-4](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(02)01218-4).
- Mühlhaus, H. B., & Oka, F. (1996). Dispersion and wave propagation in discrete and continuous models for granular materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33(19), 2841—2858. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00178-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00178-6).

- Mühlhaus, H.-B., & Aifantis, E. C. (1991). A variational principle for gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28, 845—857. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90004-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90004-Y).
- Ostrovsky, L. A., & Johnson, P. A. (2001). Dynamic nonlinear elasticity in geomaterials. *Rivista del Nuovo Cimento della Societa Italiana di Fisica*, 24(7), 1—46.
- Peerlings, R.H.J., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M., & de Vree, J.H.P. (1996). Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(19), 3391—3403. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19961015\)39:19<3391::AID-NME7>3.0.CO;2-D](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19961015)39:19<3391::AID-NME7>3.0.CO;2-D).
- Rudyak, V. Ya., & Yanenko, N. N. (1985). Some nonlocal models of fluid mechanics. *Mathematical Modelling*, 6(5), 401—412. [https://doi.org/10.1016/0270-0255\(85\)90061-2](https://doi.org/10.1016/0270-0255(85)90061-2).
- Vladimirov, V. A., Kutafina, E. V., & Zorychta, B. (2012). On the non-local hydrodynamic type system and its solitons-like solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(8), 085210.
- Zubarev, D. N., & Tishchenko, S. V. (1974). Nonlocal hydrodynamics with memory. *Physica*, 59(2), 285—304. [https://doi.org/10.1016/0031-8914\(72\)90084-5](https://doi.org/10.1016/0031-8914(72)90084-5).

Modeling of seismic response of soil layer within the framework of nonlocal model of continuous medium

O. V. Kendzera, S. V. Mykulyak, Yu. V. Semenova, S. I. Skurativskiy, 2020

Institute of Geophysics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine

According to modern research, the seismic risks of the destruction of buildings and constructions depend not only on the proximity of their location to the earthquake epicenters, but also on the reaction of soil massifs lying beneath them. Particularly important is the proportionality of the set of resonant frequencies of the soil massif and the natural frequencies of the objects located on it. It is well known that soils are rheologically complex media that cannot be described in terms of simple mathematical models. This stimulates to develop new or to modify already known models. To describe the dynamics of a heterogeneous soil massif, the model, which is a spatially nonlocal generalization of the linear Kelvin-Voigt model, is used. The purpose of the work is to estimate the response of the soil layer to shear strain when the soil massif is characterized by significant heterogeneity. Based on the boundary value problem solution describing standing waves in a soil layer, the dependence of the amplification of wave amplitude at the layer surface on the harmonic disturbance frequency applied to the underlying bedrock is derived. It is shown that the model describes the damping of oscillations at high frequencies and the shift of resonant frequencies towards lower frequencies. To evaluate these effects, the length of the frequency interval containing the main of the spectrum is investigated on the basis of asymptotic analysis methods. Conclusions about the influence of soil heterogeneity on its resonance properties are formulated by means of comparative analysis of the results obtained in the framework of the classical Kelvin-Voigt model and its nonlocal generalization. The proposed approach of soil layer response analysis is promising for practical use in seismic microzoning.

Key words: amplitude-frequency characteristics, resonant phenomena, nonlocal models, methods of modeling of medium response to seismic effects.

References

- Voznesenskiy, E. A., Kushnareva, E. S., & Funikova, V. V. (2014). *The nature and patterns of attenuation of stress waves in soils*. Moscow: Flinta, 104 p. (in Russian).
- Trofimov, V. T. (Ed.). (2005). *Soil science*. Moscow: Nauka, 1023 p. (in Russian).
- Danevych, T. B., & Danylenko, V. A. (2005). Nonlinear nonlocal models of multicomponent relaxing media with internal oscillators. *Dopovidi NAN Ukrainy*, (1), 106—110 (in Ukrainian).
- Danevych, T. B., & Danylenko, V. A. (1995). Equations of state of a nonlinear medium with internal variables taking into account temporal and spatial nonlocality. *Dopovidi NAN Ukrainy*, (10), 133—136 (in Ukrainian).
- Danevych, T. B., & Danylenko, V. A. (2004). Exact analytical solutions of nonlinear equations of dynamics of relaxing media with spatial and temporal nonlocality. *Dopovidi NAN Ukrainy*, (3), 110—114 (in Ukrainian).
- Danevych, T. B., Danylenko, V. A. & Skurativskiy, S. I. (2008). Nonlinear mathematical models of media with temporal and spatial non-locality. Kiev: Edition of the Institute of Geophysics. S. I. Subbotin NAS of Ukraine, 86 p. (in Ukrainian).
- DBN V.1.1-12:2014. Construction in seismic regions of Ukraine. (2014). Kiev: Edition of the Ministry of Regional Development of Ukraine, Ukrarkhtroyinform, 110 p. (in Ukrainian).
- Kenzera, A. V., & Rushchyskiy, Y. Ya. (2017). On nonlinear models of deformation of the soil stratum and the propagation of seismic vibrations. *Dopovidi NAN Ukrainy*, (11), 44—51 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.11.044> (in Ukrainian).
- Kenzera, A., & Semenova, Yu. (2018). Influence of sedimentary stratum on seismic fluctuations in the territory of the Tashlyksky pumped storage power plant. *Geodynamika*, (1), 91—99. <https://doi.org/10.23939/jgd2018.01.091> (in Ukrainian).
- Lyakhov, G. M. (1982). *Waves in soils and porous multicomponent media*. Moscow: Nauka, 288 p. (in Russian).
- Semenova, Yu. V. (2015). Modeling of soil reaction for seismic microzoning of building sites. *Geofizicheskiy zhurnal*, 37(6), 137—153. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v37i6.2015.111181> (in Russian).
- Filippov, B. V., & Khantuleva, T. A. (1984). *Boundary problems of nonlocal hydrodynamics*. Leningrad: Publishing House of Leningrad State University, 86 p. (in Russian).
- Aifantis, E. C. (1999). Gradient deformation models at nano, micro, and macro scales. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 121, 189—202. <https://doi.org/10.1115/1.2812366>.
- Aifantis, E. C. (1987). The physics of plastic deformation. *International Journal of Plasticity*, 3(3), 211—247. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(87\)90021-0](https://doi.org/10.1016/0749-6419(87)90021-0).
- Bazant, Z. P., & Pijaudier-Cabot, G. (1988). Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics*, 55(2), 287—293. <https://doi.org/10.1115/1.3173674>.
- Boatwright, J., Seekins, L. C., Fumal, Th. E., Lui, H. P., & Mueller, C. S. (1992). Loma Prieta, California earthquake of October 17, 1989, strong ground motion and ground failure, Marina District: ground-motion amplification. In *Loma Prieta, California earthquake of October 17, 1989: Marina District* (pp. F35—F49). US Government Printing Office, Washington, D.C.
- Danylenko, V. A., Sorokina, V. V., & Vladimirov, V. A. (1993). On the governing equations in relaxing media models and self-similar quasiperiodic solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26(23), 7125.
- Danylenko, V. A., Danevych, T. B., Makarenko, O. S., Skurativskiy, S. I., & Vladimirov, V. A. (2011). Self-organization in nonlocal non-equilibrium media. Kiev: Ed. of the Institute of Geophysics, 333 p.
- Eringen, A. C. (1976). *Continuum Physics. 4. Polar Nonlocal Field Theories*. New York: Academic Press, 288 p.
- Eringen, A. C. (2002). *Nonlocal Continuum Field Theories*. New York: Springer, 376 p.
- Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw

- dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54, 4703. <https://doi.org/10.1063/1.332803>.
- Eringen, A. C. (1992). Vistas of nonlocal continuum physics. *International Journal of Engineering Science*, 30(10), 1551. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(92\)90165-D](https://doi.org/10.1016/0020-7225(92)90165-D).
- Fleck, N. A., & Hutchinson, J. W. (1993). A phenomenological theory for gradient effects in plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41, 1825—1857.
- Guyer, R. A., & Johnson, P. A. (2009). *Nonlinear Mesoscopic Elasticity: The Complex Behavior of Granular Media including Rocks, Soil, Concrete*. Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim, 391 p.
- Ishihara, K. (1996). *Soil Behavior in Earthquake Geotechnics*. Oxford: University Press, 360 p.
- Kramer, S. L. (1996). *Geotechnical Earthquake Engineering*. N. J., Prentice Hall, Upper Saddle River, 672 p.
- Kunin, I. A. (1982). *Elastic Media with Microstructure* (Vol. 1. One-dimensional Models). Berlin: Springer-Verlag, 296 p.
- Kunin, I. A. (1983). *Elastic Media with Microstructure* (Vol. 2. Three-dimensional Models). Berlin: Springer-Verlag, 272 p.
- Metrikine, A. V., & Askes, H. (2002). One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure Part 1: Generic formulation. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21(4), 555—572. [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(02\)01218-4](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(02)01218-4).
- Mühlhaus, H. B., & Oka, F. (1996). Dispersion and wave propagation in discrete and continuous models for granular materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33(19), 2841—2858. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00178-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00178-6).
- Mühlhaus, H.-B., & Aifantis, E. C. (1991). A variational principle for gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28, 845—857. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90004-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90004-Y).
- Ostrovsky, L. A., & Johnson, P. A. (2001). Dynamic nonlinear elasticity in geomaterials. *Rivista del Nuovo Cimento della Societa Italiana di Fisica*, 24(7), 1—46.
- Peerlings, R.H.J., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M., & de Vree, J.H.P. (1996). Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(19), 3391—3403. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19961015\)39:19<3391::AID-NME7>3.0.CO;2-D](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19961015)39:19<3391::AID-NME7>3.0.CO;2-D).
- Rudiyak, V. Ya., & Yanenko, N. N. (1985). Some nonlocal models of fluid mechanics. *Mathematical Modelling*, 6(5), 401—412. [https://doi.org/10.1016/0270-0255\(85\)90061-2](https://doi.org/10.1016/0270-0255(85)90061-2).
- Vladimirov, V. A., Kutafina, E. V., & Zorychta, B. (2012). On the non-local hydrodynamic type system and its solitons-like solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(8), 085210.
- Zubarev, D. N., & Tishchenko, S. V. (1974). Nonlocal hydrodynamics with memory. *Physica*, 59(2), 285—304. [https://doi.org/10.1016/0031-8914\(72\)90084-5](https://doi.org/10.1016/0031-8914(72)90084-5).

Моделирование сейсмической реакции прослойки почвы в рамках нелокальной модели сплошной среды

А. В. Кендзера, С. В. Микуляк, Ю. В. Семенова, С. И. Скуратовский, 2020

Институт геофизики им. С. И. Субботина НАН Украины, Киев, Украина

Согласно современным исследованиям, сейсмические риски разрушения зданий и сооружений зависят не только от близости их расположения к эпицентрам землетрясений, но и от реакции грунтовых массивов, которые под ними залегают. Особенно важна соизмеримость набора резонансных частот грунтового массива и собственных частот расположенных на нем объектов. Известно, что почвы являются геологически сложными средами, которые невозможно описать в рамках простых математических моделей, поэтому возникает необходимость разработки новых или модификации уже известных моделей. Для описания динамики неоднородного грунтового массива применена модель, которая является пространственно нелокальным обобщением линейной математической модели Кельвина-Фойгта. Цель работы — оценка реакции слоя грунта на сдвиговое деформирование, когда грунтовый массив характеризуется существенной неоднородностью. На основе решения краевой задачи для грунтового слоя в форме стоячих волн построена зависимость коэффициента усиления амплитуды волны на поверхности слоя от частоты гармонического возмущения, приложенного к подошве массива. Показано, что модель описывает затухание колебаний на высоких частотах и сдвиг резонансных частот в низкочастотную область. Для оценки этих эффектов на основе методов асимптотического анализа исследована длина частотного интервала, который содержит основную часть спектра. Выводы о влиянии неоднородности грунта на его резонансные свойства сформулированы с помощью сравнения результатов, полученных в рамках классической модели Кельвина-Фойгта и ее нелокального обобщения. Предложенный подход анализа отклика слоя грунта перспективен для практического использования в инженерном деле, при проведении работ по сейсмическому микрорайонированию.

Ключевые слова: амплитудно-частотная характеристика, резонансные явления, нелокальные модели, методы моделирования реакции среды на сейсмические воздействия.