DOS TRATADOS DEL ARQUÍMEDES ÁRABE: *TRATADO DE LOS CÍRCULOS TANGENTES* Y EL *LIBRO DE LOS TRIÁNGULOS**

ARQUÍMEDES[1] (Aršimīdas[2] para los árabes) fue según Ya'qūbī[3] discípulo de Pitágoras e ideó los espejos ustorios con los cuales pudo incendiar la flota de los enemigos de su patria. Abū 'Umar b. Ya'qūb al-Kindī[4] añade que se preocupó de la construcción de autómatas, máquinas hidráulicas y de guerra, etc., e Ibn Qifṭī[5] afirma que estuvo en Egipto, estudió con los sabios de este país, escribió varias obras científicas y que a él se debe la organización de las técnicas y servicios agrícolas que limitaban al máximo los inconvenientes de la inundación ánua del Nilo. Qazwīnī[6] al hablar de Grecia nos asegura que sabía construir magníficos cuadrados

* Este trabajo se ha beneficiado de la ayuda concedida a la 1.ª Cátedra de Lengua Árabe (Barcelona) con cargo al crédito destinado al fomento de la Investigación en la Universidad.

1. Huelga advertir que no nos preocupamos en señalar aquí las discrepancias que existen entre el perfil biobibliográfico que presentamos a partir de las fuentes árabes y el que se obtiene utilizando los textos clásicos. Sobre el tema puede verse el artículo de Marshall CLAGETT, s. v., *Archimedes*, en «Dictionary of Scientific Biography», I (Nueva York, 1970), 213-231; M. CLAGETT, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. I: *The arabo-latin tradition* (Madison, 1964), en especial el capítulo VII: «The Arabo-latin tradition of Archimedes in retrospect» y el apéndice III (pp. 627-734): «Some medieval latin citations of Archimedes», así como el artículo del mismo CLAGETT, *The impact of Archimedes on Medieval Science*, en «Isis», 50, 162 (1959), 419-429. El lector español puede referirse al *Arquímedes* de José Babini (Colección Austral, n.° 847). Otros detalles pueden hallarse en E. J. DIJKSTERHUIS, *Archimedes* (Copenhage, 1956) y en el artículo *s. v.* de la Pauly-Wissowa. De paso señalamos que en la reciente edición de la «Encyclopédie de l'Islam» falta esta voz, así como las de otros científicos clásicos cuya obra sobrevivió en el mundo del Islam y que la bibliografía que damos no es (ni pretende ser) exhaustiva.

2. En los textos latinos de filiación árabe aparece como Ersemenides, Arthamides, Arsimenides, Ersemides, Arsamithis.

3. Fl. 891. Cf. GAL I, 226, S I, 405; Eilhardt WIEDEMANN, *Aufsaetze zur arabischen Wissenschaft-Geschichte* (Hildesheim-Nueva York, 1970), I, p. 155.

4. Fl. 970. Cf. GAL I, 149, S I, 229.

5. *Ta'rīj al-ḥukamā'*, ed. Lippert (Leipzig, 1903), p. 66.

6. *Āṯār al-bilād wa-ajbār al-'ibād* (ed. Wüstenfeld; Wiesbaden, 1848), p. 385.

mágicos. Según Ibn al-Nadīm[7] los griegos (*Rūm*) quemaron quince de sus obras «por una cuestión que sería prolijo explicar».

Tal y como hoy podemos establecer el inventario, son obras auténticas o espurias de Arquímedes las siguientes:[8]

1) *k. al-kura wa-l-ustuwāna* (La esfera y el cilindro). Cf. M. Steinschneider, *Die arabischen Uebersetzungen aus dem Griechischen* (Graz 1960, reimpresión en un libro de varios artículos publicados a fines del siglo pasado) § 95, I. Fue objeto de dos traducciones: la de Ṯābit b. Qurra (m. 901) y la de Isḥāq b. Ḥunayn (m. 910). Ambas fueron utilizadas para la refundición de Naṣīr al-Dīn Ṭūsī (m. 1274) y ésta ha sido publicada en Hyderabad 1359/1940. El prólogo de Ṭūsī no tiene desperdicio para conocer cómo trabajaban los traductores del griego al árabe:

«... Durante largo tiempo busqué la solución de varios problemas citados en la *Esfera y el cilindro* de Arquímedes, dado que los necesitaba para resolver algunas cuestiones geométricas. Al fin encontré la célebre copia del libro revisada por Ṯābit b. Qurra, pero en ella faltaban varias proposiciones dados los pocos conocimientos del traductor árabe y, por consiguiente, la imposibilidad en que se encontró de traducirlas. Sin embargo la estudié y me dí cuenta de que el cuaderno estaba viciado por la ignorancia del copista. La corregí en la medida de lo posible y me esforcé en arreglar las cuestiones hasta llegar al libro segundo y alcanzar las cosas omitidas por Arquímedes en los prolegómenos a pesar de que varios problemas dependían de ellas. Quedé perplejo y con más ganas que nunca de entenderlas. En estas circunstancias tropecé con un cuaderno viejo que contenía el comentario de Eutocio de Ascalón a los problemas del libro. Había sido traducido al árabe de modo inteligente por Isḥāq b. Ḥunayn y contenía el texto del libro desde el principio hasta el fin del teorema catorce del libro primero. La versión se debía también a Isḥāq. El comentario de Eutocio se encontraba en esa copia».[9]

Esta misma obra fue objeto de una tercera traducción (perdida) de Qusṭā b. Lūqā (fl. 912) que sirvió de base para la traducción hebrea de Qalonimos b. Qalonimos (fl. 1328).

2) *Fī taksīr al-dā'ira*; *Masāḥat al-dā'ira*; *Tarbī' al-dā'ira* (La medida del círculo). Traducción árabe de Ṯābit b. Qurra y Ḥunayn b. Isḥāq (m. 877)

7. *Fihrist*, ed. Fluegel (1872), p. 266.
8. Notamos en cursiva los títulos de aquéllas que conocieron o le atribuyeron los árabes. En redondas y entre comillas aquellas otras que no les fueron accesibles.
9. El ms. ² Escorial número 960 conserva el comentario de Eutocio a las proposiciones I-III, inclusive del libro II. Es una traducción fiel y servil y parece presentar las suficientes variantes para pensar que procede de un original distinto de los hoy utilizados.

revisada por Naṣīr al-Dīn Ṭūsī y está publicada en Hyderabad 1359/1940 a continuación de 1) *La esfera...* Cf. Steinschneider, § 97, 2; 100, 11.

3) «De los conoides y de los esferoides».

4) «De las espirales».

5) *Del equilibrio de los planos,* conocido parcialmente por los árabes a través de las obras clásicas de mecánica, como la de Herón, o el seudo-Euclides *Sobre la balanza,* el *Liber karastonis,* etc.[10]

6) «El arenario».

7) *Cuadratura de la parábola,* que hasta ahora se consideraba no había sido conocida por los árabes. Clagett (1970) insinúa que, dado el interés de Ṯābit b. Qurra por los procedimientos infinitesimales arquimedeos, que mejoró de modo notable,[11] es muy probable que este libro hubiera sido accesible a aquéllos.

8) *De los cuerpos flotantes.* Como mínimo fue conocido parcialmente por los árabes. Conocieron el enunciado, sin demostraciones, de siete de las nueve proposiciones del libro I y la primera proposición del II. Aparentemente no les interesaron los abstrusos problemas de la estabilidad de los segmentos conoidales que se encuentra en el libro II[12].

9) «El Método».

10) *Stomachion* o *Loculus Archimedius.* Conservado como mínimo parcialmente. Cf. H. Suter en ZM 44 (1899), 491-499.

11) *Kitāb Māǧūḏāt* (Libro de los lemas, Liber assumptorum). Traducido por Ṯābit b. Qurra y comentado por al-Nasawī (fl. 1000). Ambos estuvieron en la base de la redacción de Naṣīr al-Dīn Ṭūsī editada en Hyderabad 1359/1940. Alguno de sus teoremas recuerdan a los de 16) *al-Muṯallaṯāt.*

12) «Problema de los bueyes».

13) «Sobre los poliedros regulares».

14) *Tasbī' al-dā'ira; al-Musabba' fī-l-dā'ira* (Sobre la inscripción del heptágono en una circunferencia). Traducido por Ṯābit b. Qurra. Esta obra, así como las n.º 1 y 2 son las únicas de nuestro autor que cita el cadí Ibn Ṣā'id en su *Ṭabaqāt,* p. 29. Cf. Steinschneider, § 97, 2 *b*; J. Troepfke, *Die Siebeneckabhandlung des Archimedes «Osiris»* 1 (1936), 636-651; C. Schoy, *Graeco-arabischen Studien.* «Isis» 8 (1926), 35-40; C. Schoy, *Die Trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen... al-Bīrūnī* (Hannover 1927), pp. 74-84.

10. Cf. M. Clagett (1959).

11. Cf. A. P. Youschkevitch, *Note sur les déterminations infinitésimales chez Thabit ibn Qurra,* AIHS, 17, 66 (1964), 37-45; A. P. Juschkewitsch (es el mismo autor anterior), *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (Basilea, 1964), p. 288-295.

12. H. Zotenberg, *Traduction arabe du traité des corps flottants,* JA, 1879, I, 509-515; E. Wiedemann, *Ueber arabische Auszüge aus der Schrift des Archimedes über die schwimmender Körper,* en «Aufsätze...», I; 229-239.

15) *De iis quae in humido vuhentur.* Título que recibe del *incipit* de la traducción de W. de Moerbeke (m. c. 1286). Este texto está emparentado con 8). Cf. Steinschneider, § 100, 8.

16) *al-Muṯallaṯāt* (Sobre los triángulos). Cf. Steinschneider, § 98, 3. Las citas de Ibn Qifṭī, p. 66, y de Ibn Abī Uṣaybiʿa (ed. Müller, El Cairo 1882) I, 24, parecen aludir a esta obra. Sin embargo, el título es muy genérico y se presta a confusiones, dado que varios autores árabes compusieron (o tradujeron del griego, cf. Steinschneider, § 112 sobre Menelao) tratados del mismo nombre.

17) *al-Juṭūṭ al-mutawāziya* (Sobre las paralelas). Cf. Steinschneider, § 98, 4; Ḥaŷŷī Jalīfa (ed. y trad. Flügel), vol. V (Leipzig 1850, p. 81, n.º 10093; Clagett (1959), 421.

18) *Propiedades de los triángulos rectángulos.* Cf. Steinschneider, § 99, 6; Clagett (1970), 225-226.

19) *Ālat al-sāʿa* o *fī ʿamal al-binkamat* (Sobre clepsidras). Cf. Steinschneider, § 99, 7; Clagett (1959), 421. El tratado publicado por Carra de Vaux, *Traité des Clepsydres sans nom d'auteur arabe*, JA 1891, I, 295-322 menciona con frecuencia a Arquímedes. El manuscrito de Santa Sofía 4861 reza en la portada «Sobre la construcción de las clepsidras que señalan las horas, de Arquímedes. Contiene toda suerte de diagramas y figuras».

20) *De speculo comburente concavitatis parabolae.* Cf. Steinschneider, § 100, 9. Ibn al-Hayṯam en su obra *al-Marāyā al-muḥriqa bi-l-quṭūʿ* (ed. Hyderabad, *Rasāʾil* 1357/1938), dice en el prólogo: «También hay quien utilizó numerosos espejos esféricos que dirigían sus rayos a un mismo punto con el fin de aumentar la potencia del calor. Entre quienes utilizaron estos espejos hay gente famosísima como Arquímedes y Anthemios».[13] Este problema originó una gran polémica en los siglos XVII-XVIII puesto que mientras Descartes (*Cartas*, *Dioptrica*) negaba la posibilidad de que Arquímedes hubiera podido incendiar la flota romana con este procedimiento, el P. Atanasio Kircher (1602-1680) en su *Ars magna lucis et umbrae* y más tarde Buffon, en una comunicación a la Academia de Ciencias, sostenían lo contrario. El último afirmaba que con el uso de numerosos espejos planos, pequeños, dispuestos en forma de parábola, pudo haber conseguido el éxito que legendariamente se le atribuye desde una distancia de 60 metros y en verano.[14]

21) *Fī uṣūl al-handasa* (Fundamentos de la geometría). Nos encontramos con un caso parecido al de (16) *Muṯallaṯāt*, por existir obras homó-

13. Sobre este último autor cf. G. SARTON, *Introduction*... I, 427. Compárese el texto de nuestra traducción con la latina recogida por CLAGETT (1964), p. 633.

14. Cf. W. E. K. MIDDLETON, *Archimedes, Kircher, Buffon and the burning-mirrors*, en «Isis», 52, 170 (1961), 533-543; G. LORIA, *Les miroirs ardents d'Archimède*, en «Isis», 20 (1938), 441.

nimas de distintos autores. Steinschneider § 112, 4 atribuye unos *Fundamentos de la geometría* a Menelao, diciendo que fue reelaborado (*Fihrist* p. 267: *'amala-hu*) por Ṯābit b. Qurra en tres tratados; GALS I, 386 afirma que Ibrāhīm b. Sinān (m. 946) realizó la traducción de este libro de Arquímedes, y Clagett (1970) identifica estos *Uṣūl* con (16) *Muṯallaṯāt*. Nosotros creemos que las obras citadas por Haŷŷī Jalīfa, Qifṭī e Ibn Abī Uṣaybi'a con títulos variados como *Libro de los triángulos* (16), *De las paralelas* (17) y *Propiedades de los triángulos rectángulos* (18) siempre referidas a Arquímedes y aludiendo a determinados teoremas que figuran en *Uṣūl*... no son mas que variantes del nombre de este libro y que en consecuencia los números 16, 17 y 18 deben omitirse de los repertorios bibliográficos en beneficio del 21 pues los autores árabes citados, al examinar rápidamente los *Uṣūl*..., se fijaron en un solo tipo de teoremas y atribuyeron al todo el título que intuyeron de las pocas líneas leídas.

La problemática de este libro así como la del siguiente (22) *Fī-l-dawā'ir al-mutamāssa* hay que estudiarla conjuntamente, pues ambos fueron publicados a la vez en Hyderabad 1366/1947 bajo una portadilla azul que reza *Rasā'il Ibn Qurra li-l-'allāma Ṯābit b. Qurra al-Ḥarrānī... wa-hiya risālatāni li-Aršimīdis, naqalahumā min al-yūnāniyya ilà al-'arabiyya*. En la portadilla se indica que la edición se basa en el manuscrito de Bankipore 2468, 28 y 29. M. Plessner[15] tiene sus dudas sobre la atribución de ambas a Arquímedes, y, en cuanto al traductor real de las mismas, se inclina a creer que es Ibrāhīm b. Sinān y no su abuelo, Ṯābit.[16] De la portadilla transcrita así como de la edición de las *Rasā'il Ibn Sinān li-l-'allāma Ibrāhīm b. Sinān b. Ṯābit b. Qurra al-Ḥarrānī* (Hyderabad 1367/1948), que proceden también del manuscrito 2468 según la portadilla (2519 en GALS, I, 386), puede establecerse la siguiente relación de tratados:[17]

Fī ṭarīq al-taḥlīl wa-l-tarkīb (citado en lo sucesivo como *Método*).

Maqāla fī rasm al-quṭū'.
Fī-l-asṭurlāb.
Fī harakāt al-šams.
Misāḥat qaṭ' al-majrūṭ al-mukāfi'.
Fī-l-handasa wa-l nuŷūm.
Fī uṣūl al-handasa.
Fī-l-dawā'ir al-mutamāssa.

15. *Storia delle scienze nell'Islam*. Separata de *Le civiltà dell'Oriente*, III (Roma, 1958), p. 470.

16. Esta atribución se encuentra, además de en la portadilla, en la p. 3 del prólogo del editor, consagrado — aparte de una brevísima noticia sobre Ṯābit (p. 5-7) — a describir somerísimamente la *maŷmū'a* que edita.

17. El manejo de la portadilla es imprescindible ya que en ésta figura la indicación de la *maŷmū'a* y el ordinal del opúsculo correspondiente que en cambio falta en la portada.

Todos estos tratados figuran a nombre de Ibn Sinān en GALS y todos — menos los dos últimos, que se atribuyen a Ṯābit — a través de las portadillas.

Fī uṣūl... empieza a nuestro parecer trunco en la edición pues tras la *basmala* aparece «li-nafriḍ niṣfa dā'iratin *A*, *B*, *G*...» y en el *explicit* se cita expresamente a Arquímedes: «Ha terminado el libro de Arquímedes acerca de los *Fundamentos de la Geometría*. Consta de veinte teoremas».[18]

22) *Fī-l-dawā'ir al-mutamāssa* (Sobre los círculos tangentes). Presenta una casuística similar al de (21) *Fī uṣūl...* Se inicia con un «Dice Arquímedes...» Clagett (1959) lo designa como *On touching circles*. En la muy interesante autobiografía de Ibn Sinān que figura en sus *Rasā'il*[19] — y por tanto en el mismo manuscrito base de las ediciones de Hyderabad — se alude reiteradamente a un *Fī-l-dawā'ir al-mutamāssa*, obra del propio Ibn Sinān. ¿Es idéntico al que en el mismo misceláneo se atribuye a Arquímedes? Ibn Sinān cita *su* libro en *Método* pp. 31, 46, 54 y 55; en *Ḥarakāt al-šams*, p. 66, donde dice: «Entre las obras de geometría que he compuesto hay, en primer lugar, trece tratados (*maqālāt*) de los cuales once tratan de los círculos tangentes. En ellos demostré los casos de tangencia entre círculos o entre líneas y círculos pretendiendo con ello mostrar los métodos que deben emplearse».[20] Sigue citándolo en pp. 67 y 68 («Como complemento de esos trece tratados compuse otro que contiene cuarenta y un problemas geométricos de difícil solución acerca de círculos, líneas, triángulos y círculos tangentes...»); y, finalmente, en su *Handasa wa-'ilm al-nuŷūm*, p. 81, precisa: «Entre las cosas que no hemos explicado en el *Libro de los círculos tangentes* pero que explicamos en éste se encuentra el problema de trazar un círculo tangente a otro dado y que pase por dos puntos determinados».

Resumiendo: Creemos que la alusión a Arquímedes del *incipit* puede ser correcta, pero ignoramos si los teoremas que más abajo traducimos son todos ellos arquimedeos o bien proceden de uno o varios de los once tratados escritos sobre el tema por Ibn Sinān.

23) *On data*. Citado así por Clagett (1959).

18. En la traducción que tenemos en curso de publicación hemos enumerado 19, lo cual confirma el principio exabrupto de la edición.

19. La lectura del texto me sugiere que el editor (¿o ya está así en el propio manuscrito?) ha trastocado alguno de los párrafos que se encuentran desplazados e insertos en lugares inadecuados. Para la autobiografía véase fundamentalmente *al-Handasa wa-'ilm al-nuŷūm*, p. 3-5, y *Ḥarakāt al-šams* (últimas páginas).

20. وكان غرضي فيها أن أذكر عدّة مسائل كيف ينبغي أن يجري التحليل والتركيب.

24) *Kitāb fī-l-muʿādalāt min al-aškāl allatī stuʿmila fībā al-amḥāl* (Libro del equilibrio de las figuras en las que se emplean las palancas) citado por Herón en su *Mecánica* (I, 24), que se conserva en la versión árabe de Qusṭā b. Lūqā y que ha sido editada y traducida por Carra de Vaux.[21]

25) *Kitāb al-qawā'im* (Libro de los soportes). Citado en Herón, I, 25.

26) *Kitāb al-amḥāl* (Libro de las palancas). Citado por Herón, I, 32. Para Carra de Vaux (1893), los números 24, 25 y 26 son parte del perdido *Peri Zygon* (*De stateris. Las balanzas*).

27) *Kitāb fī musāwāt al-mayl* (Libro de la equivalencia de peso). Citado por Herón, II, 7.

28) «Composición de la esfera». Cf. Clagett (1970).

29) «Sobre la distancia de los planetas». Cf. Babini, § 12.

30) «Catoptrica». Cf. Clagett (1970).

31) «Liber Archimedis de insidentibus acquae». Cf. Clagett (1970).

31) «Mecánica». Cf. Clagett (1970).

21. *Les mecaniques ou l'elevateur de Héron d'Alexandrie...*, J. A., 1893, I, 386-472; II, 152-261, 420-514. Las citas de otras de Arquímedes por Herón han sido estudiadas por A. G., DRACHMANN, *Fragments from Archimedes in Heron's Mechanics*, en «Centaurus», 8 (1963), 91-146. Manéjese con la recensión de F. KRAFFT, en «Mathematical Review», 31 (1966), núm. 4705. Cf. en CLAGETT (1959 y 1970) las posibilidades de identificación de este grupo de obras (24-27) en que no todos los autores coinciden.

LIBRO DE LOS CÍRCULOS TANGENTES DE ARQUÍMEDES EL ASESINADO EL AÑO 212 ANTES DE JESUCRISTO

En el nombre de Dios, el Clemente, el Misericordioso.

Dice Arquímedes: [1] Cuando vuestros círculos estén uno a continuación de otro, tangentes, y sus centros estén sobre una misma línea, siendo ésta recta, y conozcas sobre esta recta un punto cualquiera, y traces a partir de él una recta tangente a los círculos, en este caso los círculos estarán en una proporción según su sucesión; si los círculos están en una proporción de sucesión, la línea que es tangente a dos consecutivos, si se traza recta, es tangente al resto de los círculos.

Ejemplo: Supongamos unos círculos, seguidos, tangentes; sean sus centros A, B, G; los centros A, B, G, estén sobre la misma línea recta AG y supongamos que los círculos son tangentes entre sí en los dos puntos

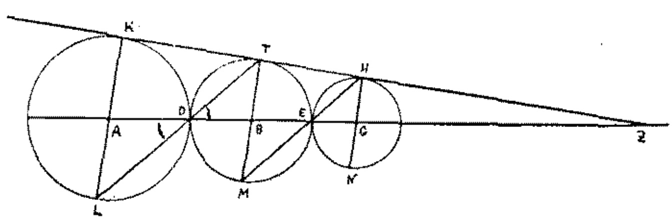

Fig. 1

D y E. Conocemos sobre la línea AG el punto Z y a partir de él una línea tangente a los círculos en los puntos H, T, K.

Digo que la relación del círculo A al círculo B es la misma que la del círculo B al círculo G (fig. 1).

Demostración: Tracemos a partir del punto de tangencia los diámetros correspondientes o sea las líneas KAL, TBM y HGN. Unamos L con D, D con T y M con E, E con H. Dado que las líneas KL, TM y HN[1] arrancan de los puntos de tangencia, pasando por los respectivos centros, son

1. En texto impreso HZ.

perpendiculares a la tangente y por lo tanto, son paralelas; el ángulo LAD es igual al ángulo DBT[2] y los dos triángulos LAD y DBT[3] son isósceles y el ángulo ADL[4] es igual al ángulo BDT. La línea AB es recta y por tanto la línea LT es también recta. Del mismo modo queda manifiesto que la línea MH es recta, y dado que los dos triángulos LKT y MTH son rectángulos, los ángulos ALT[5] y BMH[6] de ambos son iguales. En consecuencia, los dos ángulos restantes, o sea KTL y THM, son iguales y la línea LT es paralela a la línea MH. Y como los dos triángulos KLT y MTH son semejantes, se verificará la relación:

$$\frac{LK}{KT} = \frac{MT}{TH}.$$ [7]

Y si permutamos tendremos: $\frac{LK}{MT} = \frac{KT}{TH}$. Pero, $\frac{KL}{TM} = \frac{KA}{TB}$ quiero decir igual a la razón $\frac{KZ}{TZ}$. Pero la relación[8] entonces hasta ZT es como $\frac{KT}{TH}$ y dado que $\frac{KZ}{TZ} = \frac{KT}{TH}$ (que es lo que falta para completar el total), será:

$$\frac{TZ}{ZH} = \frac{KZ}{ZT}.$$ [9]

Pero la proporción $\frac{KZ}{ZT} = \frac{KA}{TB}$ quiero decir que es igual a la razón $\frac{LK}{TM}$ y en consecuencia $\frac{TZ}{ZH} = \frac{TB}{HG}$ quiero decir que es igual a la razón $\frac{TH}{HN}$.[10]

Pero, consecuentemente $\frac{KL}{TM} = \frac{TM}{HN}$.

2. En el texto DLT.
3. En el texto DLT.
4. En el texto ADB.
5. En el texto ALG.
6. En el texto BMD.
7. En el texto LT.
8. El editor pone una nota que dice que el original es ilegible. Nosotros entendemos KZ.
9. En el texto TN.
10. Entendemos: $\frac{KA}{TB} = \frac{KZ}{TZ} = \frac{KT}{TH} = \frac{KZ - TZ}{TZ - HZ}$ y en consecuencia: $\frac{KZ}{TZ} = \frac{TZ}{HZ}$; $\frac{KZ - TZ}{KZ} = \frac{TZ - HZ}{TZ}$; $\frac{KZ}{TZ} = \frac{KZ - TZ}{TZ - HZ}$ y por lo tanto: $\frac{TZ}{HZ} = \frac{TB}{HG}$.

Esto es una proporción en que $\frac{KL^2}{TM^2} = \frac{TM^2}{HN^2}$.

Y la relación de unos con otros círculos será la misma que guarda la relación de los cuadrados de sus diámetros y por consiguiente:

$$\frac{\text{círculo } A}{\text{círculo } B} = \frac{\text{círculo } B}{\text{círculo } C}.$$

Y eso es lo que queríamos demostrar.

[2] Recíprocamente: Sean círculos unos a continuación de otros según una razón dada, y supongamos una recta ZH tangente a los dos círculos G y B en los dos puntos H, T.

Digo que si prolongamos la línea ZT será tangente al resto de los círculos (fig. 2).

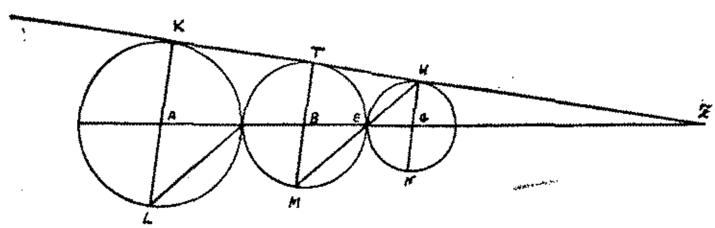

Fig. 2

Demostración: Por el punto A tracemos una recta paralela a TM. será el diámetro KAL. Unamos T con K y completemos el dibujo tal como está en la figura que ha precedido. Nos resultará manifiesto que[11] la línea LK[12] será perpendicular a la línea KT[13] y que la línea LT será paralela a MH. El triángulo KLT será semejante al triángulo TMH y, dado que los círculos consecutivos están en una razón dada, tendremos:

$$\frac{KL}{TM} = \frac{TM}{HN}. \text{ Pero quiero decir } \frac{KL}{TM} = \frac{AL}{TB}$$

semejante a la razón[14] $\frac{LD}{DT} = \frac{LD}{ME}$. Pero, $\frac{TM}{HN}$ es la misma relación

$$\frac{BM}{HG} = \frac{ME}{EH} = \frac{DT}{EH}.$$

11. Ilegible.
12. En el texto LG.
13. En el texto GT.
14. En el texto ZT.

Pero se verifica $\frac{LD}{ME} = \frac{KL}{TM}$.

Y por consiguiente: $\frac{KL}{TM} = \frac{LD}{ME} = \frac{DT}{EH}$.

Eso quiere decir como la razón total $\frac{LT}{MH}$.

Dado que $\frac{KL}{TM} = \frac{LT}{MH}$ y los dos ángulos que se forman son iguales, los dos triángulos KLT y TMH son semejantes. El ángulo LKT es igual al MTH y el ángulo MTH es recto. Por tanto LKT es recto y la línea KL es paralela a TB y el ángulo KTM también es recto. El ángulo BTH es recto y la línea HT, por consiguiente, se levanta sobre la línea TK y es tangente al círculo A.

De modo semejante se demostraría que si se tuviesen círculos mayores que estos, tantos cuantos se quisiera, sería tangente a cuantos círculos mayores que este hubiese.

Idénticamente: supongamos varios círculos en las condiciones precedentes y unamos L con K, K con D, T con E, E con H, H con N (fig. 3).

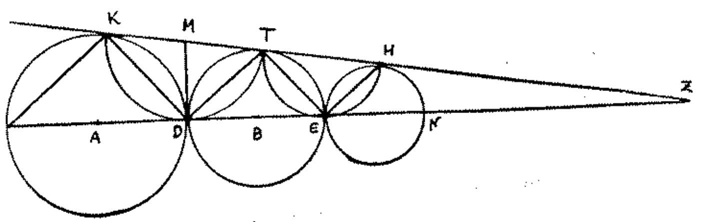

Fig. 3

Desde el punto D tracemos una recta tangente a los dos círculos A y B. Sea la recta DM. La recta DM será perpendicular a la línea LZ. Y dado que cada una de las dos rectas KM y MD son tangentes al círculo A, la línea KM[15] será igual a la línea MD y del mismo modo la línea TM será igual a MD. Y las tres líneas KM, MD y TM serán iguales y la circunferencia trazada con centro en M y con radio MK será igual a la circunferencia KDT que pasa por los puntos K, D, T. El ángulo KDT será recto y el ángulo LKD será recto y las dos líneas LK y TD serán paralelas.

De idéntica manera es manifiesto que las líneas DT y EH son paralelas dado que la línea ZHK es tangente a la circunferencia A en el punto K y la línea KD divide la circunferencia y forma un ángulo con TK que es igual al ángulo KLD. Los dos triángulos LKD y KDT son rectos y el

15. En el texto LM.

ángulo KDL que queda es igual al ángulo KTD restante. En consecuencia los dos triángulos LKD y TDK son semejantes. Pero el triángulo LKD es semejante al triángulo DTE y el triángulo KDT es semejante al triángulo TEH. Luego los triángulos LKD, KDT, TEH y EHN son semejantes. Tenemos las razones iguales

$$^{16}\frac{LK}{KD} = \frac{KD}{TD} = \frac{DT}{TE} = \frac{TE}{EH}.$$

Si omitimos los medios, tenemos:

$$\frac{LK}{DT} = \frac{DT}{EH}.$$

Pero de $\frac{LK}{DT} = \frac{LD}{DE}$ y de $\frac{DT}{EH} = \frac{DE}{EN}$,[17] tenemos: $\frac{LD}{DE} = \frac{DE}{EN}$ y en consecuencia: $\frac{LD^2}{DE^2} = \frac{DE^2}{EN^2}$.

Y en consecuencia la razón entre el círculo A y el círculo B es la misma que entre el círculo B y el círculo C. Y esto es lo que queríamos demostrar.

Idénticamente: Sean unos círculos consecutivos y proporcionales. Sea la recta ZH tangente a los dos círculos G y B en los puntos H y T.

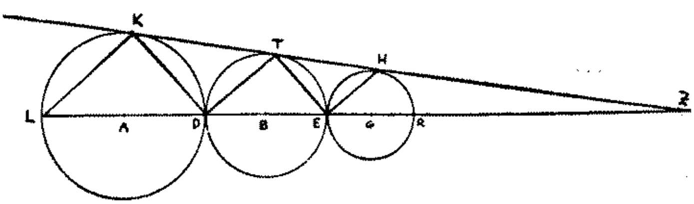

Fig. 4

Decimos que si prolongamos la recta ZHT ésta será tangente al círculo A.

Demostración: Tracemos las líneas RH,[18] HE, ET, TD (fig. 4). Tracemos desde el punto D una línea paralela a TE. Sea DK. Unamos TK y KL.[19] Dado que KD es paralela a TE, el ángulo KDL será igual al

16. En el texto AK.
17. Hemos entendido EN en lugar de EZ, como aparece en el texto, en esta parte de demostración.
18. En el texto BH.
19. La letra L falta en la figura.

ángulo TED y el ángulo ETD[20] es recto e igual al ángulo TDK. Dado que las dos líneas KD y TE son paralelas y el ángulo DKL es recto, ya que está inscrito en la semicircunferencia LKD. El ángulo TDK es por consiguiente igual al ángulo DKL y la línea LK[21] por consiguiente paralela a la línea DT. Y, según lo demostrado ya, los triángulos son semejantes. Luego.

$\frac{RH}{HE}$[22] $= \frac{HE}{ET}$ y $\frac{ET}{TD} = \frac{ZE}{ZT}$ o sea el cuadrado de la razón $\frac{EH}{ET}$.

Pero $\frac{EH}{ET}$[23] $= \frac{ET}{DT}$ y $\frac{RH}{HE}$[24] $= \frac{ET}{DT}$ y en consecuencia la razón $\frac{ET}{DT}$ dos veces. Y $\frac{ET}{TD} = \frac{TD}{DK}$.

Y ésta está formada por dos ángulos iguales. Y el triángulo KDT es semejante al triángulo DTE y el ángulo DKT es igual al ángulo EDT. Y el ángulo HTE es igual al ángulo TKD. Y dado que los dos ángulos KDT[25] y TEH[26] son iguales por ser rectos y el ángulo KTD[27] es igual al ángulo THE (*sic*) los dos ángulos DBH y DTH serán iguales por ser rectos. La línea KT será prolongación de TZ.[28] Y dado que el ángulo TKD es igual al ángulo DLK, la línea ZK será tangente a la circunferencia A.

Realmente he aclarado lo que se dice en el Libro III de Euclides conocido como *Usṭuqsāt* (*Elementos*) y así hemos llegado a obtener con lo que hemos demostrado que si dos círculos son tangentes exteriores y si el espacio que los separa lo une una recta como TK, pues [esa] recta tangente es media entre los dos diámetros de los círculos, según la sucesión de razones. Y eso es así porque son semejantes los triángulos que tienen la proporción.[29]

$$\frac{LD}{KT} = \frac{KT}{DE}.$$

[3] Cuando se trata de dos círculos cuyos centros vienen consecutivamente sobre una única recta y esta recta se prolonga y sobre ella se toma un punto cualquiera desde el cual se traza una tangente a esos círculos,

20. Texto, TED.
21. En el texto AK.
22. En el texto BG.
23. En el texto ZH.
24. En el texto ZH.
25. En el texto KTH.
26. En el texto THE.
27. En el texto KDT.
28. En el texto EZ.
29. Ya que $\frac{LD}{KT} = \frac{KD}{DT}$; $\frac{KT}{DE} = \frac{KD}{DT}$.

la razón entre estos círculos es la razón de los cuadrados de las rectas que les son tangentes (fig. 5).

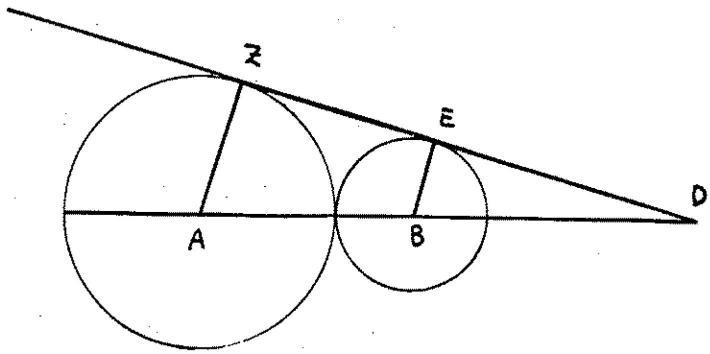

Fig. 5

Ejemplo: Supongamos dos círculos que tienen por centros A y B sobre la misma recta. Prolonguemos la recta AB. Sobre el círculo B tomemos el punto E y tracemos una recta que corte a la línea AB y sea tangente al círculo B en E y al círculo A en Z.

Digo que $$\frac{\text{círculo } A}{\text{círculo } B} = \frac{ZD^2}{ED^2}.$$

Demostración: Unamos Z con A y E con B. Como cada uno de los ángulos AZD y BED son rectos, la línea ZA será paralela a EB, y por tanto

$$\frac{ZA}{EB} = \frac{\text{diámetro del círculo } A}{\text{diámetro del círculo } B} = \frac{ZD}{ED}$$

y

$$\frac{RA^2}{RB^2} = \frac{\text{círculo } A}{\text{círculo } B} = \frac{ZD^2}{DE^2}.$$

Y esto último es lo que queríamos demostrar.

[4] Cuando tenemos círculos tangentes cuyos centros están sobre una única recta y guardan una relación consecutiva y desde sus respectivos centros se trazan líneas tangentes sucesivamente, la razón de unos círculos con otros es como la razón de los cuadrados de las líneas que respectivamente les son tangentes (fig. 6). Supongamos unos círculos tangentes cuyos centros son A, B, G, D situados sobre la misma recta y que guarden una proporción determinada, consecutivamente. Desde los puntos A, B, G, D de la línea $ABGD$ trácense rectas que sean tangentes a los círculos A, B, G, D, sucesivamente. Sean las rectas BT, GK, y DL.

Digo que:

$$\frac{\text{círculo } A}{\text{círculo } B} = \frac{BT^2}{GK^2}.$$

y que

$$\frac{\text{círculo } B}{\text{círculo } G} = \frac{GK^2}{DL^2}.$$

Demostración:[30] Dado que los círculos guardan entre sí, consecutivamente una proporción, la razón de los diámetros es:

$$\frac{ME}{EZ} = \frac{EZ}{ZR} = \frac{ZR}{RH}.$$

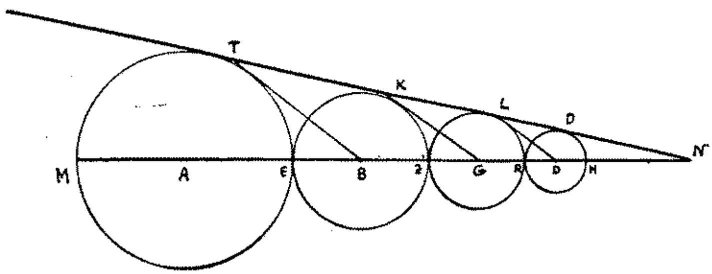

Fig. 6

Si permutamos [dividiendo por 2]: $\frac{ME}{EB} = \frac{EZ}{ZG}$.

Y si sumamos tendremos: $\frac{MB}{BE} = \frac{EG}{GB}$.

Pero la recta BT es media proporcional entre las dos rectas MB y BE[31] y la recta KG es media proporcional entre las dos rectas EG y GZ. Por tanto:

$$\frac{BT}{BE} = \frac{KG}{GZ}.$$

Si permutamos $\frac{BT}{KG} = \frac{EB}{ZG}$ y $\frac{EB}{ZG} = \frac{ME}{EZ}$

y

$$\frac{BT}{KG} = \frac{\text{diámetro } ME}{\text{diámetro } EZ}$$

o sea:

$$\frac{ME^2}{EZ^2} = \frac{\text{círculo } A}{\text{círculo } B} = \frac{TB^2}{KG^2}.$$

Y esto es lo que queríamos demostrar.

30. De acuerdo con la figura entendemos que debe ser: $\frac{ME}{EZ} = \frac{EZ}{ZR} = \frac{ZR}{RH}$ y no $\frac{ME}{EZ} = \frac{EZ}{AL} = \frac{ED}{DG}$ como aparece en el texto.

31. En el texto NE.

De aquí deducimos que sabemos que las líneas *TB*, *KG*, *LD* son proporcionales consecutivamente y paralelas. Y saberlo es algo elemental y para comprenderlo fácilmente basta con que unamos los puntos de tangencia y los centros. Así se nos formarán triángulos rectángulos semejantes.

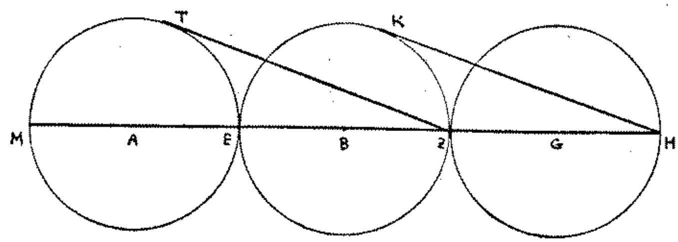

Fig. 7

[5] Y añadiré que esto exactamente ocurre si se trazan líneas tangentes desde los extremos de los diámetros [y] no desde los centros conforme se ha dibujado en esta figura (fig. 7).

Demostración: Dado que $\frac{ME}{EZ} = \frac{EZ}{ZH}$

si sumamos $\frac{MZ}{ZE} = \frac{EH}{HZ}$.

Pero la línea *ZT* es media proporcional entre las dos líneas *MZ* y *ZE* y la línea *KH*[32] es media proporcional entre las dos líneas *EH* y *HZ*, luego:

$$\frac{TZ}{KH} = \frac{EZ}{ZH} = \frac{ME}{EZ}$$

y $$\frac{ME^2}{EZ^2} = \frac{\text{círculo } A}{\text{círculo } B} = \frac{TZ^2}{KH^2}.$$

Igualmente y por lo que ha precedido estas rectas tangentes son paralelas sucesivamente cualquiera que sea su número.

[6] Cuando se trata de círculos tangentes interiores en un mismo punto, guardan proporción entre sí consecutivamente.

Saca desde la extremidad de sus diámetros líneas que les sean tangentes consecutivamente. La razón de unos círculos con otros será la misma que la de los cuadrados de las líneas que, respectivamente, le son tangentes.

32. En el texto *KG*.

Ejemplo: Supongamos unos círculos con diámetros AB, AG, AD. Guarden proporción entre sí sucesivamente y sean tangentes todos ellos

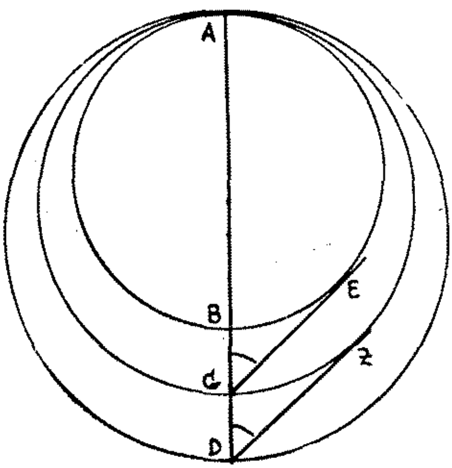

Fig. 8

en el punto A (fig. 8). Tracemos desde los puntos G y D dos líneas tangentes a los círculos. Sean las líneas GE y DZ. Digo que

$$\frac{\text{círculo } AEB}{\text{círculo } AZG} = \frac{EG^2}{ZD^2}.$$

Demostración: Se da $$\frac{DA}{AG} = \frac{GA}{AB}.$$

Si dividimos y permutamos conforme hemos hecho anteriormente, tendremos:

$$\frac{ZD}{EG} = \frac{GA}{AB}$$

y consecutivamente[33]

$$\frac{ZD^2}{EG^2} = \frac{GA^2}{AB^2}$$

o sea que: $\frac{\text{círculo } GZA}{\text{círculo } BEA}$ y eso es lo que queríamos demostrar.

33. Operando obtenemos: $\frac{DA}{AG} = \frac{GA}{AB}$ y $\frac{DZ^2}{GE^2} = \frac{DG \cdot DA}{GB \cdot GA} = \frac{DG \cdot GA}{GB \cdot AB} =$
$= \frac{(AD - AG) \cdot AG}{(AG - AB) \cdot AB} = \frac{AG^2}{AB^2}.$

En resumen: [7] Cuando hay varios círculos tangentes [interiores en un mismo punto] con unas tangentes desde el círculo que los envuelve, formando ángulos iguales con la línea de los centros, la razón de unos círculos con otros es la misma que la de las respectivas tangentes.

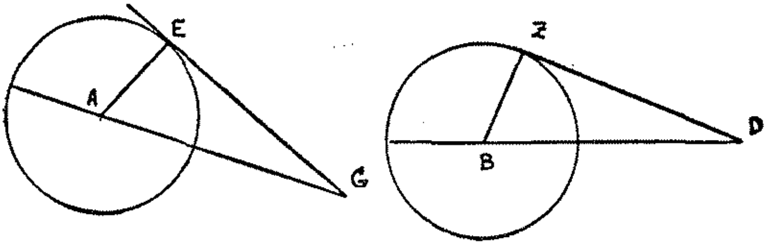

Fig. 9

Ejemplo: Supongamos dos círculos con centros en A y B. Desde ambos centros tracemos las dos rectas AG y BD. Tracemos GE tangente al círculo A y DZ tangente al círculo B (fig. 9). Sea el ángulo AGE igual al ángulo BDZ. Digo que:

$$\frac{\text{círculo } A}{\text{círculo } B} = \frac{GE^2}{DZ^2}.$$

Demostración: Dado que los dos triángulos AEG y BZD con sendos ángulos rectos son semejantes, por tanto:

$$\frac{EG}{ZD} = \frac{EA}{ZB}.$$ [34]

y

$$\frac{EG^2}{ZD^2} = \frac{EA^2}{ZB^2}$$

o sea que es igual a $\frac{\text{círculo } A}{\text{círculo } B}$ y eso es lo que queríamos demostrar.

[8] Cuando dos círculos son tangentes y desde las extremidades de la línea que pasa por sus centros y los puntos de tangencia se trazan dos líneas que se cortan al tiempo que son tangentes de ambos círculos, la razón entre ambas circunferencias es la misma que la razón al cuadrado de las dos líneas que se cortan.

Ejemplo: Supongamos dos círculos tangentes en el punto G, de centros A y B. Tracemos la recta que pasa por sus centros DGE. Desde los

34. En el texto $\frac{HA}{ZK}$.

dos puntos D y E tracemos dos rectas que se cortan y son tangentes en los puntos Z y J (fig. 10).

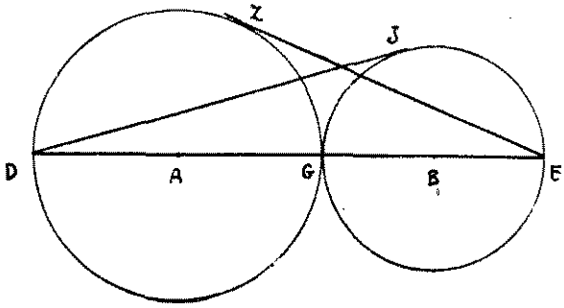

Fig. 10

Digo que la razón de la circunferencia A a la circunferencia B es como la razón de la recta DJ, tangente, a la recta EZ, tangente, al cuadrado.

Demostración: Dado que

$$\frac{\text{círculo } A}{\text{círculo } B} = \frac{DG^2}{GE^2}$$

y $\frac{DG}{GE} = \frac{GD \cdot ED}{GE \cdot ED}$ en consecuencia $\frac{\text{circunferencia } A}{\text{circunferencia } B} = \frac{ED \cdot DG}{DE \cdot EG}$

es decir $\frac{DJ^2}{EZ^2}$. Y eso es lo que queríamos demostrar.

[9] Si tenemos una circunferencia y desde uno de los extremos del diámetro trazamos una tangente y desde el otro extremo una línea que sea secante a la circunferencia y se corte con la tangente se tiene: el producto de la línea secante por su parte que está en el interior del círculo es igual al cuadrado del diámetro.

Supongamos un círculo cuyo diámetro sea AB. Tracemos por el punto A la tangente AG y unamos B con D y con G (fig. 11).

Digo que $$GB \cdot BD = AB^2.$$

Demostración: Hemos unido A con D[35] y el triángulo GBA[36] es rectángulo y semejante al triángulo ABD, también rectángulo. Luego:

$$\frac{GB}{BA} = \frac{BA}{BD}$$

35. En el texto A con B.
36. En el texto GDA.

y el producto $GB \cdot BD = AB^2$

Que es lo que queríamos demostrar.

Este teorema puede demostrarse de otro modo, dado que

$$GB^2 = BG \cdot GD + GB \cdot BD$$

equivale a $GA^2 + AB^2$, y el producto $BG \cdot GD = GA^2$.

Por tanto, el producto restante es $GB \cdot BD = AB^2$.

Que es lo que queríamos demostrar.

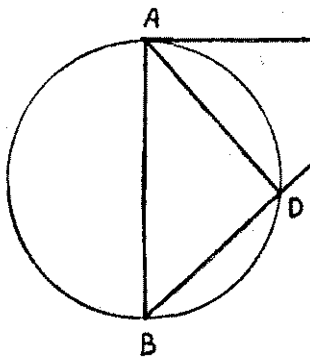

Fig. 11

Otro procedimiento de demostración para el mismo teorema: Dado que

$$GD \cdot BD = AD^2$$ [37]

sumando el cuadrado de DB, tendremos

$$AD^2 + DB^2 = AB^2 = GD \cdot BD + DB^2 = GB \cdot BD.$$

Y eso es lo que queríamos demostrar.

De idéntico modo: Si trazamos cuantas líneas queramos como EZB, el producto de toda la línea por el segmento que queda en el interior del círculo es igual al cuadrado del diámetro.

Los productos de cada una de las líneas por los respectivos segmentos interiores serán iguales (fig. 12).

[10] Si trazamos la tangente en uno de los extremos del diámetro y se toma en ella un punto cualquiera y desde él se traza una tangente a la

37. Teorema de la altura aplicado al triángulo BAG.

circunferencia, se tiene que el producto de uno de los dos segmentos de la tangente por el otro es igual al producto de la línea que pasa por el centro, por el segmento que va desde el centro de la circunferencia a la periferia.[38] El producto de toda la tangente por el segmento comprendido desde el punto de intersección al punto de tangencia es igual al producto de la línea que pasa por el centro por el segmento comprendido entre el punto de intersección y el centro del círculo.

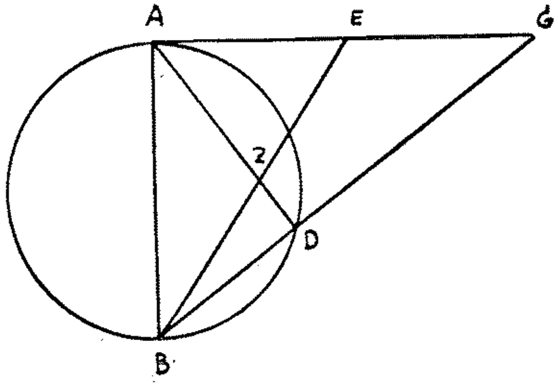

Fig. 12

Ejemplo: Supongamos un círculo con centro en A y diámetro BG. Tracemos desde el punto B una tangente BD. Tomemos sobre la línea BD un punto cualquiera D y tracemos desde él una tangente a la circunferencia en el punto E. Sea la línea DEZ que corta a la prolongación del diámetro de la circunferencia en el punto Z (fig. 13).

Digo que

$$DE \cdot EZ = ZB \cdot BA$$

y que

$$DZ \cdot ZE = BZ \cdot ZA.$$

Demostración: Unamos A con E. Se forman dos triángulos DBZ y ZEA, cuyo ángulo DBZ de uno de ellos es recto e igual al ZEA del otro. El ángulo DZB es común a ambos, luego son semejantes y por tanto

$\frac{DB}{BZ} = \frac{AE}{EZ}$ y como $DB = DE$ y $AE = BA$ es $\frac{DE}{BZ} = \frac{BA}{EZ}$

y por tanto $ZB \cdot BA = DE \cdot EZ.$

Digo que

$$DZ \cdot ZE = BZ \cdot ZA.$$

38. Se refiere al extremo del diámetro.

Demostración: Dado que los dos triángulos DBZ y ZEA son semejantes

$$\frac{DZ}{ZB} = \frac{AZ}{ZE}$$

y por tanto $$DZ \cdot ZE = BZ \cdot ZA.$$

Y eso es lo que queríamos demostrar.

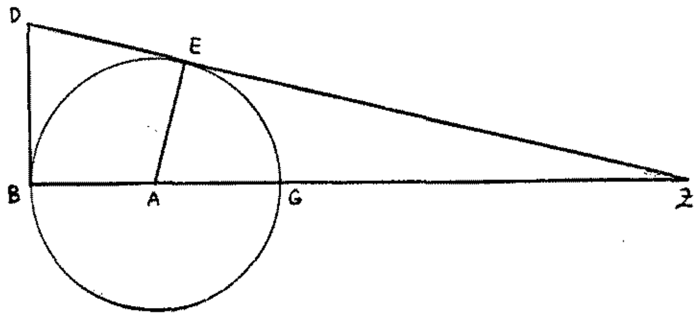

Fig. 13

[11] Si la tangente trazada por el extremo del diámetro no es tangente en el punto B, pero sí en el punto G, como en el caso de la recta GD, se tiene[39] (fig. 14).

$$DE \cdot EZ = AG \cdot GZ$$
$$EZ \cdot ZD = AZ \cdot GZ$$ [40]
$$EZ \cdot ZD = AG \cdot GZ$$

Demostración: Dado que los dos triángulos ZEA y ZGD son semejantes

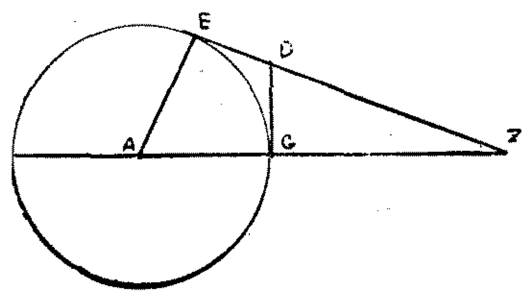

Fig. 14

$\frac{ZE}{EA} = \frac{ZG}{GD}$ y como $EA = AG$ y $GD = ED$, es $DE \cdot EZ = AG \cdot GZ$.

Digo que $$EZ \cdot ZD = AZ \cdot ZG.$$

39. En la figura 14 bis las letras H y G aparecen permutadas.
40. En el texto $DG \cdot GZ$.

Demostración: Dado que los dos triángulos son semejantes

$$\frac{EZ}{ZA} = \frac{GZ}{ZD}$$

y por tanto $$EZ \cdot ZD = ZA \cdot ZG.$$

Y eso es lo que queríamos demostrar.

Este teorema se puede demostrar de otro modo: Dibujemos sobre el triángulo rectángulo AZE una circunferencia ZT. Sea la línea AZ el

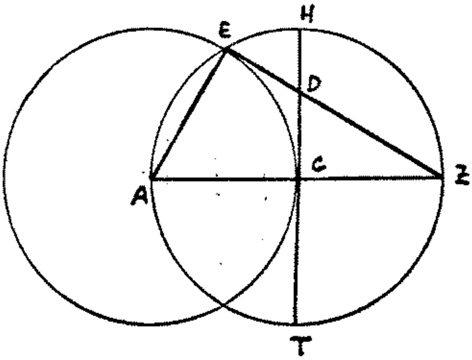

Fig. 15

diámetro. Tracemos la línea TGH. Dado que la línea TH queda dividida en dos partes iguales en el punto G y en dos partes desiguales en el punto D, tendremos (fig. 15).

$$TD \cdot DH + GD^2 = GH^2.$$

Pero $TD \cdot DH = ZD \cdot DE$ y $GD^2 = ED^2$

y $ZD \cdot DE + ED^2 = GH^2$ quiero decir $ZE \cdot ED = GH^2$

Pero $GH^2 = AG \cdot GZ$ y $AG \cdot GZ = ZE \cdot ED$

Y esto es lo que queríamos demostrar.

Por otra parte, dado que HD . DT, quiero decir ED . ZD, es menor que el cuadrado de HG, quiero decir que AG . GZ, y DZ^2 es mayor que ZG^2 del mismo modo que de HD^2, en consecuencia

$ED \cdot DZ + ZD^2$ o sea $EZ \cdot EG + GZ^2$ [41]

es igual a $AG \cdot GZ + ZG^2$ [42] o sea $AZ \cdot ZG$.

Y eso es lo que queríamos demostrar.[43]

41. En el texto falta el sumando GZ^2.
42. En el texto EG^2.
43. Operando obtenemos: $ED \cdot DZ + ZD^2 = DG \cdot (EZ - DG) + \bar{D}Z^2 = EZ \cdot DG - \overline{DG}^2 + \overline{DZ}^2 = EZ \cdot DG + \overline{GZ}^2 = AG \cdot GZ + \bar{Z}G^2 = AG \cdot GZ + GZ \cdot GZ = GZ \cdot (AG + GZ) = GZ \cdot AZ$.

[12] Si tenemos dos circunferencias tangentes interiores y se traza una línea que sea tangente a ambas, y las envuelve junto con la línea que pasa por el punto de tangencia y los centros de las dos circunferencias con la que forma un ángulo recto. Sobre la línea que pasa por los dos centros supongamos un punto cualquiera desde el cual se trazan sendas tangentes a cada círculo y cortan a la tangente primera. La razón entre el círculo mayor y el menor será la misma que el producto de los segmentos de tangente del círculo mayor a los de la tangente del círculo menor al cuadrado.

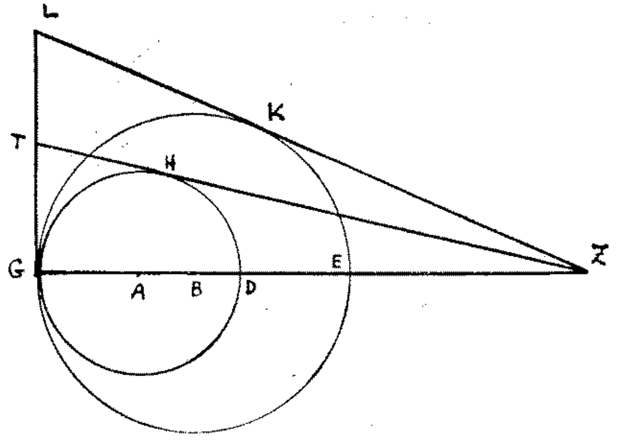

Fig. 16

Ejemplo: Imaginemos un círculo con centro en A, tangente interior a un círculo con centro en B en el punto G. A partir del punto de tangencia tracemos la línea que pasa por los dos centros, o sea $GDEZ$.[44] El diámetro del círculo A es la línea GD y el diámetro del círculo B es la línea GE. Tracemos desde el punto Z las dos líneas ZHT y ZKL tangentes a ambos círculos en los puntos H y K (fig. 16).

Digo que la razón

$$\frac{\text{círculo } A}{\text{círculo } B} = \left(\frac{ZH \cdot HT}{ZK \cdot KL}\right)^2$$

Demostración: Dado que

$$\frac{GA}{GB} = \frac{ZG \cdot GA}{ZG \cdot GB}$$

y que $\quad ZG \cdot GB = ZK \cdot KL \quad$ y $\quad ZG \cdot GA = ZH \cdot GT,$

conforme demostramos en el teorema anterior, tendremos:

$$\frac{GA}{GB} = \frac{ZH \cdot GT}{ZK \cdot KL}.$$

44. En la figura del texto en lugar de Z hay A.

Pero $\frac{GA}{GB} = \frac{2\ GA}{2\ GB}$ quiero decir como $\frac{GD}{GE}$.

Pero esta razón es $\frac{GD}{GE} = \frac{ZH \cdot HT}{ZK \cdot KL}$

y su cuadrado $\frac{GD^2}{GE^2}$. Y las razones de los cuadrados de los diámetros de los círculos, unos respecto de otros, es como las razones de los círculos, unos respecto de otros. Luego:

$$\frac{\text{círculo } A}{\text{círculo } B} = \frac{GD^2}{GE^2}.$$

Quiero decir como $\left(\frac{ZH \cdot HT}{ZK \cdot KL}\text{[45]}\right)^2$

Y esto es lo que queríamos demostrar.

[13] Cuando dos círculos que no se tocan tienen sus centros sobre una línea y desde sus centros se trazan dos líneas que se cortan y son tangentes al otro círculo, el producto de los dos segmentos de cada una de las líneas tangentes es igual al producto de los dos segmentos de la otra (fig. 17).

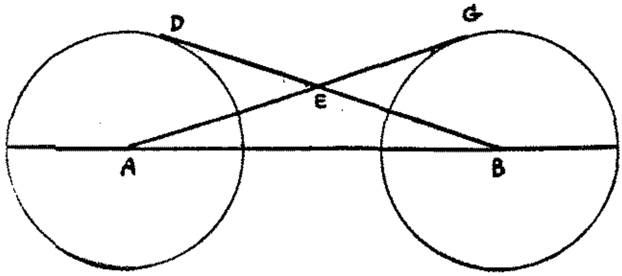

Fig. 17

Ejemplo: Supongamos dos círculos exteriores, no tangentes, cuyos centros estén en los puntos A y B situados sobre la misma línea AB. A partir de ambos centros A y B tracemos las dos líneas AG y BD tangentes a los respectivos círculos en los dos puntos D y G y que se cortan en el punto E.

Digo que: $AE \cdot EG = BE \cdot ED$.

Demostración: Unamos D con A y G con B. Dado que los dos triángulos ADE y BGE con sendos ángulos rectos son semejantes, tenemos:

$$\frac{EA}{ED} = \frac{BE}{EG} \quad \text{o sea} \quad AE \cdot EG = BE \cdot ED.$$

Y eso es lo que queríamos demostrar.

45. En el texto KD.

Este teorema puede demostrarse por otro procedimiento. Dado que cada uno de los dos ángulos ADB y AGB es recto y los dos triángulos están sobre la misma línea, la recta AB, ciertamente los dos triángulos ADB y AGB se inscriben en un semicírculo. Tracemos este semicírculo

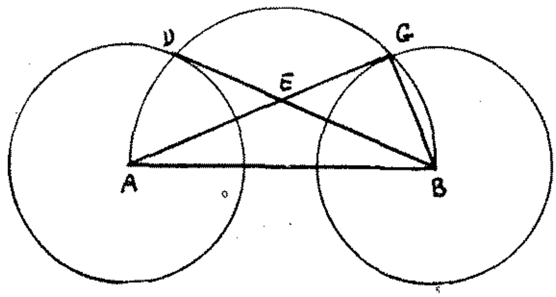

Fig. 18

$ADGB$ (fig. 18). Dado que las dos líneas AEG, BED se cortan en el círculo en el punto E, se tiene

$$AE \cdot EG = BE \cdot ED.$$

Y eso es lo que queríamos demostrar.

[14] Si dos rectas son tangentes a un mismo círculo y se traza una línea que pase por un punto de tangencia y se prolonga y sobre esa línea se toma un punto cualquiera y se traza desde ese punto una línea tangente al círculo y corta a una de las dos tangentes yendo a terminar en la otra, se tiene que la razón de la longitud total de la línea trazada, a su segmento externo hasta la tangente es como la razón que hay entre los dos segmentos que se cortan entre las dos tangentes a los cuales divide el punto de tangencia en un segmento mayor y otro menor (fig. 19).

Supongamos dos líneas AB y AG tangentes al círculo BG. Unamos B con G y prolonguemos la línea recta. Supongamos, sobre ella, un punto exterior D y desde este punto D tracemos una tangente a la circunferencia. Sea la línea $DEZH$ que será tangente en el punto Z.

Digo que:

$$\frac{HD}{DE} = \frac{HZ}{ZE}.$$

Demostración: No es lo mismo que las líneas sean paralelas o no. Supongamos en primer lugar que son paralelas. El ángulo BHD[46] será igual al GED y tendremos el triángulo GED [semejante al BHD y]

$$\frac{HD}{DE} = \frac{HB}{EG}$$

46. En el texto BGD.

Pero la línea HZ[47] es igual a HB, ya que ambas son tangentes a la circunferencia desde un mismo punto, el punto H. Y lo mismo ocurre con la línea EZ, que es igual a EG.[48] Luego:

$$\frac{HD}{DE} = \frac{HZ}{ZE}.$$

Si no son paralelas se cortarán en un punto A y trazaremos desde el punto E una línea paralela a la línea AB. Sea ET. Dado que las dos líneas

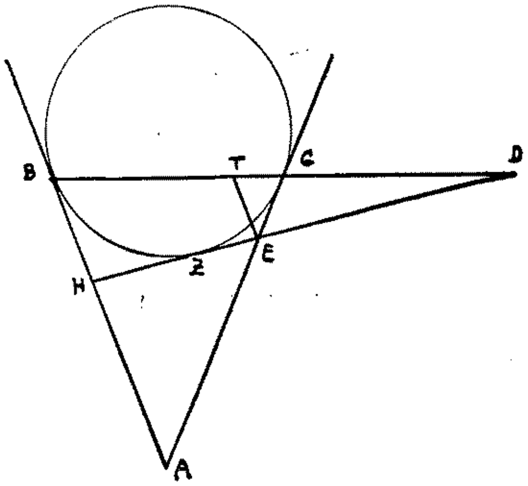

Fig. 19

AB y AG son tangentes a la circunferencia, son iguales y el ángulo AGB es igual al ángulo ABG. Pero el ángulo ETG es igual al ángulo EGT. El segmento ET es igual al segmento EG. Y dado que:

$$\frac{HD}{DE} = \frac{HB}{ET}$$

y los segmentos $HB = HZ$ y $EG = EZ$,

tendremos [49] $$\frac{HD}{DE} = \frac{HZ}{ZE}$$

que es lo que queríamos demostrar.

[15] Si tenemos una línea tangente al círculo en el extremo de uno de sus diámetros, y el diámetro se prolonga y sobre él se toma un punto cual-

47. En el texto GZ.
48. En el texto EH.
49. En el texto HT.

quiera exterior a la circunferencia, y desde este punto se traza otra tangente a la circunferencia, y se traza la línea que es perpendicular al diámetro, y se traza desde el punto de tangencia en la extremidad del diámetro, a la línea trazada una perpendicular, tendremos que la razón de toda la línea trazada es al segmento comprendido entre el punto dado y el punto de tangencia como la razón del segmento comprendido entre el punto de

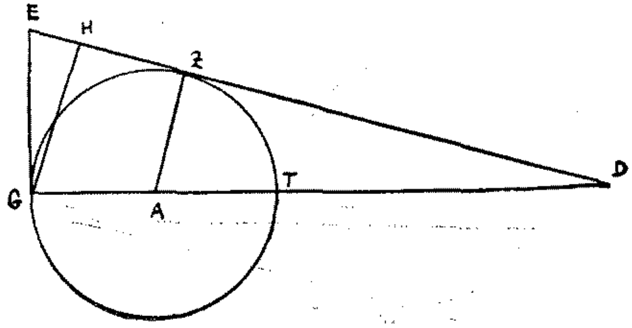

Fig. 20

tangencia y la línea perpendicular al diámetro es al segmento comprendido entre el punto de tangencia y el punto que se encuentra sobre la perpendicular (*fig. 20*).

Ejemplo: Supongamos un círculo con centro en A y sea su diámetro la línea *GAT*. Levantemos sobre el diámetro una perpendicular que sea tangente al círculo, o sea la línea *GE*. Prolonguemos la línea *GT* y en la parte [exterior] tomemos un punto cualquiera, sea *D*. Desde el punto *D* tracemos una tangente al círculo en el punto *Z*, o sea la recta *DE*. Desde el punto *G* levantemos una perpendicular a la línea *DE*. Sea la línea *GH*.

Digo que:

$$\frac{ED}{DZ} = \frac{EZ}{ZH}.$$

Demostración: Unamos *A* con *Z*. Dado que el ángulo *AZD* es recto y el ángulo *GHD* es recto, *GH* será paralelo a *AZ*. El triángulo *DEG* que tiene un ángulo recto es semejante al triángulo *DAZ* que tiene un ángulo recto. Luego:

$$\frac{DE}{EG} = \frac{DE}{EZ} = \frac{DA}{AZ}. \qquad AZ = AG.$$

Pero $\dfrac{DA}{AG} = \dfrac{DZ}{ZH}$ y $\dfrac{DE}{EZ} = \dfrac{DZ}{ZH}$

y si permutamos $\dfrac{ED}{DZ} = \dfrac{EZ}{ZH}.$

Y esto es lo que queríamos demostrar.

Si restamos queda manifiesto que:[50]

$$\frac{EZ}{ZD} = \frac{EH}{HZ}.$$

[16] Y de idéntico modo digo que $\frac{EZ}{ZD} = \frac{AT}{TD}$ (que sale del centro).

Demostración: Tracemos las dos líneas EA y ZT. Dado que $GE = EZ$ y que $GA = AZ$ y que la base es la misma para los dos triángulos,

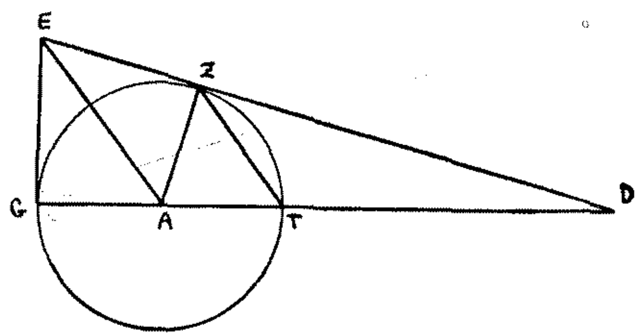

Fig. 21

el ángulo GAE será igual al ángulo ZAE y el ángulo GAZ será el doble del ángulo GAE y el ángulo GAZ será el doble del ángulo GTZ[51] ya que uno de ellos está construido sobre el centro y el otro está inscrito y una misma cuerda subtiende el arco. El ángulo GAE es igual al ángulo GTZ y la línea EA es paralela a la línea ZT (fig. 21). Luego:

$$\frac{EZ}{ZD} = \frac{AT}{TD}.$$

Y eso es lo que queríamos demostrar.

[17] Si la tangente[52] que se traza por uno de los extremos del diámetro no toca a la circunferencia en el punto G sino en el otro extremo del diámetro, como ocurre en la figura con la línea TK (fig. 22), digo que:

$$\frac{HZ}{ZD} = \frac{ZK}{KD}.$$

50. Restando antecedentes y consecuentes: $\frac{ED - DZ}{DZ} = \frac{EZ - ZH}{ZH}$ y de aquí se obtiene la igualdad del texto.
51. En el texto HTZ.
52. Entendemos tangente perpendicular al diámetro.

Demostración: Dado que el triángulo ZAD tiene un ángulo recto es semejante al triángulo TKD que también tiene un ángulo recto. Luego:

$$\frac{ZA}{AD} = \frac{HZ}{ZD} = \frac{KT}{KD}$$

ès decir como

$$\frac{KZ}{KD}.$$

Y eso es lo que queríamos demostrar.

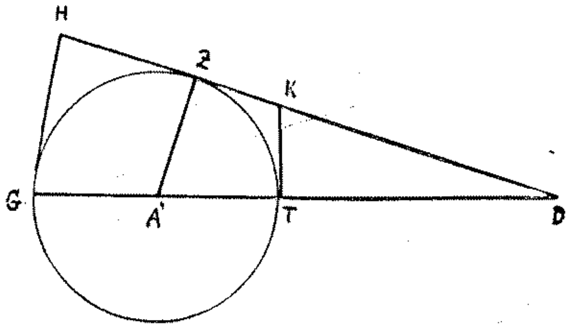

Fig. 22

[18] Cuando se prolonga el diámetro de una circunferencia y sobre él y en el exterior de ella se toma un punto cualquiera y se traza desde éste una tangente a la circunferencia y por el punto de tangencia se traza una perpendicular al diámetro, se tiene que la razón entre el segmento que queda exterior al círculo y el segmento total es como la razón que existe entre los dos segmentos del diámetro en los cuales divide la perpendicular, del menor respecto del mayor.

Supongamos un círculo con centro en A. Sea el diámetro BG. Prolonguémoslo y tomemos el punto exterior D. Desde D tracemos una línea tangente a la circunferencia en E, y desde el punto E tracemos una perpendicular a la línea BG (fig. 23). Sea EZ.

Digo que:

$$\frac{BD}{DG} = \frac{BZ}{ZG}.$$

Demostración: Unamos E con B y E con G. Se tiene:

$$\frac{BD}{DE} = \frac{DE}{DG}.$$

Los dos triángulos BDE y EDG son semejantes. Luego:

$$\frac{BD}{DE} = \frac{BE}{EG}.$$

Pero $$\frac{BD}{DG} = \left(\frac{BD}{DE}\right)^2$$

y la relación $$\left(\frac{BD}{DE}\right)^2 = \left(\frac{DE}{DG}\right)^2$$

y $$\frac{BZ}{ZG} = \left(\frac{EZ}{ZG}\right)^2.$$

Por consiguiente:

$$\frac{BD}{DG} = \frac{BZ}{ZG}.$$

Y eso es lo que queríamos demostrar.

Demostración de este teorema por otro procedimiento. Tracemos desde la línea BG dos líneas BH y GT que formen con ella un ángulo

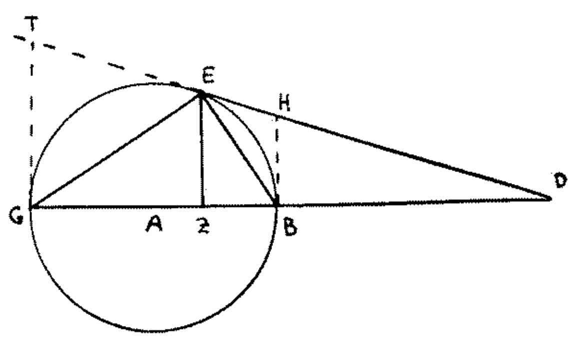

Fig. 23

recto y que alcance la línea HD. Las líneas BH, ZE y GT serán paralelas; dado que:

$$\frac{BD}{DG} = \frac{BH}{GT}[53] = \frac{HE}{ET}[54]$$

se tiene que $\frac{HE}{ET} = \frac{BZ}{ZG}$, luego $\frac{BD}{DG} = \frac{BZ}{ZG}$.

Que es lo que queríamos demostrar.

[19] Si se baja sobre una sección de circunferencia una línea quebrada que la corta subtendiendo dos arcos distintos y se traza desde el punto medio del arco una perpendicular al segmento mayor de la quebrada, esa perpendicular divide la línea quebrada en dos mitades.

53. En el texto BG.
54. En el texto GE.

Supongamos una sección de circunferencia con base AB. Bajemos por ella la línea quebrada AGB por el punto G. Sea la línea AG mayor que GB. Dividamos el arco AB de la circunferencia en dos mitades por el punto D y tracemos desde éste una perpendicular a la línea AG. Sea la línea DE.

Digo que la línea AGB[55] queda dividida en dos mitades por el punto E, quiero decir que la línea AE es igual a las dos líneas $EG + GB$ (fig. 24).

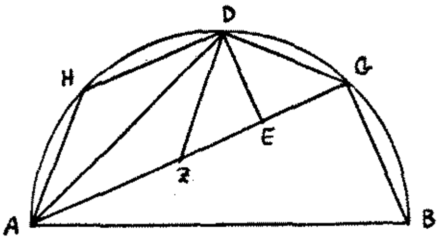

Fig. 24

Demostración: Tomemos sobre el arco mayor AD un arco igual a DG, menor, o sea el arco AH. Unamos A con H, H con D y A con D. Tomemos sobre el segmento mayor AE un valor igual al segmento EG, EZ. Unamos D con Z. Dado que la línea ED es una perpendicular común $DZ = DG = AH$, o sea que los tres segmentos serán iguales. Y dado que

$$\frac{\text{arco } AH}{\text{arco } AHD} = \frac{\widehat{ADH}}{\widehat{AGD}}$$ [56]

y que

$$\frac{\text{arco } HD}{\text{arco } AHD} = \frac{\widehat{HAD}}{\widehat{AGD}}.$$

La razón de los dos arcos AH y HD al arco AHD será la misma que los dos ángulos HAD y ADH respecto del ángulo AGD. Los dos arcos $AH + HD$ serán igual al arco AHD y los dos ángulos $HDA + DAH$ serán igual al ángulo AGD o sea al ángulo DZE. Pero el ángulo DZE es igual a los dos ángulos ZAD y ZDA y los dos ángulos HDA[57] y HAD por consiguiente son iguales a los dos ángulos ZAD y ZDA. El ángulo HDA[58] es igual al ángulo ZAD y el ángulo restante HAD es igual al ángulo ZDA restante. Pero dado que las dos líneas DZ y AH[59] son iguales, que la línea DA es

55. En el texto falta la letra B.
56. En el texto $\widehat{AHD}$.
57. En el texto HZA.
58. En el texto GDA.
59. En el texto DH.

común y que los dos ángulos son iguales, la base *AZ* será igual a la base *DH*. Pero la línea *DH* es igual a la línea *GB* y la línea *ZE* es igual a la línea *EG*. Luego la suma *AE* es, por consiguiente, igual a los segmentos *EG* y *GB*.

Y esto es lo que queríamos demostrar.

Demostración de este teorema por otro procedimiento.

Tracemos una figura similar a la anterior, pero completemos la circunferencia *AZBD*. Prolonguemos la línea *AG* y supongamos la línea *EH* igual a la línea *EA*. Tracemos las líneas *GD, DH, BD, AD* (fig. 25). Dado que el

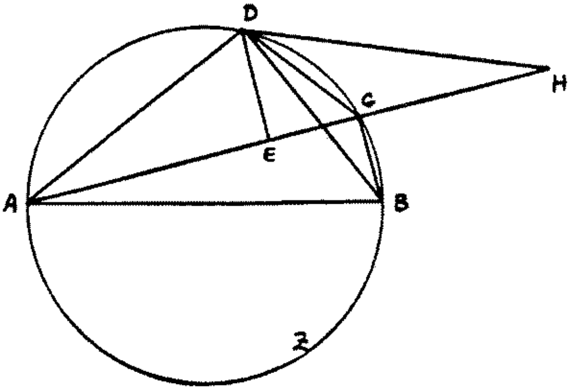

Fig. 25

arco *AD* es igual al arco *DGB* la cuerda *AD* será igual a la cuerda *DB*[60] y el segmento *DH* será igual al segmento *AD*. Pero el segmento *DH* es igual al segmento *DB* y el ángulo *DAG* es igual al ángulo *DBG*[61] ya que subtiende un mismo arco. El ángulo *DHE* es igual al ángulo *DAE*. El ángulo *DHE* será igual al ángulo *DBG*. E idénticamente el arco *DAZB* es igual a la totalidad del arco *DGBZA*. Pero el ángulo *DGB* está sobre el arco *DAZB* y los dos ángulos *DAG* y *ADG* subtiende ambos el arco *DGBZA*. Pero el ángulo *DAG* subtienden el arco *DG* y el ángulo *ADG* el arco *GBZA*. Luego los dos ángulos *DAG* + *ADG* son iguales al ángulo *DGB* y el ángulo *DGB* es igual a los dos ángulos *DAG* y *ADG*. El ángulo *DGH*[62] igual al ángulo *DGB*.[63] Así queda patente que el ángulo *DHG* es igual al ángulo *HDG* restante e igual al ángulo *GBD* restante. Y dado que la línea *DH*[64] es igual a la línea *DB* y la línea *DG* es común, los dos ángulos

60. En el texto *AB*.
61. En el texto *DLG*.
62. Hay un blanco en el manuscrito.
63. En el texto *DHB*.
64. En el texto *DG*.

son iguales. La línea *GH* es igual a *GB* y las dos líneas *EG* y *GB* son iguales a las líneas $EG + GH$, quiero decir a la línea *AE*.

Y eso es lo que queríamos demostrar.

Demostración de este teorema por otro procedimiento. Dejemos la figura tal y como está, y digamos: Dado que el arco *HDB* es menor que media circunferencia, el ángulo que subtiende, o sea *DGB* es obtuso, y que dado que el arco *DBA* es mayor de media circunferencia, el ángulo que subtiende, o sea *DGA* es agudo (*sic*). Y el ángulo *DGH* obtuso. Los dos ángulos *DGB* y *DGH* son obtusos y el ángulo *DHG* es igual al ángulo *DBG*[65] y la línea *DB* igual a la línea *DH*. La línea *DG* es común. Los dos triángulos *DGH* y *DGB* tiene un mismo ángulo, o sea el ángulo en *G* igual al ángulo del otro que es el ángulo en *B*. Los lados que forman los otros dos ángulos son proporcionales y los dos ángulos restantes *DGH* y *DGB* ambos son mayores de un recto, luego los ángulos restantes son iguales y la línea *HG* es igual a la línea *GB*. Y la línea total *EH*, quiero decir la línea *AE*, es igual a la línea $EG + GB$.

Y esto es lo que queríamos demostrar.

Fin del libro de Arquímedes sobre los círculos tangentes.

Loado sea el Dios único y sus bendiciones desciendan sobre nuestro Profeta Mahoma y su familia.

65. En el texto *DLG*. En la figura no figura ninguna *L*, lo cual hace suponer que el editor ha trucado el manuscrito.

LIBRO DE LOS TRIÁNGULOS

[1] Supongamos una semicircunferencia ABG y prolonguemos el diámetro BG por ambos extremos hasta los puntos D y H. Supongamos que los segmentos BH y GD son iguales. Desde los puntos H y D tracemos las tangentes a la semicircunferencia AG, o sea las rectas HZ y DJ. Unamos Z con J. Decimos que la recta ZJ es paralela a la recta HD (fig. 1).

Demostración: Busquemos el centro de la circunferencia ABG. Sea T. Unamos Z con T y T con J. Pero $HB = GD$ y BG es común; todo el segmento HG es igual a todo el segmento BD. Y $GH \cdot HB = HZ^2$, y $BD.\ DG = DJ^2$. El cuadrado de HZ es igual al cuadrado de DJ y $DJ = HZ$. Y dado que los segmentos JT y TD son iguales a los segmentos ZT y TH y la base HZ es igual a la base JD, por tanto, el ángulo ZTH será igual al ángulo JTD y el arco JG igual al arco ZB y la recta ZJ es paralela a la recta HD. Y esto es lo que queríamos demostrar.

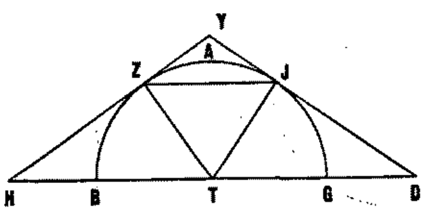

Fig. 1

Por este procedimiento se demuestra lo que decimos de un modo perfecto mediante esta operación: Decimos que dado que $GH \cdot HB = HZ^2$ y $BD \cdot DG = DJ^2$ y $BD \cdot DG = GH \cdot HB$, será $HZ^2 = DJ^2$ y $HZ = DJ$. Prolonguemos las dos rectas HZ y JD por sus extremos Z (y) J hasta que se encuentren en un punto Y. El segmento YJ será igual al segmento YZ ya que ambos salen del mismo punto, o sea el punto Y y son tangentes a la circunferencia ABG.

Así se demostrará que $HZ = DJ$, pues $\frac{HZ}{ZY} = \frac{DJ}{JY}$, y la recta JZ es paralela a la recta GB. Y esto es lo que queríamos demostrar.

[2] Supongamos una circunferencia ABG y sean las rectas BD y DG tangentes. Unamos B (con) G y prolonguemos la recta hasta el punto H.

Desde el punto H tracemos una tangente a la circunferencia ABG que cortará a la recta BD en el punto T, o sea la recta HZ (fig. 2). Decimos que

$$\frac{HT}{HZ} = \frac{TA}{ZA}$$

Demostración: Tracemos desde el punto Z una recta paralela a TB, o sea la recta ZJ. La razón $\frac{BD}{DG}$ es igual a la razón $\frac{JZ}{ZG}$.

Pero $BD = DG$ y $JZ = ZG$.

Dado que $\frac{TH}{HZ} = \frac{TB}{ZJ}$ y $ZJ = ZG$, será $\frac{TH}{HZ} = \frac{TB}{ZG}$.

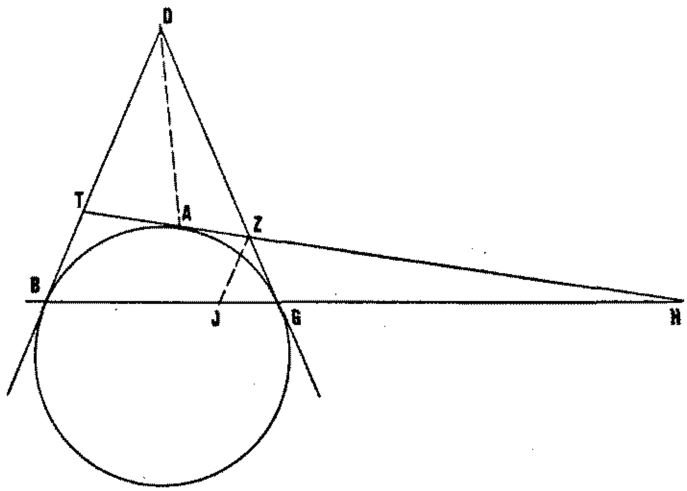

Fig. 2

Pero, $TB = TA$ ya que ambos son tangentes a la circunferencia y $ZG = ZA$. La razón $\frac{TH}{HZ}$ es igual a la razón $\frac{TA}{AZ}$.

Y esto es lo que queríamos demostrar.

[3] Supongamos la circunferencia ABG y sean las rectas DH y HG tangentes a la misma. Desde el punto H tracemos una secante cualquiera a la circunferencia y sea la recta HJB. Desde el punto D tracemos una recta (paralela) a la recta HB, y sea la recta DA. Unamos A y G. Esta recta cortará a BJ en el punto Z. Decimos que $BZ = ZJ$ (fig. 3).

Demostración: Tomemos el centro de la circunferencia T y unamos T con Z, con H, con D y con G. Dado que $TD = TG$ y el segmento TH es común (a los dos triángulos), los dos segmentos TG y TH serán iguales a los dos segmentos HT y TD y la base (HD) será igual a la base HG. El ángulo $\widehat{GTH} = \widehat{HTD}$ y $\widehat{DTG} = 2\,\widehat{GTH}$, y $\widehat{DTG} = 2\,\widehat{GAD}$, y $\widehat{DAG} = \widehat{GTH}$. Pero $\widehat{DAG} = \widehat{HZG}$ y $\widehat{HTG} = \widehat{HZG}$. Pero el cuadrilátero $HGZT$ está en

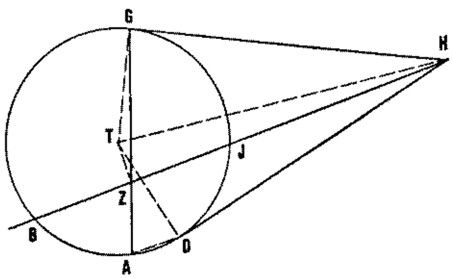

Fig. 3

una circunferencia [es inscriptible] y los dos ángulos HGT y HZT son iguales. Y el ángulo HGT es recto y el ángulo HZT es recto y la recta TZ es perpendicular a la recta JZ. Luego sale del punto T, que es el centro del círculo $ABGD$, una perpendicular a la recta JB y es TZ. Por consiguiente lo divide en dos mitades y la distancia BZ es igual a la distancia ZJ. Y esto es lo que queríamos demostrar.*[1]

[4] Supongamos un triángulo equilátero ABG. Tracemos una recta AD perpendicular a la recta BG [altura]. Elevemos al cuadrado BD y

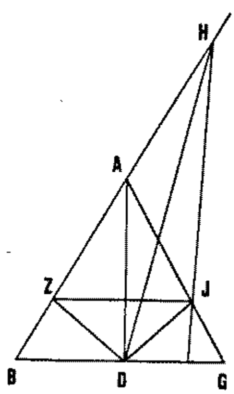

Fig. 4

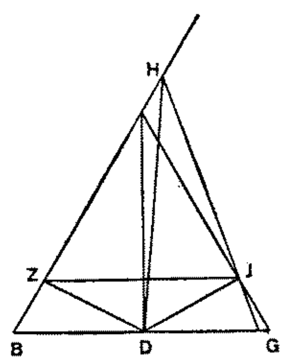

Fig. 4 bis

sea $BD^2 = BH \cdot BZ$. Y unamos D con Z. Desde el punto Z tracemos una recta paralela a BG. Será la recta ZJ. Unamos H con J. Digo que el ángulo HJG es el doble del ángulo AZD (figs. 4 y 4 bis).

*1. En la figura del texto impreso el segmento AD no está dibujado.

Demostración: Uniremos D (con) J y D (con) H. Dado que

$$HB \cdot BZ = BD^2,$$

será

$$\widehat{ZDB} = \widehat{ZHD}, \quad \text{y} \quad \widehat{ZDB} = \widehat{JZD}.$$

y (por tanto)

$$\widehat{ZHD} = \widehat{JZD},$$

Pero es $\widehat{JZD} = \widehat{ZJD}$ ya que el triángulo JZD es isósceles y el ángulo ZHD es igual al ángulo ZJD, luego el cuadrilátero $HZDJ$ está (inscrito) en una circunferencia. Tracemos una recta HJ en el punto T. El ángulo DJT será igual al ángulo HZD ya que es exterior al cuadrilátero $HZDJ$ y el ángulo HZD (sic) será igual al ángulo AJD. Luego $\widehat{AJT} = 2\ \widehat{AJD}$.

Pero $\widehat{AJT} = \widehat{HJG}$ y $\widehat{AJD} = \widehat{AZD}$ y (por tanto) $\widehat{HJG} = 2\ \widehat{AZD}$. Y eso es lo que queríamos demostrar.*2

[5] Supongamos la semicircunferencia $ABGD$ y unamos A (con) G y B (con) D. Unamos igualmente B (con) A y G (con) D y prolon-

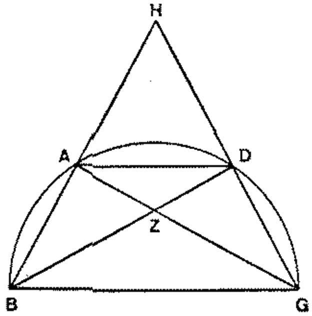

Fig. 5

guemos las rectas hasta que se corten en el punto H. Decimos que $BD \cdot DZ = H\ [DG] \cdot DH$ (fig. 5).

Demostración: Si $BD \cdot DZ = GD \cdot DH,$

es

$$\frac{BD}{DG} = \frac{HD}{DZ}.$$

Si unimos H (con) Z los triángulos BDG y HZD serán semejantes y el ángulo DBG será igual al ángulo DHZ. Si unimos D (con) A, el ángulo DBG será igual al ángulo GAD. Y el ángulo DAZ será igual al ángulo DHZ. Pero es necesario que el cuadrilátero $HADZ$ sea inscriptible en una cir-

*2. En el texto aparece la figura que hemos reproducido como fig. 4. Dicha figura no responde al enunciado del teorema. La acompañamos de la fig. 4 bis, construida correctamente.

cunferencia y es evidente que está inscrito en la circunferencia ya que cada uno de los dos ángulos HAZ y ZDH son rectos. Por tanto es necesario que $BD \cdot DZ = GD \cdot DH$. Y esto es lo que queríamos demostrar.

[6] Supongamos la semicircunferencia $ABGD$. Unanse A (con) G y B (con) D. Y sea $BD \cdot DY = DZ^2$ y $GA \cdot AY = AH^2$. Unamos H (con) B y Z (con) G. Decimos que $ZJ = JH$.

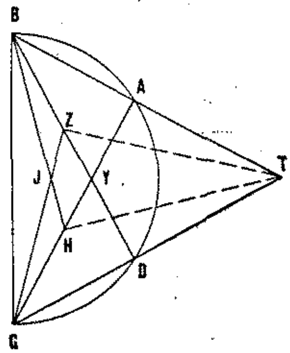

Fig. 6

Demostración de eso: Unamos B (con) A y G (con) D y prolonguémoslas según una recta hasta que se corten en el punto T. $BD \cdot DY = GD \cdot DT$ conforme se ha demostrado más arriba (fig. 6).

$$GA \cdot AY = BA \cdot AT$$

y

$$BA \cdot AT = AH^2$$

$$GD \cdot DT = DZ^2$$

y los dos ángulos TDZ y TAH son, cada uno de ellos, rectos. Si unimos Z (con) T y T (con) H, cada uno de los ángulos TZJ y THJ son rectos.

Dado que $AT \cdot TB = GT \cdot TD$

y que $BT \cdot TA = BA \cdot AT + AT^2$

y $GT \cdot TD = GD \cdot DT + TD^2$

y los producto $BA \cdot AT$ y $GD \cdot DT$ son iguales a los dos cuadrados (de) AH y (de) DZ, serán (la suma de) los dos cuadrados (de) TA y AH iguales a (la suma de) los dos cuadrados (de) TD y (de) DZ. Pero, $TA^2 + AH^2 = TH^2$ ya que el ángulo TAH es recto y $TZ^2 = TH^2$ y $TZ = TH$. Si unimos Z (con) H, el ángulo TZH será igual al ángulo THZ. Pero el ángulo TZJ, recto, es igual al ángulo THJ, recto. El ángulo JZH restante, es igual al ángulo restante ZHJ y el segmento JZ es igual al segmento JH. Y eso es lo que queríamos demostrar.

[7] Supongamos un triángulo equilátero sobre el cual están los puntos A, B, G, D. Tracemos las perpendiculares BD, GH, AZ. Decimos que las perpendiculares BD, GH y AZ son iguales (fig. 7).

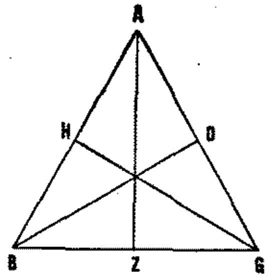

Fig. 7

Demostración de eso: Dado que el triángulo ABG es isósceles y que se ha trazado la perpendicular AZ, será $BZ = ZG$. También dado que el triángulo GBA es isósceles y se ha trazado la perpendicular GH, será $AH = HB$. Pero $GZ = AH$. Ya que tenemos que la recta AG es común (a los dos triángulos) y los dos segmentos AH y AG son iguales a los dos segmentos AG y GZ. El ángulo GAH es igual al ángulo AGZ y la base AZ es igual a la base GH. Análogamente por ser el triángulo BGA isósceles y haberse trazado en él la perpendicular BD, será $AD = DG$ y $HB = GD$. Pero tenemos que el lado BG es común, y los dos segmentos HB y BG serán iguales a los dos segmentos GD y BG y el ángulo BGD igual al ángulo GBH y la base BD igual a la base GH. Pero ya se había demostrado que $HG = AZ$ y $BD = AZ$. Por tanto las tres rectas [alturas] HG, AZ y DB son iguales. Y eso es lo que queríamos demostrar.

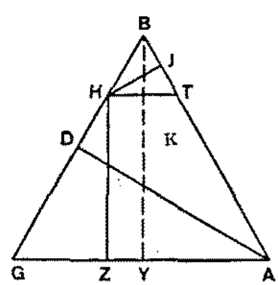

Fig. 8

[8] Supongamos un triángulo equilátero ABG y tracemos la perpendicular AD. Sobre la recta BD tomemos un punto cualquiera H y desde el punto H bajemos a las dos rectas GA y AB las perpendiculares ZH y HJ. Decimos que $AD = ZH + HJ$ (fig. 8).

Demostración de eso: Desde el punto H trazaremos una recta paralela a AG. Sea la recta HT. Por el punto B tracemos (una recta) que sea perpendicular a la recta AG. Sea la recta BY.

Puesto que en el triángulo equilátero ABG la recta AG — (es) paralela a TH — se forma el triángulo BTH, equilátero. Puesto que la recta BY es perpendicular a la recta AG y la recta AG es paralela a la recta TH, la recta BK será perpendicular a la recta TH y será $KY = HZ$, ya que la superficie $KHZY$ tiene los lados paralelos y todo $BY = HJ + HZ$. Pero $BY = AD$, y $AD = ZH + HJ$. Y esto es lo que queríamos demostrar.

[9] Supongamos un triángulo equilátero ABG. Tracemos la perpendicular AD. Tomemos en su interior un punto cualquiera H' y bajemos la perpendicular a los lados del triángulo $H'Z$, $H'J$, y $H'T$. Decimos que $AD = H'Z + H'J + H'T$ (fig. 9).

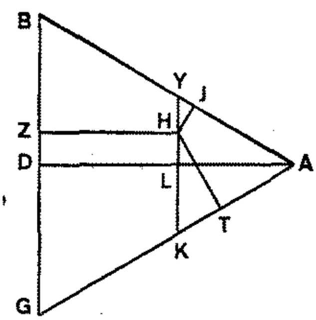

Fig. 9

Demostración: tracemos por el punto H' una recta paralela a la recta BG o sea la recta $YH'LK$. Pero como la recta YK es paralela a la recta BG [sic] y la recta $H'Z$ es paralela a DL, la superficie $H(Z)D(L)$ será un paralelogramo; dado que el triángulo ABG es equilátero y se han trazado AD y YK paralela a su base, que es la recta BG, será el triángulo AYK equilátero. Pero dado que el triángulo AYK es equilátero trazaremos la perpendicular AL y sobre la recta YK tomaremos un punto cualquiera. Sea el punto H'. Desde éste trazaremos perpendiculares a las rectas AY y AK. Serán las rectas $H'J$ y $H'T$. Será $AL = H'J + H'T$ con lo cual queda claro que $LD = H'Z$ y será $AD = H'Z + H'J + H'T$. Y eso es lo que queríamos demostrar.*3

[10] Supongamos un triángulo isósceles ABG. Por el punto A levantemos una perpendicular a la recta AB, sea AD. Desde la recta BG

*3. La letra T de la figura 9 en el texto impreso es H.

levantemos una perpendicular hasta el punto D. [Prolonguemos el lado BG hasta que corte a la perpendicular en D]. Dividamos el lado AB en dos mitades por el punto H y unamos H (con) Z (y con) D. Por el punto Z tracemos una paralela a la recta AB, o sea la recta ZJ. Digo que $DA \cdot AJ = AG^2$ (fig. 10).

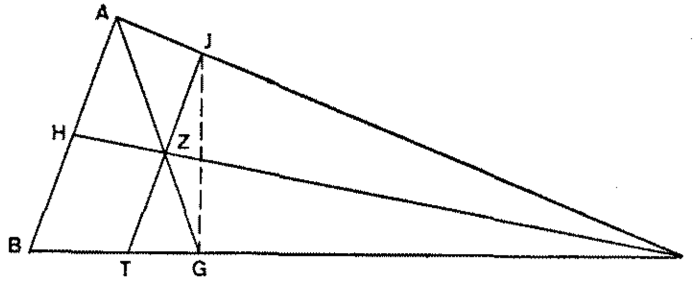

Fig. 10

Demostración: Prolonguemos ZJ hasta el punto T. El triángulo ABG es isósceles. Como la recta ZT es paralela a AB, será $ZT = ZG$. Y también: como $AH = HB$ y HB es paralela a JT, será $JZ = ZT$. Queda claro que $ZT = ZG$ y que $ZG = ZJ$ [sic]. Los tres segmentos ZT, ZJ y ZG son iguales. Si unimos G con J el ángulo JGT será recto y los dos ángulos restantes ZJG y JTG sumarán un recto. El ángulo ZTG será igual al ángulo ABG; el ángulo ABG con el ángulo ZJG equivaldrán a un recto. El ángulo ABG con el ángulo ADB, equivaldrán a un recto. Luego el ángulo ADB es igual al ángulo ZJG y el ángulo ZJG es igual al ángulo ZGJ y el ángulo ADB es igual al ángulo ZGJ. Por consiguiente $DA \cdot AJ = AG^2$. Y esto es lo que queríamos demostrar.

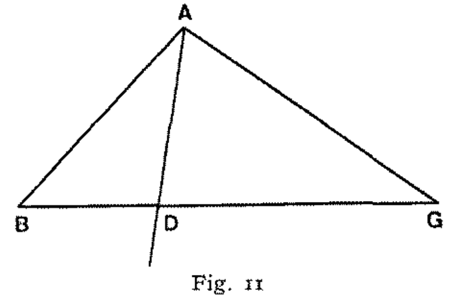

Fig. 11

[11] Supongamos un triángulo ABG y desde el punto A bajemos hasta BG una recta que forme con BA un ángulo igual al ángulo AGB, o sea la recta AD y el ángulo BAD igual al ángulo AGD (fig. 11). Digo que $GB \cdot BD = AB^2$.

Demostración: Dado que el ángulo AGB es igual al ángulo BAD

consideraremos el ángulo ABG común a los dos triángulos ABG y ABD. El ángulo restante BDA será igual al ángulo BAG. Los dos triángulos ABG y ABD tienen los ángulos iguales y por consiguiente, son semejantes. Luego $\frac{GB}{BA} = \frac{AB}{BD}$. Por consiguiente: $GB \cdot BD = AB^2$. Y eso es lo que queríamos demostrar.*4

[12] Supongamos un triángulo isósceles ABG y sean los lados iguales las rectas AB y BG. Desde el punto A tracemos una recta que sea perpendicular a BG, o sea la recta AD. Digo que

$$2\ DG \cdot GB = AG^2$$

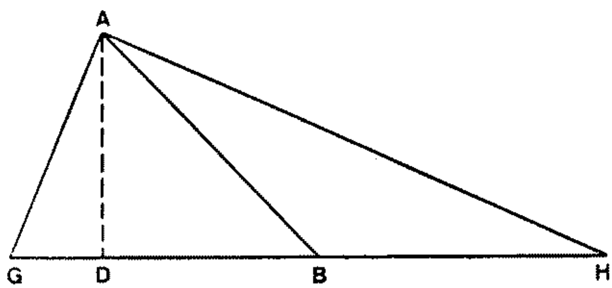

Fig. 12

Demostración: Desde el punto A bajemos una perpendicular a la recta AG. Sea la recta AH. Prolonguemos el lado BG hasta que encuentre la recta AH. Sea el punto de intersección H (figs. 12 y 12 bis). Dado que el

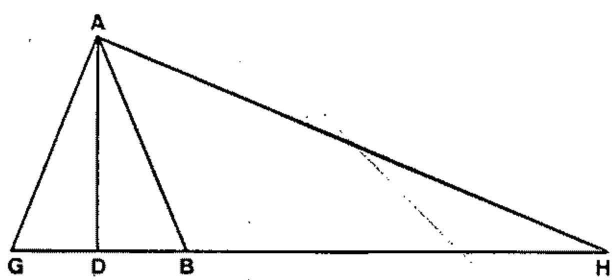

Fig. 12 bis

ángulo HAG es recto y $GB = AB$, los tres segmentos HB, BG, BA serán iguales, y $HG = 2\ GB$ y $HG \cdot GD = GA^2$ ya que el ángulo HAG es recto y la recta DA es perpendicular a la recta BG. Por consiguiente

$$2\ DG \cdot GB = AG^2$$

Y eso es lo que queríamos demostrar.

*4. La figura 11 no aparece en el texto.

[13] Supongamos un triángulo $ABGD$ y bajemos desde el punto A hasta DG la perpendicular AD. Digo que el exceso del cuadrado BD res-

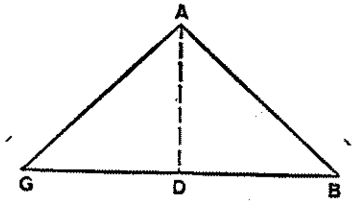

Fig. 13

pecto del cuadrado DG es igual al del cuadrado de BA respecto del cuadrado de AG (fig. 13).

Demostración: Dado que si se añade a $BD^2 + DG^2$ el cuadrado de AD[1], eso será igual a

$$BD^2 + DA^2 + AD^2 + DG^2,$$

y $$BD^2 + AD^2 = AB^2$$

y $$AD^2 + DG^2 = AG^2.$$

Por consiguiente el exceso[2] del cuadrado BD al cuadrado DG será como la diferencia del cuadrado BA al cuadrado AG. [$BD^2 - DG^2 = AB^2 - AG^2$]. Y eso es lo que queríamos demostrar.

[14] Supongamos un triángulo rectángulo isósceles ABG. Sea el ángulo recto A. Dividamos BG en dos mitades por el punto D y unamos A (con) D. Digo que los segmentos AD, BD y DG son iguales (fig. 14).

Demostración: Desde el punto D tracemos una recta paralela a AB,

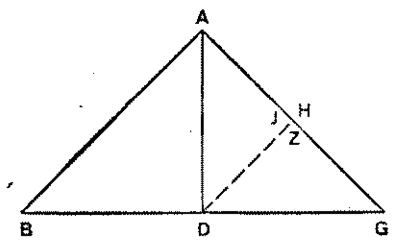

Fig. 14

o sea DH. Dado que $BD = DG$ y la recta DH es paralela a la recta AB, será $AH = HG$ y el ángulo BAG es por hipótesis recto y el ángulo J que le sigue [conjugado] es recto e igual ocurre con el ángulo Z. Pero dado que

1. Entendemos que hay que sumar AD^2 dos veces.
2. Texto zāda ʿalà.

$AH = HG$ y la recta HD es común y el ángulo J es igual al ángulo Z, la base AD será igual a la base DG. Pero $DG = DB$ y los tres segmentos AD, BD [sic] y DG serán iguales. Y eso es lo que queríamos demostrar.

[15] Supongamos un triángulo isósceles ABG y desde el punto A bajemos a la recta BG una recta cualquiera AD. Digo que

$$BD \cdot DG + DA^2 = AG^2.$$

Demostración: Bajemos desde el punto A una perpendicular a la recta BG sea AH [sic] (figs. 15 y 15 bis). Dado que el segmento BG queda dividido en dos mitades por el punto H y en dos partes desiguales por el punto D, será

$$BD \cdot DG + HD^2 = HG^2.$$

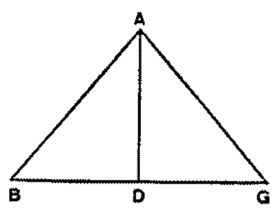

Fig. 15

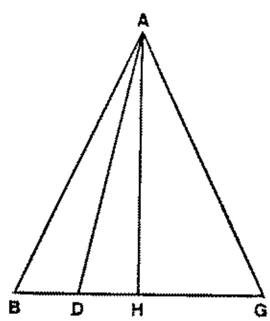

Fig. 15 bis

Hagamos al cuadrado AH común. El producto $BD \cdot DG$ más (la suma de) los dos cuadrados de AH y HD será igual a (la suma de) los dos cuadrados de AH y HG. Pero $AH^2 + HD^2 = AD^2$ ya que el ángulo AHD es recto y $AH^2 + HG^2 = AG^2$ ya que el ángulo AHG es recto. Por consiguiente

$$BD \cdot DG + DA^2 = AG^2.$$

Y eso es lo que queríamos demostrar.*5

[16] Supongamos un triángulo isósceles ABG y desde el punto A bajemos dos rectas AD y AH. Sea la razón del producto de BD por DG

*5. En el texto la figura 15 aparece incompleta. Hemos añadido la 15 (bis) dibujada de acuerdo con el enunciado del teorema correspondiente.

El que en el texto impreso aparezcan veinte figuras en lugar de diecinueve que publicamos nosotros es debido a que el autor utiliza dos figuras para demostrar el teorema I y otras dos para el teorema III, que refundimos aquí en una, para cada uno, y, por otra parte, no aparece la figura que hemos designado nosotros por 11.

al cuadrado de DA igual a la razón del producto de GH por HB al cuadrado de HA. Digo que el segmento DA es igual al segmento AH (fig. 16).

Demostración: Dado que

$$\frac{BD \cdot DG}{DA^2} = \frac{GH \cdot HB}{HA^2},$$

si las componemos

$$\frac{BD \cdot DG + DA^2}{DA^2} = \frac{GH \cdot HB + HA^2}{AH^2}.$$

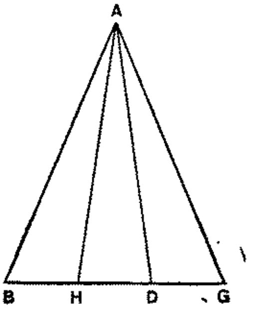

Fig. 16

Pero $$BD \cdot DG + DA^2 = AB^2$$
y $$GH \cdot HB + HA^2 = AG^2.$$
Luego: $$\frac{GA^2}{AH^2} = \frac{BA^2}{AD^2}.$$ [3]

Pero los dos antecedentes son iguales y los dos consecuentes serán, pues, iguales y el segmento DA será igual al segmento AH.

Y eso es lo que queríamos demostrar.

[17] Supongamos un triángulo ABG y dividamos el ángulo A en dos mitades mediante la recta AD. Digo que la razón de la suma de los lados BA y AG al segmento GB es como AB a BD (fig. 17).

Demostración: Dado que el ángulo en A del triángulo ABG queda dividido en dos mitades por la recta AD, será

$$\frac{BA}{AG} = \frac{BD}{DG}.$$

Si permutamos será

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AG}{GD}$$

3. En el texto los términos AH y AD aparecen invertidos.

y la razón del todo al todo será como la razón de una parte a otra

Pero $$\frac{AB + AG}{BG} = \frac{AB}{BD}.$$

Y eso es lo que queríamos demostrar.

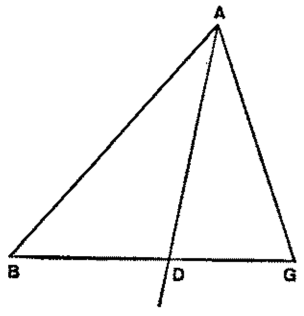

Fig. 17

[18] Supongamos un triángulo *ABG* y prolonguemos los lados *GA* y *BA* hasta los puntos *D* y *H*. Unamos *D* (con) *G*, *H* (con) *B*. Desde el punto *D* tracemos una paralela a *HB*, o sea *DJ*. Desde el punto *H* tracemos una paralela a *DG*, o sea la recta *HZ*. Unamos *Z* (con) *J*. Digo que la recta *ZJ* es paralela a *BG* (fig. 18).

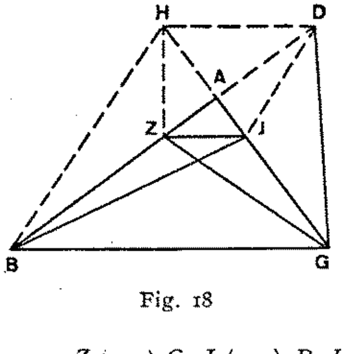

Fig. 18

Demostración: Unamos *Z* (con) *G*, *J* (con) *B*, *H* (con) *D*. El triángulo *DHG* es igual al triángulo *DZG* ya que ambos tienen la misma base *DG* y tienen los lados paralelos[4] que son *DG* y *HZ* y se tiene el triángulo *DAG* común. Luego el triángulo restante *DAH* será igual al triángulo restante *GAZ* y el triángulo *DHB* será igual al triángulo *JHB* ya que ambos tienen

4. Tienen los vértices opuestos sobre una paralela a la base. Como dice después: están entre dos rectas paralelas que son *DG* y *HZ*.

la misma base, o sea la recta *HB* y están sobre dos rectas paralelas que son *HB* y *DJ* y se tiene el triángulo *HAB* común. Luego el *DAH* restante será igual al triángulo restante *ABJ*. Pero ya se ha demostrado que el triángulo *DAH* es igual al triángulo *GAZ*. Luego el triángulo *ABJ* es igual al triángulo *AZG* y se tiene que el triángulo *AZJ* es común. El triángulo restante *BZJ* será igual al triángulo *JZG* pues ambos tienen la misma base, o sea la recta *ZJ* y ambos deben estar en dos líneas paralelas, luego la recta *ZJ* es paralela a *BG*. Y eso es lo que queríamos demostrar.

[19] Supongamos una recta *AB* paralela a la recta *DG* y la recta *BD* paralela a la recta *AG* y sea cada uno de los dos ángulos *BAG* y *BDG* rectos. Digo que el ángulo *ABD* es igual al ángulo *AGD* (fig. 19).

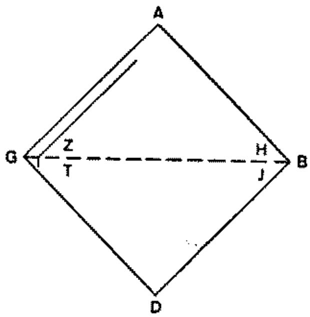

Fig. 19

Demostración: Unamos *B* con *G*; dado que el ángulo *A* es recto los dos ángulos en *H* y *Z* equivaldrán a un recto. Idénticamente dado que el ángulo en *D* es recto los dos ángulos en *J* y *T* equivaldrán a un recto. Luego los ángulos en *H* y *Z* suman un recto y los dos ángulos en *H* y *Z* serán iguales a los dos ángulos en *J* y *T* y la suma de *H* y *J* será igual a la suma de *Z* y *T*. Y eso es lo que queríamos demostrar.

Se ha terminado el libro de Arquímedes sobre los «Principios de Geometría». Contiene veinte figuras.

Los loores sean dados a Dios y sus bendiciones a nuestro Profeta, Mahoma, y a su familia.