ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 33.1 (2015): 9-27
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1332
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría

Pre-service primary teachers' ways of discourse and configural reasoning in solving geometrical problems

Francisco Clemente, Salvador Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
fclemcis@gmail.com, sllinares@ua.es

RESUMEN • Este trabajo tiene como objetivo estudiar la relación entre las formas del discurso generado por los estudiantes para maestro al resolver problemas de geometría de probar y el razonamiento configural. Analizamos las respuestas de 97 estudiantes para maestro a dos problemas de probar para determinar cómo identificaban y relacionaban propiedades geométricas para deducir nuevos hechos y propiedades de las figuras. Los resultados muestran tres formas del discurso generado por los estudiantes para maestro para comunicar su resolución: gráfico, texto y una mezcla de los dos; y que las formas del discurso generado no influyen en el truncamiento del razonamiento configural que desencadena los procesos deductivos.

PALABRAS CLAVE: conocimiento de geometría; concepto configural; razonamiento configural; aprehensión discursiva y operativa.

ABSTRACT • This paper reports of relationships between the pre-service primary teachers' ways of discourse when solving proof geometrical problems and the figural reasoning. The answers of 97 pre-service primary teachers to two proof geometrical problems were analyzed in order to determine how preservice primary teachers recognized and relationed the geometrical facts and definitions in order to infer new information about the figure. Findings indicate that pre-service primary teachers generated three different ways of discourse: Graphical, Textual and a mix of both. And that these ways of discourse don't influence in the truncation of configural reasoning in order to generate deductive processes.

KEYWORDS: knowledge of Geometry; configural concept; configural reasoning; discursive and operative apprehensions.

Fecha de recepción: octubre 2013 • Aceptado: septiembre 2014

Clemente, F., Llinares, S., (2015) Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.1, pp. 9-27

INTRODUCCIÓN

El conocimiento de geometría que debe tener un maestro es un tema que preocupa a los educadores matemáticos desde hace algún tiempo, al ser una variable que determina la manera en la que pueden apoyar el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico de los estudiantes (Chinnappan y Lawson, 2005; Stylianides y Ball, 2008; Stylianides, Stylianides y Shilling-Traina, 2013; Nason, Chalmers y Yeh, 2012; Steele, 2013). Un aspecto del conocimiento de la geometría por parte del maestro está relacionado con el desarrollo de la visualización (Battista, 2007, 2008; Brown y Weatley, 1997; Presmeg, 2006) y los procesos de exploración e indagación vinculados a esta, que pueden favorecer el que los estudiantes establezcan relaciones entre las definiciones y las propiedades geométricas (Clemente y Llinares, 2013; Hanna y Sidoli, 2007). Por lo que la relación entre lo visual y el sistema lógico-deductivo es un primer paso para que los estudiantes puedan establecer relaciones entre las definiciones y propiedades geométricas (Hanna, 1998; Hershkowitz, 1990). La manera en la que los estudiantes pueden identificar elementos en una configuración geométrica y asociarlos a hechos geométricos conocidos, o la manera en la que su conocimiento previo de geometría les ayuda a identificar elementos relevantes en una configuración para resolver un problema pueden estar mediadas por sus preferencias cognitivas (Kruteski, 1976), entendidas estas como el modo en que los estudiantes suelen procesar la información (Pitta-Pantazi, Christou, 2009; Mayer y Massa, 2003). Estas preferencias pueden manifestarse en el discurso que los estudiantes generan cuando tienen que comunicar la resolución de un problema (Robotti, 2012; Chen y Herbst, 2013). El texto escrito y las representaciones de las configuraciones como componentes de sistemas semióticos pueden entenderse como instrumentos para la resolución y comunicación de los problemas de probar y, por tanto, son susceptibles de aportar información sobre las características del razonamiento geométrico de los estudiantes (Herbst, 2004).

Desde la perspectiva del conocimiento de la geometría por parte de los estudiantes para maestros y en el contexto de la resolución de problemas de probar, las formas del discurso plantean cuestiones relativas a cómo los estudiantes usan las definiciones y propiedades geométricas identificadas en las figuras para generar cadenas lógicas de relaciones entre los hechos geométricos. En particular, sobre la forma que adopta el discurso escrito de los estudiantes para maestro cuando dan cuenta de cómo infieren propiedades a partir de los hechos geométricos identificados en la configuración o dados como datos del problema. La respuesta a esta cuestión puede aportar información sobre la relación entre lo visual y lo discursivo para generar un proceso deductivo en la resolución de problemas de probar en geometría.

MARCO TEÓRICO

En la investigación presentada se adopta el significado de concepto figural de Fischbein (1993) y la perspectiva de Duval (1995, 1998, 1999) en relación con el aprendizaje de la geometría. En particular, el papel que desempeñan los procesos de visualización en el reconocimiento de propiedades y relaciones en las figuras geométricas y en los procesos de justificación. Usamos el término *figura* siguiendo a Mesquita (1998) para indicar la representación externa e icónica de un concepto o situación geométrica considerado un sistema semiótico específico o registro (Duval, 1995). En geometría, el registro figurativo se vincula al sistema visual de percepción (Presmeg, 2006) y Mesquita (1998) indica que «la representación externa de un problema geométrico, *per se*, no permite resolver el problema, pero puede contribuir a la definición de una estructura del problema para facilitar su tratamiento» (p. 184).

En este sentido, Duval (1995) y Fischbein (1993) subrayan el papel heurístico de las figuras en el aprendizaje y en el desarrollo de los procesos de visualizar, justificar y construir en los contextos geométricos. Fischbein (1993) mantiene que las figuras geométricas poseen al mismo tiempo aspectos figurales y conceptuales. En los problemas de probar es posible usar simultáneamente estos aspectos, ya que las propiedades de las figuras geométricas (representaciones) proceden de las definiciones y relaciones geométricas usadas en su construcción. Fischbein indica que una figura geométrica, por ejemplo un trapecio isósceles dibujado en un folio, es una figura controlada por la definición de trapecio isósceles y las propiedades geométricas derivadas de poseer dos lados paralelos y dos lados no paralelos congruentes. Esta doble naturaleza de la figura geométrica define una nueva entidad mental que Fischbein llamó «concepto figural». La idea del concepto figural resalta el hecho según el cual imponer relaciones en los dibujos no depende del propio dibujo, sino de las definiciones y los teoremas previamente conocidos. Además, Fischbein indica que inferir información adicional sobre la configuración no procede de considerar de manera separada la figura y las relaciones lógicas entre los hechos geométricos en un proceso deductivo, sino de un único proceso en el que la figura se «ve de otra manera», lo que permite revelar relaciones lógicas. Fischbein caracteriza este proceso indicando que la figura no es una imagen ordinaria, sino una estructura controlada lógicamente (Fischbein, 1993). En este sentido, la fusión entre el concepto y la figura para desarrollar el razonamiento geométrico es un objetivo de la enseñanza y puede ser considerado una característica clave del conocimiento de geometría para el maestro.

Para considerar cómo los conceptos figurales son controlados y manipulados mediante las relaciones entre definiciones y teoremas previamente conocidos y comprender las operaciones lógico-matemáticas de manipulación de las figuras geométricas (imágenes controladas mediante los correspondientes conceptos), Duval introduce las nociones de aprehensión discursiva y operativa. Estos procesos cognitivos permiten estudiar cómo los conceptos y propiedades geométricas se asocian a la figura (y viceversa). Duval (1995) caracteriza la aprehensión operativa como la modificación de una figura para considerar subconfiguraciones. Esto se puede hacer añadiendo o quitando nuevos elementos geométricos, manipulando las diferentes partes de una configuración geométrica como un puzle para fijar la atención sobre subconfiguraciones particulares o, simplemente, fijando la atención sobre una parte específica de la configuración. Esta aprehensión se manifiesta, por ejemplo, cuando un estudiante es capaz de identificar en una configuración dos rectas que se cruzan para considerarlas como una representación de ángulos opuestos por el vértice. Duval (1995) denomina aprehensión discursiva al reconocimiento de propiedades o relaciones en las configuraciones, o a la asociación de configuraciones o subconfiguraciones con afirmaciones matemáticas. Para Duval, la interacción entre estos dos procesos cognitivos (la aprehensión operativa y la discursiva) puede ayudarnos a comprender cómo las relaciones entre las propiedades geométricas gobiernan la manipulación de las figuras en la resolución de problemas de probar en geometría.

El foco de atención sobre la coordinación de las aprehensiones operativa y discursiva en situaciones de resolución de problemas (Prior y Torregrosa, 2013; Torregrosa y Quesada, 2007) ha permitido identificar algunas características de cómo funciona la relación entre las figuras, los hechos geométricos y la generación de relaciones lógicas entre ellos. Torregrosa y Quesada han denominado a este proceso «razonamiento configural» para subrayar la relación interactiva entre la identificación de elementos en una configuración geométrica y su vinculación con algún hecho geométrico, que el estudiante puede usar para resolver un problema planteado. El razonamiento configural (Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010) puede desembocar bien en un «truncamiento» (la coordinación proporciona la «idea» para resolver deductivamente el problema) y permite generar un proceso deductivo, o bien en un «bucle» (situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución). El término «truncamiento» se usa para dar cuenta del momento en el que los resolutores dejan el razonamiento visual al generarse la necesidad lógica de la argumentación (Prusack, Hershkowitz y Schwarz, 2012). Durante este proceso, el estudiante manipula conceptos figurales, es decir, imágenes intrínsecamente controladas por los conceptos, pero también es posible que los hechos y propiedades geométricas conocidos por el estudiante guíen de alguna manera el proceso de identificación de subconfiguraciones relevantes. Únicamente cuando las figuras son intrínsecamente controladas por las condiciones conceptuales se logra la resolución de un problema al generarse un «truncamiento» en el razonamiento configural que permite generar una cadena lógica de proposiciones y hechos geométricos. En este proceso, la identificación en la configuración inicial de elementos que puedan asociarse a algún hecho o propiedad geométrica (interacción entre las aprehensiones operativas y discursivas) puede ser condición necesaria para desencadenar el razonamiento configural, pero no ser una condición suficiente para generar el truncamiento.

En un contexto de resolver por escrito un problema, los procesos cognitivos descritos pueden llegar a evidenciarse a través del discurso escrito de los estudiantes para maestro. El texto producido puede reflejar sus estilos cognitivos, ya que algunas personas razonan mejor con palabras y otras razonan mejor con figuras (Mayer y Massa, 2003). Así, la interacción entre las representaciones de las configuraciones y el discurso cuando se están resolviendo problemas de probar en geometría aporta información sobre el razonamiento geométrico de los estudiantes, ya que tanto el discurso escrito como las expresiones verbales o gestos pueden considerarse recursos semióticos usados por los estudiantes cuando se implican en la resolución del problema y en comunicar dicha resolución (Chen y Herbst, 2013; Robotti, 2012).

Teniendo en cuenta estas referencias previas, el objetivo de esta investigación es estudiar la relación que puede existir entre la forma del discurso escrito generado por los estudiantes para maestro al resolver problemas de geometría de probar y las características del razonamiento configural generado.

MÉTODO

Participantes

En el estudio participaron 97 estudiantes para maestro que habían seguido un curso de geometría organizado considerando los procesos de visualización, construcción y prueba (Duval, 1999). El objetivo del curso es que los estudiantes para maestro desarrollen la habilidad de reconocer diferentes propiedades geométricas mediante aprehensiones discursivas y operativas a través de múltiples conceptos geométricos del currículo de educación primaria (Duval, 2007), y desarrollen el razonamiento configural (Torregrosa *et al.*, 2007, 2010). Algunos de los contenidos en esta asignatura eran las propiedades, características y relaciones de las figuras geométricas (polígonos, triángulos, rectángulos y sus propiedades incluyendo las propiedades de los triángulos congruentes). Una parte de este curso consistía en resolver actividades de visualización, tareas de construcción geométrica y resolución de problemas geométricos de probar.

Los problemas

Al finalizar el curso los estudiantes para maestro resolvieron un cuestionario que incluía dos problemas de probar (P2 y P3) como parte de la evaluación del curso (figura 1). El objetivo de estos dos problemas era determinar cómo los estudiantes reconocían y relacionaban diferentes propiedades geométricas para deducir nuevos hechos y propiedades de las figuras. La resolución implicaba reconocer e identificar en las configuraciones geométricas propiedades y definiciones mediante aprehensiones operativas y discursivas, crear diferentes organizaciones posibles de estas proposiciones (resultados geométricos), para inferir nueva información sobre la configuración inicial mediante procesos de deducción lógica (Duval, 2007), y construir una prueba. Los conocimientos geométricos que podían usarse en la resolución de cada problema se recogen en la tabla 1.

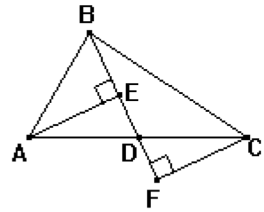
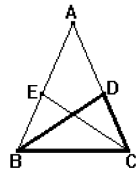
P2	BD es la mediana del triángulo ABC AE es perpendicular a BF CF perpendicular a BF Probar que AE es congruente a CF	
P3	Demostrar que en un triángulo isósceles las bisectrices de los ángulos de la base son congruentes	

Fig. 1. Problemas del cuestionario.

Tabla 1.
Análisis del contenido geométrico susceptible de ser usado en la resolución de los problemas

P2	P3
Asociación de elementos geométricos a la configuración: – Definición de mediana de un triángulo. – Ángulos opuestos por el vértice son iguales. – Si una secante corta a dos rectas paralelas, forma con ellas ángulos alternos-internos iguales (alternos-externos iguales). – Si una recta secante a un haz de 2 rectas forma ángulos alternos-internos/alternos-externos iguales, entonces el haz de rectas está formado por rectas paralelas. Elementos geométricos susceptibles de ser usados para inferir información adicional: – Si dos rectas forman ángulos rectos con otra tercera son paralelas. – La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º (conocidos dos ángulos de un triángulo, conocemos el tercero). – Criterios de congruencia de triángulos: A-L-A, L-A-L, L-L-L	Asociación de elementos geométricos a la configuración: – Definición de bisectriz de un ángulo. – Definición de triángulo isósceles: un triángulo es isósceles si tiene dos lados iguales (si un triángulo tiene dos ángulos iguales también son iguales los lados opuestos, por tanto es un isósceles). Elementos geométricos susceptibles de ser usados para inferir información adicional: – La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º (conocidos dos ángulos de un triángulo, conocemos el tercero). – Criterios de congruencia de triángulos: A-L-A, L-A-L, L-L-L

En cada una de las figuras iniciales en los dos problemas se pueden identificar varias configuraciones que pueden favorecer la generación de ideas claves para una solución (Mesquita, 1998). Los problemas fueron diseñados considerando la existencia de al menos una configuración relevante (figura 2), y fueron elegidos pensando en que las figuras representan un doble papel en el proceso de resolución. Por una parte, un papel descriptivo, ya que su función es proporcionar un contexto para la aprehensión de las propiedades mencionadas en el enunciado del problema, pero no tiene por qué sugerir un tratamiento específico (Duval, 1999). Es decir, la figura y el enunciado ayudan a representar la situación geométrica que se plantea en cada caso en general. Por otra parte, un papel heurístico, ya que la posibilidad de identificar alguna configuración relevante puede depender de la conducta individual de cada estudiante.

Las subconfiguraciones en las representaciones de los dos problemas tienen características heurísticas diferentes. La subconfiguración aP2 en el problema P2 y la subconfiguración cP3 en el problema

P3 podían ser consideradas parte de la configuración inicial. Mientras que las subconfiguraciones aP3 y bP3 en el problema P3 son subconfiguraciones que se solapan en la configuración inicial, y debe realizarse una acción cognitiva más compleja (aprehensión operativa) para visualizarlas por separado. Además, en la configuración inicial del problema P3 hay una «pista» perceptiva al resaltarse uno de los triángulos que se forman con una de las bisectrices del triángulo isósceles. De esta manera, el problema P3 permitía estudiar la influencia de dicha pista perceptual en la identificación de una subconfiguración y en la generación del proceso de razonamiento configural.

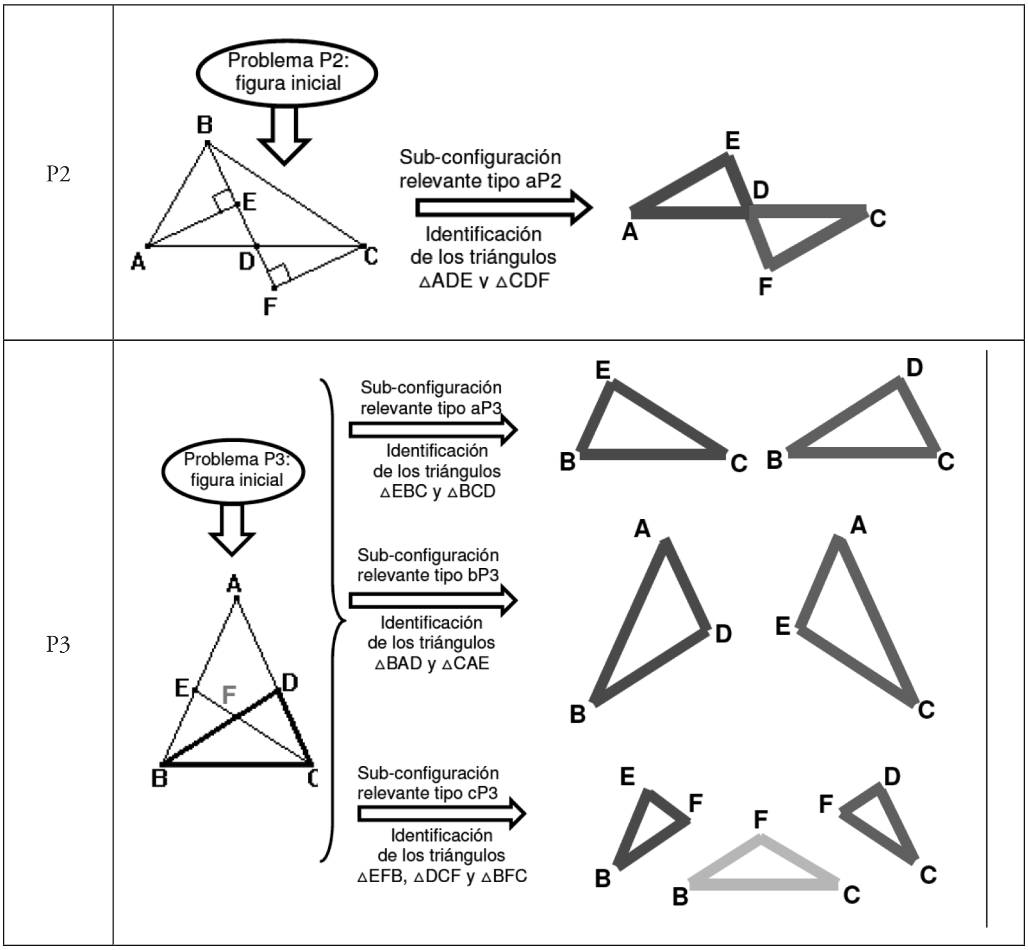


Fig. 2. Subconfiguraciones relevantes inicialmente consideradas en el diseño de los problemas del cuestionario.

ANÁLISIS

Los datos usados en esta investigación son las respuestas dadas por los estudiantes a estos dos problemas. El análisis (Clement, 2000) se desarrolló en tres fases:

- Fase 1: estudio descriptivo de las respuestas (se descompone el discurso textual generado por los estudiantes en unidades de análisis).
- Fase 2: organización de las propiedades geométricas identificadas en el estudio descriptivo de las respuestas realizado en la fase anterior. El discurso textual de los estudiantes se agrupa en dos momentos del proceso de resolución.

– Fase 3: Identificación de las formas del discurso en relación con el desarrollo del razonamiento configural.

En la primera fase, el discurso textual generado por los estudiantes fue descompuesto en unidades de análisis para identificar las aprehensiones operativas y discursivas puestas de manifiesto (Torregrosa *et al.*, 2010). Consideramos como una unidad de análisis las partes del discurso (dibujo, asignación de etiquetas o marcas a partes de la figura y/o del texto escrito) que podían reflejar la identificación o el uso por parte de los estudiantes para maestro de una propiedad, relación, hecho (definición) o proposición geométrica. Este proceso es lo que Herbst (2004) ha denominado interacción representacional entre el estudiante y la configuración en el proceso de resolver problemas de geometría.

En la segunda fase, el texto de los estudiantes fue agrupado en dos momentos del proceso de resolución:

– *Visualización*: cuando los estudiantes asocian afirmaciones matemáticas (datos del problema) a la configuración (aprehensión discursiva y operativa).
– *Organización de las proposiciones*: cuando los estudiantes encadenan lógicamente proposiciones para inferir/probar hechos.

De esta manera, consideramos cómo los estudiantes para maestro asocian a la configuración, o a una subconfiguración, afirmaciones matemáticas procedentes de los datos del problema, o las integran en su discurso para explicitar lo que van a considerar como referencia. Estas aprehensiones discursivas y operativas implican reconocer y asociar a la configuración información dada de manera textual en el problema. La identificación de la subconfiguración y las organizaciones de las proposiciones derivadas buscaba reconocer la manera mediante la que los estudiantes relacionaban los contenidos geométricos para generar procesos deductivos (Prusack *et al.*, 2012). Para ello, considerábamos cómo el estudiante organizaba las proposiciones (afirmaciones matemáticas, entendidas como definiciones, teoremas, corolarios, propiedades geométricas, etc.) que le permitían usar las afirmaciones matemáticas que había identificado como hipótesis de algún teorema o proposición conocido. Es en este paso en el que los estudiantes que realizan un truncamiento del razonamiento configural consideran los hechos geométricos que están considerando como premisas de teoremas (en este caso los criterios de congruencia de triángulos) para deducir información nueva sobre la configuración (lo que había que probar). Las figuras 3*a*, 3*b* y 3*c* muestran un ejemplo de cómo identificamos los elementos geométricos y relaciones en la respuesta de un estudiante para maestro al problema P2.

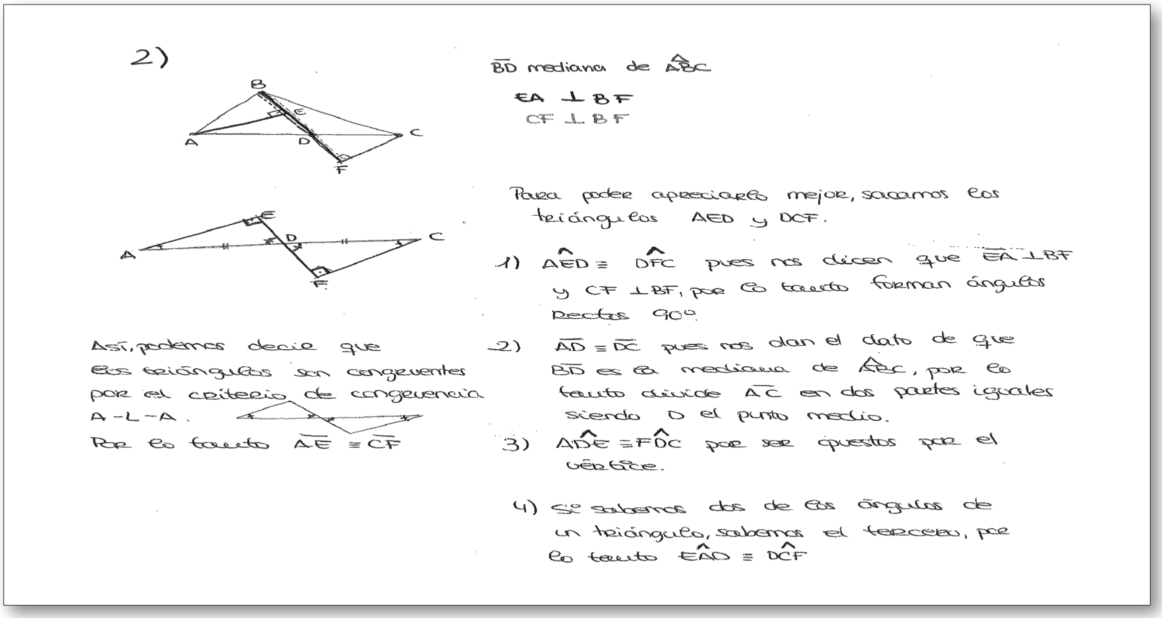


Fig. 3*a*. Respuesta de un estudiante para maestro al problema P2.

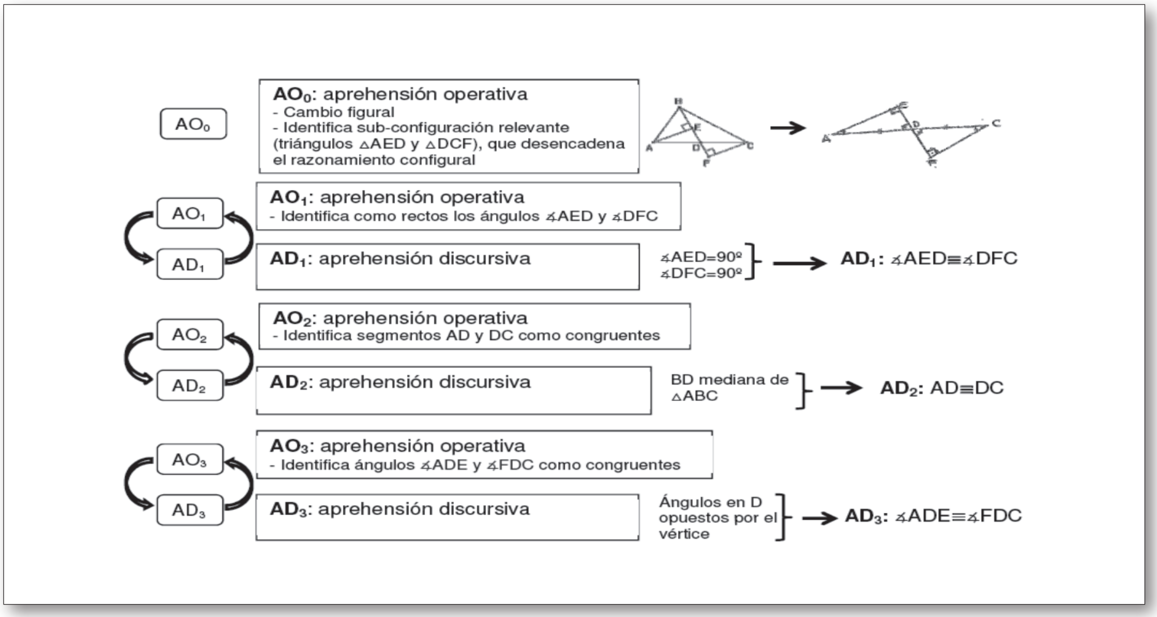


Fig. 3*b*. Identificación de unidades de análisis. Relaciones entre las aprehensiones operativas y discursivas que reflejan las interacciones representacionales en el discurso escrito de los estudiantes.

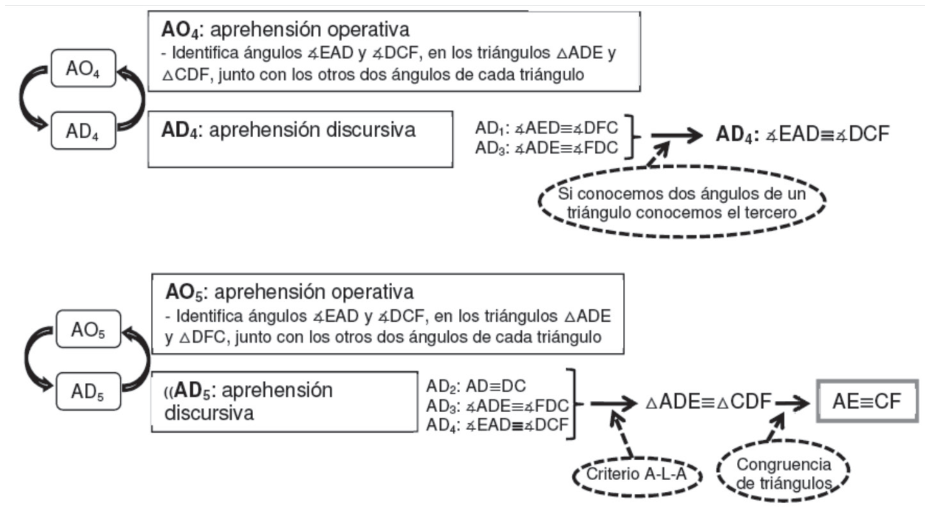


Fig. 3*c*.Visualización y organización de las proposiciones en el discurso escrito del estudiante.

En la tercera fase, consideramos la forma del discurso que los estudiantes generaban reflejando un mayor o menor apoyo en la representación gráfica de las configuraciones, o apoyándose en un discurso con lenguaje textual-simbólico que podía depender del estilo cognitivo del estudiante. Esta manera de proceder nos permitía tener un registro de cómo el estudiante se implicaba en comunicar el proceso de resolución. De esta manera consideramos las interacciones de los estudiantes con los sistemas semióticos (el discurso escrito y las representaciones de las configuraciones) como instrumentales en la resolución de los problemas de probar. Estas relaciones son las que intentamos explorar con nuestros datos.

RESULTADOS

Hemos agrupado los resultados obtenidos en dos secciones. En la primera, damos cuenta de la existencia de dos momentos en el proceso de resolución de problemas de probar. En la segunda sección describimos las relaciones entre las formas que adopta el discurso utilizado por los estudiantes para maestro para describir sus procesos de resolución y las características del razonamiento configural desencadenado.

Momentos en la resolución de problemas de probar

La resolución de estos problemas de probar tiene dos momentos característicos. En primer lugar (M1), el proceso de identificación o no de una subconfiguración geométrica (aprehensión operativa AO_0), que permite realizar aprehensiones discursivas mediante las cuales se asocian hechos, definiciones y propiedades geométricas a la configuración inicial. En segundo lugar (M2), cuando se generan cadenas de relaciones lógicas entre los hechos geométricos. En este segundo momento se podía producir una cadena de relaciones lógicas (*si… entonces*) que resuelve el problema (truncamiento), o entrar en un proceso de bucle que no produce la respuesta adecuada. La tabla 2 muestra los resultados obtenidos.

Tabla 2.
Momentos en el proceso de resolución

M1	*Identifican configuración*				*No identifican configuración*				*TOTAL*
	Aprehensiones discursivas		No Aprehensiones discursivas		Aprehensiones discursivas		No Aprehensiones discursivas		
M2	Truncamiento	Bucle	Truncamiento	Bucle	Truncamiento	Bucle	Truncamiento	Bucle	
P2	59	5	0	22	0	0	0	11	97
P3	41	5	0	33	0	0	0	18	97
TOTAL	*100*	*10*	*0*	*55*	*0*	*0*	*0*	*29*	*194*
	165				29				

Los datos de la tabla 2 indican que el 85,1% de las respuestas (165 de un total de 194) iniciaban un discurso para dar cuenta de la resolución del problema en el que de una manera explícita los estudiantes se apoyaban en la identificación de una configuración geométrica. Mientras que en el 14,9% de las respuestas (29 de un total de 194) no se muestra ningún indicio de que los estudiantes hubieran identificado alguna subconfiguración. De las respuestas en las que los estudiantes indican de manera explícita, o implícita a través del texto escrito o realizando marcas en la configuración, que han identificado una configuración (n = 165), en el 66,7% (110 de 165) hay evidencia de la realización de alguna aprehensión operativa y discursiva. En estas aprehensiones los estudiantes relacionaban algún dato del problema, mediante una definición o propiedad geométrica, con alguna parte de la configuración. Finalmente, de las respuestas en las que había evidencias de aprehensiones discursivas (n = 110), el 90,9% (100 de 110) generaron un truncamiento en el sentido de desencadenar relaciones lógicas entre los hechos geométricos identificados que llevaba a la prueba pedida. Estos datos indican que la identificación entre un hecho geométrico y una parte de la configuración inicial es una condición necesaria (aunque no suficiente) para la resolución del problema. Desde la perspectiva de la idea de concepto figural de Fischbein, este momento (M1) es evidencia de que el conocimiento de hechos geométricos (lo conceptual) y lo visual (la configuración) se interrelacionan. Esta interrelación se manifiesta a través de las aprehensiones discursivas y operativas que se explicitan en cada respuesta.

Formas del discurso y el razonamiento configural

En la resolución escrita del problema los estudiantes generan un discurso que puede apoyarse en la realización de marcas sobre la configuración inicial, mediante la identificación y representación de una subconfiguración y/o generando un texto que refleja su razonamiento. El análisis de las formas del discurso generado por los estudiantes que reconocían una subconfiguración relevante (n = 165) nos ha permitido identificar tres formas del discurso. El contenido de este discurso hace referencia a la configuración relevante sobre la que se apoya el razonamiento configural, o a la identificación explícita de los hechos geométricos que pueden ser susceptibles de relacionarse para generar cadenas de inferencias lógicas. Estas tres formas del discurso para dar cuenta de la resolución del problema son: gráfica, texto y un formato mixto gráfica-texto (figuras 4*a*, 4*b* y 4*c*). Por ejemplo, en el caso de un formato mixto (figura 4*b*), el alumno copia el dibujo y marca en este algunos elementos; sin embargo, la representación gráfica resulta insuficiente para mostrar la identificación realizada.

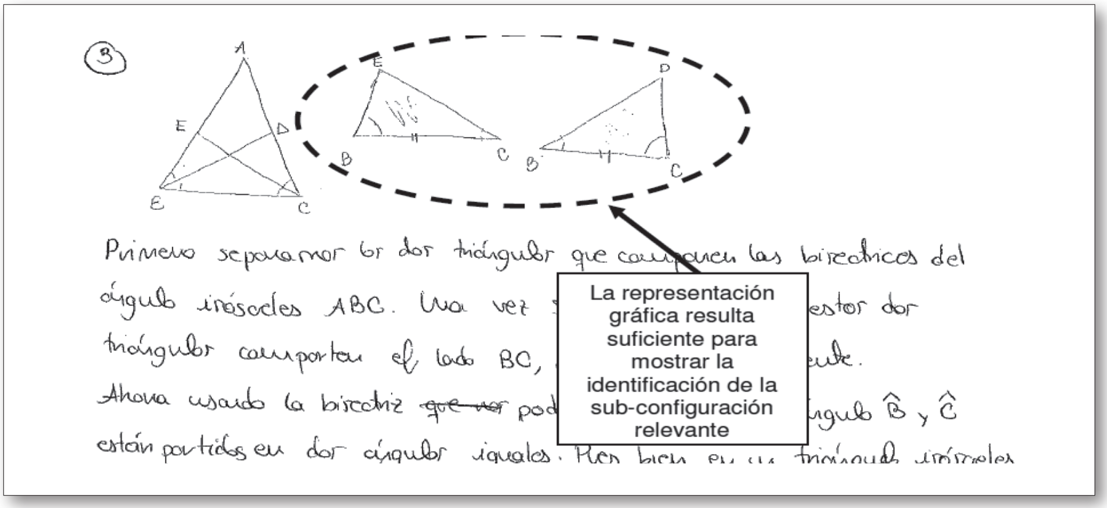


Fig. 4*a*. Fragmento de la respuesta del alumno 14 al problema P3. Representación gráfica de la subconfiguración relevante.

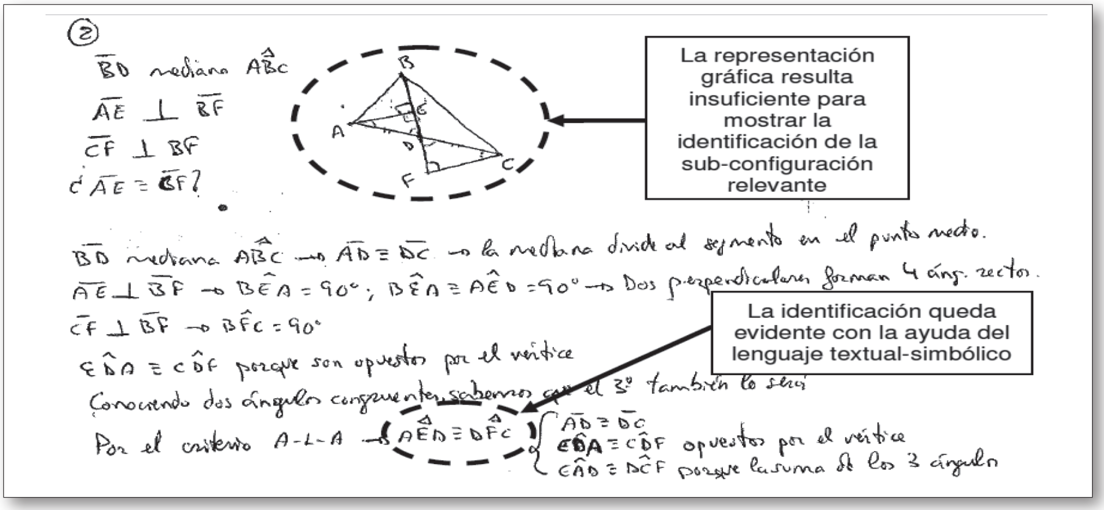


Fig. 4*b*. Fragmento de la respuesta del alumno 49 al problema P2. Representación gráfica + texto de la subconfiguración relevante.

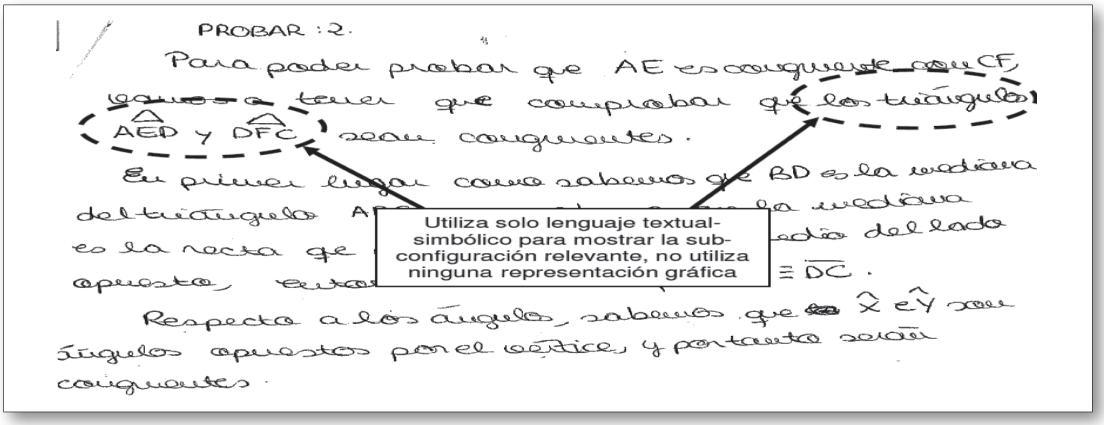


Fig. 4*c*. Fragmento de la respuesta del alumno 33 al problema P2. Identificación mediante solo texto de la subconfiguración relevante.

La tabla 3 muestra los resultados de este análisis en cada uno de los dos problemas considerando cuándo se generaba un truncamiento y cuándo un bucle.

Tabla 3.
Formas de discurso generado

	Formas del discurso						TOTAL
	Gráfico		Gráfico + texto		Solo texto		
	Truncamiento	Bucle	Truncamiento	Bucle	Truncamiento	Bucle	
P2	25	10	14	8	19	10	
	35		22		29		86
P3	30	27	4	4	7	7	
	57		8		14		79
Total	*92 (55,8%)*		*30 (18,2%)*		*43 (26%)*		*165 (100%)*

Estos datos muestran que la forma gráfica del discurso es predominante (55,8%) frente a las otras dos, solo texto (26%) y la forma combinada gráfico + texto (18,2%). Una conclusión desde estos datos es que aproximadamente en una cuarta parte de las respuestas (26%) se realizaba un discurso mayoritariamente textual, aunque en los dos problemas se presentaba una figura.

Podemos resaltar dos aspectos en relación con las respuestas que generaron una forma de discurso básicamente apoyada en texto. En primer lugar, la manera de desarrollar este discurso textual fue distinta en los dos problemas. Mientras en el problema P2 el discurso textual fue del 33,7% (29 de 86 respuestas), en el problema P3 fue solo del 17% (14 de 79 respuestas). Sin embargo, esta relación se invierte cuando se considera la presencia de la forma gráfica del discurso (en el P2, 40,6%, 35 repuestas de 86, y en el P3, 72,1%, 57 respuestas de 79). Estos datos parecen indicar que la demanda cognitiva del problema y/o la manera en la que estaba presentado el enunciado influye en la generación de un discurso gráfico o textual que los estudiantes desencadenan al comunicar su resolución.

En segundo lugar, el efecto de producir un truncamiento o un bucle teniendo en cuenta la forma de iniciar el discurso fue similar en términos globales (tabla 4). De las 92 respuestas que desarrollaron un discurso básicamente gráfico, 55 de ellas (59,7%) determinaron un truncamiento, mientras que de las 43 respuestas que desarrollaron un discurso básicamente textual, 26 de ellas (60,4%) determinaron un truncamiento. Finalmente, de las 30 respuestas con una forma de discurso mixta (gráfica + texto), 18 de ellas (60%) determinaron un truncamiento.

Esta semejanza se mantiene cuando se mira el comportamiento en los dos problemas. En el P2, los porcentajes de respuestas que determinaron un truncamiento en las diferentes formas de discurso fue: gráfico 71,4% (25 de 35 respuestas), gráfico + texto 63,6% (14 de 22 respuestas) y texto 65,5% (19 de 29 respuestas). Mientras que en el P3 fueron: gráfico 52,6% (30 de 57 respuestas), gráfico + texto 50% (4 de 8 respuestas) y texto 50% (7 de 14 respuestas). Estos datos indican que la forma que adopta el discurso en cada una de las respuestas, no indica ninguna tendencia en la manera en la que los estudiantes pueden desarrollar relaciones entre las propiedades y definiciones geométricas que generan las cadenas lógicas de la prueba.

Los datos parecen apoyar la idea de la existencia de preferencias cognitivas en los estudiantes, independientemente del problema, puestas de manifiesto al generar un determinado tipo de discurso para dar cuenta del razonamiento seguido. Pero la preferencia cognitiva del estudiante, puesta de manifiesto en la forma que adopta el discurso que genera, no parece estar relacionada con el nivel de éxito en la resolución de los problemas.

Tabla 4.
Forma del discurso y razonamiento configural

	Truncamiento	Bucle	TOTAL
Gráfico	55 (59,7%)	37	92
Gráfico + Texto	18 (60%)	12	30
Texto	26 (60,4%)	17	43
TOTAL	*99*	*66*	*165*

DISCUSIÓN

Formas del discurso y problemas de probar en geometría

Nuestros datos muestran tres formas de discurso que los estudiantes usan para dar cuenta de la resolución de problemas de geometría de probar que pueden estar vinculados a estilos cognitivos diferentes (Kruteski, 1976; Mayer y Massa, 2003; Presmeg, 2006). Existe un grupo de estudiantes con una importante preferencia visual evidenciada cuando representan gráficamente las configuraciones y subconfiguraciones identificadas como relevantes para iniciar el razonamiento configural y sobre las que apoyan su discurso. Hay otro grupo de estudiantes que inician y apoyan su razonamiento configural únicamente mediante lenguaje textual-simbólico. Finalmente, existe un grupo que realiza una aproximación mixta, combinando la representación gráfica con el lenguaje textual-simbólico para identificar alguna subconfiguración e iniciar el razonamiento configural.

Lo que nuestros datos indican es que la forma en la que los estudiantes comunicaban la resolución del problema no parece estar relacionada con la generación de un truncamiento en el razonamiento configural. Estos datos parecen sugerir que las preferencias cognitivas de los estudiantes, sobre cómo comunicar la resolución del problema, no son una condición que determine si han establecido relaciones entre los hechos geométricos para generar cadenas lógicas que les permitan probar la propiedad solicitada. En este sentido, los datos parecen apoyar los planteamientos más generales que reconocen que las diferentes habilidades cognitivas de los estudiantes que les permiten desarrollar diferentes formas de discurso no tienen por qué determinar una mayor o menor competencia matemática (Presmeg, 2006).

Una variable que puede ayudar a explicar los diferentes comportamientos de los estudiantes, puestos de manifiesto por sus preferencias al generar un discurso para dar cuenta de la resolución, tiene que ver con los datos proporcionados y las relaciones que se tienen que establecer para llegar a la tesis que hay que probar. Los estudiantes que desarrollan una forma de discurso gráfico identifican primero los hechos geométricos dados como datos, para posteriormente intentar establecer relaciones a partir del reconocimiento de la utilidad de algún resultado geométrico previamente conocido. Por otra parte, los estudiantes que generan un discurso apoyado principalmente en el texto parece que identifican primero lo global, lo que había que probar (la tesis), y luego intentan identificar algún resultado previamente conocido que suponen podría serles útil. Esta interpretación de nuestros resultados puede entenderse como complementaria a las aportaciones de Yang y Lin (Lin y Yang, 2007; Yang y Lin, 2008) en la caracterización de un modelo de comprensión lectora del proceso de probar. Yang y Lin (2008) sugieren que existen al menos dos formas en las que se desarrolla la comprensión lectora de una prueba. Una forma es aquella en la que se identifican los elementos y posteriormente las relaciones entre ellos para llegar a una comprensión global de la prueba escrita («encapsulation») y que denominan comprehensión relacional. Mientras que están los estudiantes que van desde los elementos individuales a lo global para posteriormente llegar a reconocer y encadenar los elementos, que denominan comprehensión instrumental. Estas dos formas, que parecen reflejar diferentes aproximaciones al aprendizaje, pueden estar relacionadas con la manera en la que los estudiantes en nuestra investigación desarrollan una forma textual o gráfica del discurso. Por lo que, en cierta medida, la generación de una prueba (en nuestra investigación) o la comprensión lectora de una prueba (en la investigación de Yang y Lin, 2008) parecen estar indicando estos dos perfiles en dos ámbitos complementarios (hacer pruebas y comprensión lectora de pruebas).

De las aprehensiones discursivas a generar relaciones lógicas

La forma de los datos analizados (respuestas escritas a la resolución de los problemas) y los resultados obtenidos plantea la cuestión de intentar determinar qué es lo que activa la cadena de relaciones lógicas entre los hechos y propiedades geométricas que constituyen el truncamiento en el razonamiento configural. En otras palabras, lo que puede desencadenar el establecimiento de relaciones lógicas entre los hechos y propiedades geométricas identificadas para generar una prueba (lo que Duval denomina iniciar el proceso deductivo). Nuestros datos indican que establecer relaciones lógicas entre los hechos geométricos para generar inferencias va más allá de simplemente reconocer mediante aprehensiones discursivas alguna propiedad o definición geométrica en la configuración geométrica (primer momento del proceso de resolución) (Llinares y Clemente, 2014). Este hecho nos lleva a suponer que es posible que los estudiantes que inician un discurso básicamente textual puedan tener mentalmente representada la configuración y no necesiten una representación física. Mientras que, por otra parte, los estudiantes que inician su discurso de una manera primordialmente gráfica pueden estar mostrando su necesidad de este apoyo gráfico para razonar. Sin embargo, el hecho de que las tres maneras mediante las que se inicia el discurso tengan el mismo nivel de éxito parece indicar que la preferencia en la forma del discurso (gráfico, texto o mixto) no influye en la generación de las relaciones lógicas entre los hechos geométricos.

Otra explicación alternativa es que los estudiantes que inician su discurso de una manera textual están estableciendo de manera formal relaciones entre los hechos y las definiciones geométricas, y luego, con posterioridad, estén buscando un apoyo visual. Esta explicación plantea la cuestión del papel de lo visual en el desarrollo de la prueba, es decir, en generar cadenas lógicas entre los hechos geométricos para derivar un nuevo conocimiento (Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2008; Herbst, 2004; Prusack, Hershkowitz y Schwarz, 2012). Este sería el caso que explique el desarrollo del truncamiento en el razonamiento configural, ya que para desencadenar el truncamiento los estudiantes pueden tener que desvincularse de lo visual y centrarse únicamente en las relaciones lógicas que pueden establecer entre los hechos geométricos. En este caso, la relación entre lo intuitivo y lo formal (Pazysz, 1988; Vinner y Kopelman, 1998) y la manera en la que los estudiantes pueden priorizar un aspecto frente al otro pueden estar en el origen de la generación del truncamiento del razonamiento configural. Como consecuencia de esta posible explicación, Vinner y Kopelman indican que, al menos en algunos casos, se debería enseñar lo formal primero con la esperanza de que la intuición seguirá después.

En cualquiera caso, lo que parece desempeñar un papel relevante es el conocimiento de geometría previo de los estudiantes, y la manera en la que los datos del problema o lo identificado inicialmente en la configuración son considerados como hipótesis de proposiciones y teoremas del tipo «si se cumple… entonces…». Por ejemplo, el conocimiento de los criterios de congruencia de triángulos usados en los problemas propuestos en nuestra investigación y que formaría parte del conocimiento geométrico (lo formal) activado durante la resolución de los problemas.

Esta explicación se puede vincular a la idea de «concepto figural» de Fischbein (1993) en el sentido de que en algunos momentos el conocimiento formal de geometría (definiciones, hechos y propiedades) puede guiar el pensamiento visual (procesos de visualización). De esta manera, la perspectiva y confianza en lo visual aparecería después de la confianza en lo formal, por lo que Vinner y Kopelman (1998) sugieren que, cuando el estudiante es consciente de lo que conoce (conocimiento formal de geometría) y tiene habilidad para comprobar sus intuiciones visuales de manera analítica, es cuando puede empezar a valorar lo visual. Esto es lo que Fischbein señala cuando dice que imponer relaciones en los dibujos no depende del propio dibujo, sino de lo que se conoce previamente. En relación con este hecho, Hilbert *et al.* (2008) indican que los estudiantes con un mejor conocimiento conceptual están en mejores condiciones de resolver problemas de probar en geometría si la enseñanza se acompaña con el uso de ejemplos heurísticos. Es decir, cuando se ejemplifica la manera en la que determinados resultados geométricos pueden ser usados para generar una relación lógica entre hechos reconocidos para generar una inferencia. Este sería el caso, por ejemplo, de cómo usar el criterio de congruencia de triángulos A-L-A, cuando en el problema 2 se vinculan, en la configuración inicial, los hechos:

- Los ángulos ∡ADE y ∡FDC son congruentes por ser opuestos por el vértice.
- Los segmentos AD y DC son congruentes por ser BD mediana del triángulo △ABC.
- Los ángulos en A y C son congruentes (derivado de una aprehensión discursiva previa).

Considerar estos tres hechos geométricos en la configuración particular del problema 2 como los antecedentes del criterio de congruencia de triángulos A-L-A permite asegurar la congruencia de los triángulos △AED y △DFC. En este caso, lo formal (el conocimiento geométrico previo) y lo visual (la identificación de la configuración que nos permite «ver» los dos triángulos) están intrínsecamente relacionados en la generación del truncamiento (la resolución del problema), es decir, en realizar la prueba del hecho geométrico considerado (en el caso del problema 2 que los segmentos AE y FC en la configuración inicial son congruentes).

Finalmente, si la enseñanza de la geometría debe apoyar no solo que los alumnos descubran, visualicen, describan y representen conceptos y propiedades de las figuras geométricas en el mundo físico, sino también que puedan desarrollar destrezas de razonamiento lógico, es necesario que el maestro apoye el desarrollo de estas destrezas. Nuestros datos muestran que, aunque los estudiantes para maestro puedan tener diferentes preferencias cognitivas para dar cuenta de cómo comunican la resolución de los problemas, lo que es necesario es que aprendan a reconocer los hechos geométricos en determinadas configuraciones, así como las proposiciones que permitan apoyar el desarrollo de destrezas de razonamiento lógico. Es por lo anterior por lo que la relación entre las aprehensiones discursivas y operativas, junto con el énfasis en identificar argumentos que puedan apoyar el desarrollo del razonamiento lógico, deberían ser considerados como aspectos constituyentes del conocimiento de geometría del maestro.

RECONOCIMIENTOS

1. Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.
2. Agradecemos las sugerencias e indicaciones realizadas por los revisores anónimos a una versión previa de este artículo que generó un diálogo de ideas que permitió su mejora.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2008). The transition to formal proof in geometry. En P. Boero (ed.). *Theorems in schools: from history, epistemology and cognition to classroom practices*. Rotterdam, Netherland: Sense Publishers, pp. 307-424.

Battista, M.T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: NCTM/Information Age Publishing, pp. 843-908.

Battista, M.T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. En M. Kathleen & G.W. Blume (eds.). *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*. Charlotte: IAG, pp. 341-362.

Brown, D.L. y Wheatley, G. (1997). Components of Imagery and Mathematical Understanding. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19 (1), 45-70.

Chen, Ch. y Herbst, P. (2013). The interplay among gestures, discourse, and diagrams in student' geometrical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), pp. 285-307.
http://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9454-2

Chinnappan, M. y Lawson, M. (2005). A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, pp. 197-221.
http://dx.doi.org/10.1007/s10857-005-0852-6

Clement, J. (2000). Analysis of clinical Interviews: Foundations and Model Viability. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. London: Lawrence Erlbaum Pubs, pp. 547-589.

Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de Geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (eds.). *Investigación en Educación matemática XVII*. Bilbao: SEIEM, pp. 229-236.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. En R. Sutherland y J. Mason (eds.). *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education*. Berlín: Springer, pp. 142-157.
http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (eds.). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study* [Chapter 2.2]. The Netherlands: Dordrecht, Kluwer, pp. 37-52.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis Issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (eds.). *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*. Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University, pp. 3-26.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (ed.). *Theorems in School. From History, epistemology and Cognition to Classrroom Practice*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 137-162.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, pp. 139-162.
http://dx.doi.org/10.1007/BF01273689

Hanna, G. (1998). Proof as Explanation in Geometry. *Focus on learning Problems in Mathematics*, 20 (2 y 3), pp. 4-13.

Hanna, G. y Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM. Mathematics Education*, 39, pp. 73-78.
http://dx.doi.org/10.1007/s11858-006-0005-0

Herbst, P. (2004). Interaction with diagrams and the making of reasoned conjectures in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36(5), pp. 129-139. http://dx.doi.org/10.1007/BF02655665

Hershkowitz, R. (1990). Pshycological aspects of learning Geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (eds.). *Mathematics and Cognition. A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge University Press, pp. 70-95.

Hilbert, T., Renkl, A., Kessler, S. y Reiss, K. (2008). Learning to prove in geometry: learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning and Instruction*, 18, pp. 54-65. http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.10.008

Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago, USA: University of Chicago Press.

Lin, F. y Yang, K. (2007). The reading comprehension of Geometric proofs: The contribution of knowledge and reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5(4), pp. 729-754. http://dx.doi.org/10.1007/s10763-007-9095-6

Llinares, S. y Clemente, F. (2014). Characteristics of Preservice Primary School Teachers' configural Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), pp. 234-250. http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2014.921133

Mayer, R.E. y Massa, L. (2003). Three Facets of Visual and Verbal Learners: Cognitive Ability, Cognitive style, and Learning Preference. *Journal of Educational Psychology*, 95(4), pp. 833-846. http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.95.4.833

Mesquita, A.L. (1998). On conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), pp. 183-195. http://dx.doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80058-5

Nason, R., Chalmers, CH. y Yeh, A. (2012). Facilitating growth in prospective teachers' knowledge: teaching geometry in primary schools. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, pp. 227-249. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-012-9209-0

Parzysz, B. (1988). «Knowing» vs «Seeing». Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, pp. 79-92. http://dx.doi.org/10.1007/BF00428386

Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2009). Cognitive styles, tasks presentation mode and mathematical performance. *Research in Mathematics Education*, 11(2), pp. 131-148. http://dx.doi.org/10.1080/14794800903063331

Presmeg, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. En A. Gutierrez, y P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of mathematics Education. Past, Present and Future*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, pp. 205-236.

Prior, J. y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), pp. 339-368. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1633

Prusak, N., Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2012). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. *Educational Studies in Mathematics*, 79, pp. 19-40. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-011-9335-0

Robotti, E. (2012). Natural language as a tool for analyzing the proving process: the case of plane geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), pp. 433-450. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9383-0

Steele, M.D. (2013). Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(4), pp. 245-268.
http://dx.doi.org/10.1007/s10857-012-9230-3

Stylianides, A.J. y Ball, D. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, pp. 307-332.
http://dx.doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9

Stylianides, G., Stylianides, A. y Shilling-Traina, L.N. (2013). Prospective teachers' Challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), pp. 1463-1490.
http://dx.doi.org/10.1007/s10763-013-9409-9

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), pp. 275-300.

Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva, M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), pp. 327-340.

Vinner, S.H. y Kopelman, E. (1998). Is Symmetry an Intuitive Basis for Proof in Euclidean Geometry? *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20 (2 y 3), pp. 14-26.

Yang, K. y Lin, F. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), pp. 59-76.
http://dx.doi.org/10.1007/s10649-007-9080-6

Pre-service primary teachers' ways of discourse and configural reasoning in solving geometrical problems

Francisco Clemente
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
fclemcis@gmail.com

Salvador Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
sllinares@ua.es

This paper reports of relationships between the pre-service primary teachers' ways of discourse when communicating the resolution of proof geometrical problems and the figural reasoning. The answers of 97 pre-service primary teachers to two proof geometrical problems were analyzed in order to determine how pre-service primary teachers recognized and related the geometrical facts and definitions in order to infer new information about the figure. The ways of pre-service primary teachers' written discourse pose several questions such as how pre-service teachers use the definitions and geometrical facts identified in the figure or the data from the problem in order to generate logical chains of relationships among the geometrical facts; and, how pre-service primary teachers infer new geometrical facts of the figure from this information. The answers to these questions might provide knowledge about the relationship between the visual and discursive aspects when a deductive process is generated when some proof geometry problems are solved.

Our findings indicate that pre-service primary teachers generated three different ways of discourse: Graphical, Textual and a mix of both; and that these ways of discourse do not influence the truncation of configural reasoning in order to generate deductive processes. In these situations, two aspects that appear to play a key role in the *truncation* of configural reasoning are the pre-service primary teachers' geometrical knowledge, and the way in which the data of the problem and/or geometrical facts identified in the initial configuration are considered as premises of hypothesis in logical chains as such *"if…. Then…"*. One consequence of this interpretation is that teaching geometry in school should not only help students visualize, describe and represent concepts and geometrical properties of figures in the world, but it should also help learners to develop skills of logical reasoning. Therefore, it is necessary that teachers support the development of these skills. Our findings suggest that although the pre-service primary teachers may have different cognitive preferences for communicating the resolution of the problems, it is essential to learn to recognize the geometric facts in different figures, as well as the geometric propositions that allow to support the development of skills in logical reasoning. Due to the above, both the relationship between discursive and operative apprehensions, and the skills of logical reasoning should be considered as key elements in the primary teachers' geometrical knowledge for teaching.