УДК 621.135:533.695.5
DOI: 10.15587/2312-8372.2019.184169

РОЗРОБКА НЕЯВНОГО МЕТОДУ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ ЛОПАТОК ТУРБОМАШИН

Биков Ю. А.

РАЗРАБОТКА НЕЯВНОГО МЕТОДА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТОК ТУРБОМАШИН

Быков Ю. А.

DEVELOPMENT OF IMPLICIT METHOD FOR NUMERICAL MODELING OF TURBOMACHINE BLADE THERMOELASTIC VIBRATIONS

Bykov Yu.

В останні десятиліття спостерігається тенденція до підвищення температури згоряння палива в газотурбінних двигунах (ГТД). Це дозволяє підняти як ефективність роботи двигуна, так і вихідну потужність. У сучасних двигунах температури відпрацьованих газів вже істотно перевищують температуру плавлення матеріалу лопаток. У зв'язку з цим при проектуванні турбін ГТД виникає необхідність в застосуванні чисельних методів, які дозволяють найбільш достовірно моделювати нестаціонарні аеротермопружні ефекти. Однією із складових частин задачі аеротермопружності є інтегрування нестаціонарних рівнянь термопружності спільно з рівняннями аеродинаміки. Оскільки ці рівняння повинні вирішуватися спільно з єдиним кроком за часом, необхідно віддавати перевагу неявним чисельним методам інтегрування. Об'єктом дослідження є нестаціонарна взаємодія термопружних коливань лопаток турбіни та потоку газу.

У даній роботі представлений неявний чисельний метод моделювання термопружних коливань елементів конструкції турбіни ГТД, в тому числі лопаток турбіни, обладнаних каналами охолодження. В основі методу покладено рівняння лінійної термопружності, які інтегруються методом кінцевих елементів. Досліджувана область розбивається на комірки, що утворюють розрахункову сітку з гексаедрами з додатковими вузлами. Розрахункові вузли вибираються таким чином, щоб на один елемент припадало 20 вузлів. Апроксимація параметрів в елементі виконується за допомогою поліномів третього ступеня. Інтегрування за часом проводиться також з третім порядком точності.

Показані результати тестування методу на модельних задачах, а також порівняння результатів моделювання коливань лопатки стандартної конфігурації з результатами інших авторів. Розбіжність результатів не перевищує 0,4 % для модельної задачі і 0,7 % для коливань лопатки. Отримані результати свідчать про те, що представлений метод можна *використовувати для чисельного моделювання нестаціонарних термопружних коливань елементів конструкції газотурбінного двигуна.*

Ключові слова: *чисельні методи, теорія пружності, динаміка лопаток турбомашин, аеротермопружність, газотурбінний двигун.*

В последние десятилетия наблюдается тенденция к повышению температуры сгорания топлива в газотурбинных двигателях (ГТД). Это позволяет поднять как эффективность работы двигателя, так и выходную мощность. В современных двигателях температуры отработавших газов уже существенно превышают температуру плавления материала лопаток. В связи с этим при проектировании турбин ГТД возникает необходимость в применении численных методов, которые позволяют наиболее достоверно моделировать нестационарные аэротермоупругие эффекты. Одной из составных частей задачи аэротермоупругости является интегрирование нестационарных уравнений термоупругости совместно с уравнениями аэродинамики. Поскольку эти уравнения должны решаться совместно с одним шагом по времени, необходимо отдавать предпочтение неявным численным методам интегрирования. Объектом исследования является нестационарное взаимодействие термоупругих колебаний лопаток турбины и потока газа.

В данной работе представлен неявный численный метод моделирования термоупругих колебаний элементов конструкции турбины ГТД, в том числе лопаток турбины, оборудованных каналами охлаждения. В основе метода положены уравнения линейной термоупругости, которые интегрируются методом конечных элементов. Исследуемая область разбивается на ячейки, образующие расчетную сетку из гексаэдров с дополнительными узлами. Расчетные узлы выбираются таким образом, чтобы на один элемент приходилось 20 узлов. Аппроксимация параметров в элементе выполняется с помощью полиномов третьей степени. Интегрирование по времени проводится также с третьим порядком точности.

Показаны результаты тестирования метода на модельных задачах, а также сравнение результатов моделирования колебаний лопатки стандартной конфигурации с результатами других авторов. Расхождение результатов не превышает 0,4 % для модельной задачи и 0,7 % для колебаний лопатки. Полученные результаты свидетельствуют о том, что представленный метод можно использовать для численного моделирования нестационарных термоупругих колебаний элементов конструкции газотурбинного двигателя.

Ключевые слова: *численные методы, теория упругости, динамика лопаток турбомашин, аэротермоупругость, газотурбинный двигатель.*

1. Вступ

Найбільш поширеним способом підвищення ефективності сучасних газотурбінних двигунів є збільшення температури на вході в перші ступені турбіни. Причина використання високих температур криється в підвищенні тиску для процесу адіабатичного розширення, отже, в можливості створення більшої питомої роботи при розширенні газу в турбіні. Сьогодні вхідні температури робочого колеса газової турбіни досягли рівня, що набагато перевершує температури плавлення матеріалу турбіни. Проблема визначення рівня динамічних та термічних напружень в лопатках турбіни надто складна для експериментальних досліджень, тому за допомогою впровадження в практику проектування сучасних методів і засобів чисельного моделювання можливо істотно знизити витрати на експериментальний пошук оптимальних матеріалів і режимів ефективної роботи турбіни. Тобто, актуальною проблемою є чисельне моделювання взаємодії обтічного потоку та коливань лопаток з урахуванням значної температурної нерівномірності і складної конструкції лопатки в перших ступенях газових і парових турбін.

Важливість урахування розподілу температури та взаємодії лопатки з течією підтверджується дослідженнями інших авторів [1]. Також необхідно враховувати складну конструкцію лопатки, оснащеної охолодженням. Рішення даного завдання полягає в інтегруванні рівнянь термопружності. На сьогоднішній день для вирішення завдання використовуються різні моделі:

– модель тонких оболонок [2, 3];
– модель тонкої пластини зі змінною товщиною [4];
– модель коливань лопатки з урахуванням просторової форми лопатки [5, 6].

Для даної проблеми найбільш підходящою моделлю є модель коливань лопатки з урахуванням просторової форми і матеріалу, оскільки дозволяє враховувати як конструкцію лопатки, так і нерівномірність температури і властивостей матеріалів. Для цієї моделі існують кілька способів вирішення, в тому числі модальний підхід [5, 6] і метод прямого інтегрування рівнянь руху [7]. Модальний підхід полягає в пошуку рішення у вигляді лінійної комбінації власних форм коливань лопатки, коефіцієнти якої залежать від часу і обчислюються на кожному часовому кроці. Спільне завдання обтікання лопатки вінця і коливань лопаток з використанням модального методу розглянуто в роботі [8]. Недоліком такого методу є необхідність повторного визначення власних форм і частот при зміні фізичних властивостей матеріалу лопатки, що в плані обчислювальних витрат може бути менш ефективно, ніж при прямому інтегруванні рівнянь руху. Таким чином, найбільш підходящим методом моделювання коливань лопатки в даній проблемі є метод прямого інтегрування рівнянь руху. Основним методом для вирішення задачі термопружності є метод кінцевих елементів [9, 10].

Таким чином, об'єктом дослідження є нестаціонарна взаємодія термопружних коливань лопаток турбіни та потоку газу. Мета роботи полягає у розробці ефективного методу та програмного забезпечення для чисельного моделювання термопружних коливань лопаток турбіни ГТД.

2. Методика проведення досліджень

2.1. Вихідні рівняння

Коливання лопатки турбомашини описуються динамічними термопружними рівняннями для твердого тіла в трьох просторових вимірах [11–13]:

$$
\begin{aligned}
&\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\nabla\, div\vec{u} + \mu\Delta\vec{u} + \rho\vec{f} - \gamma\, grad\theta, \\
&\frac{1}{\chi}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \Delta\theta - \eta\frac{\partial}{\partial t}div\vec{u} + \frac{Q}{\chi},
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

де $\vec{u}$ – вектор зсуву координат точки в тілі;

ρ – щільність;

$\vec{f}$ – вектор масових сил;

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ – коефіцієнти Ламе;

E – модуль Юнга;

ν – коефіцієнт Пуассона;

$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$; α – коефіцієнт лінійного теплового розширення;

$\theta = T - T_0$ – девіація температури;

χ – коефіцієнт температуропровідності;

$\eta = \frac{\gamma T_0}{k}$; k – коефіцієнт теплопровідності;

Q – джерело тепла.

Рівняння (1) доповнюються граничними умовами на поверхнях лопатки:

– в кореневому перерізі $\vec{u} = 0$;

– на поверхні:

$$\sigma_{ij} n_j = p_i,$$

де σ_{ij} – тензор напружень; n_j – вектор нормалі до поверхні; p_i – вектор зовнішніх сил.

Для θ задається значення на границях тіла $\theta = \theta_w$, або тепловий потік $\frac{\partial\theta}{\partial n} = \left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_w$. У разі взаємодії з навколишньою рідиною вектор зовнішніх сил визначається як, $p_i = pn_i$ (p – тиск рідини). Також рівняння (1) доповнюються початковими умовами:

$$\vec{u} = \vec{u}_0(x),\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \vec{u}_1(x),\ \theta = \theta_0(x).$$

2.2. Метод чисельного моделювання

Існують різні методи чисельного інтегрування рівнянь (1). Серед найпоширеніших застосовують метод кінцевих різниць, кінцевих об’ємів і кінцевих елементів [9, 10]. Метод кінцевих різниць вимагає застосування узагальнених координат, що ускладнює рівняння. Метод кінцевих об’ємів для отримання прийнятних результатів вимагає застосування апроксимації високих порядків. У той же час метод кінцевих елементів надає досить ефективний алгоритм, що дозволяє застосовувати апроксимацію різних порядків на різноманітних розрахункових сітках. У даній роботі застосовано метод кінцевих елементів, побудований на використанні елементів третього ступеня на сітці з гексаедрів.

На кожному часовому кроці обчислюються пружні сили в вузлах розрахункової сітки для кожної комірки за формулою [10]:

$$\mathbf{r} = \left[\int_{\Omega} \left(\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \right) d\Omega \right] \boldsymbol{\delta} - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T f^e d\Omega,$$

де $\mathbf{r}$ – вектор, що містить компоненти векторів сил вершин комірки;

$\boldsymbol{\delta}$ – вектор, що містить компоненти векторів переміщення вершин комірки;

$\mathbf{f}^e$ – вектор масових сил в комірці;

$\mathbf{B}$ – матриця перетворення вектора переміщень $\boldsymbol{\delta}$ в вектор, що містить компоненти тензора деформації $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\varepsilon = B\delta$;

$\mathbf{D}$ – матриця перетворення вектору ε в вектор, що містить компоненти тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}$, $\sigma = D\varepsilon$; $\mathbf{N}$ – матриця перетворення вектору $\boldsymbol{\delta}$ в вектор переміщень усередині комірці $\mathbf{u}^e$, $\mathbf{u}^e = \mathbf{N}\boldsymbol{\delta}$;

Ω – об'єм комірки.

Далі виконується інтегрування рівняння руху вузлів сітки:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} = \sum_j \mathbf{R}_i \mathbf{r}_j,$$

де $\mathbf{R}_i$ – матриця перетворення компонент вектору $\mathbf{r}$ в компоненти вектора сил i-го вузла розрахункової сітки; $\mathbf{u}_i$ – вектор переміщення i-го вузла, підсумовування ведеться по всіх комірках розрахункової сітки.

Для чисельного інтегрування рівнянь (1) використовується комбінація раніше розроблених методів. Рівняння для температури інтегруються методом кінцевих об'ємів другого порядку по просторовим координатам, описаним в роботі [14]. Рівняння руху інтегруються методом кінцевих елементів, який може бути отриманий модифікацією методу, описаного в роботі [15].

У якості кінцевого елементу вибрано шестигранну комірку розрахункової сітки. Апроксимація змінних по елементу виконується за допомогою полінома третього ступеня:

$$u = \sum_{i,j,k=0}^{3} a_{ijk} x^i y^j z^i.$$

В матриці a_{ijk} є двадцять ненульових елементів, тобто для апроксимації використовуються значення змінних в 20 точках кожної комірки.

Таким чином, рівняння руху (1) після дискретизації по вузлам розрахункової сітки та шагам за часом перетворюється на систему лінійних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&Bu_n = 5u_{n-1} - 4u_{n-2} + u_{n-3} + F,\\
&B = \left(2 - \Delta t^2 A\right),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

де Δt – шаг за часом; n – номер шагу за часом; u_n – вектор зміщень у вузлах розрахункової сітки; F – вектор зовнішніх сил.

Неявна дискретизація рівнянь руху (2) забезпечує третій порядок апроксимації по просторовим змінним й часу та є абсолютно стійкою при будь-яких значеннях числа Куранта. Матриця B рівнянь (2) не має домінуючих діагоналей, що обмежує використання ітераційних методів, не дозволяє розщеплення по координатам, а для методів прямого обернення є занадто великою. Тому для розв'язання рівнянь (2) пропонується наступне приближення:

$$
B^{-1} = \left(\sum C_i B_i\right)^{-1} \approx \sum C_i B_i^{-1},
$$

де B_i – матриця рівнянь (2) для однієї комірки за номером i; C_i – відповідна матриця зв'язку вузлів комірки i з іншими комірками. Ця матриця має домінуючу одиничну головну діагональ $\left((C_i)_{ij} = 1\right)$.

Матриці B_i обертаються за допомогою класичного методу Гауса-Жордана. Інтегрування рівнянь (1) проводиться спільно, з використанням однакового кроку за часом.

3. Результати досліджень та обговорення

В якості першого об'єкта тестування чисельного методу було вибрано балку довжиною 1 м квадратного перетину 0,05 м×0,05 м, жорстко закріплену на одному кінці і вільну на іншому. Об'єм балки був розділений на однакові прямокутні шестигранні комірки, що утворюють розрахункову сітку розміром 30×1×1. В якості початкової умови був обраний вигин уздовж однієї з координатних площин, відповідний одній з 4 перших власних форм згинальних коливань балки [16]. В результаті отримані частоти коливань, відповідні обраним власним формам. У табл. 1 представлені теоретичні [16] і розрахункові значення власних частот для заданих характеристик матеріалу балки: модуль Юнга E=2,1·10^8 Па; коефіцієнт Пуассона ν=0,3; щільність ρ=7,8·10^3 кг/м^3.

Таблиця 1

Власні частоти згинальних коливань балки

Форма	1	2	3	4
Частота (теорія), Гц	23,549	147,595	413,313	809,946
Частота (розрахунок), Гц	23,584	146,863	412,095	806,731

Середня відмінність теоретичних та розрахункових даних не перевищує 0,4 %. Також були отримані частоти крутильних коливань балки для перших 4 власних форм. Результати представлені в табл. 2.

Таблиця 2

Власні частоти крутильних коливань балки

Форма	1	2	3	4
Частота (теорія), Гц	257,7	773,2	1288,7	1804,1
Частота (розрахунок), Гц	257,6	775,1	1288,1	1798,8

Середня відмінність представлених даних для крутильних коливань не перевищує 0,16 %.

Другим об'єктом було вибрано турбінну лопатку останнього ступеня парової турбіни з характерними розмірами: висота h=0,775 м; хорда в кореневому перерізі c=0,11 м, в периферійному – c=0,0945 м. Для цієї лопатки були визначені стороннім методом [17] власні форми і власні частоти пружних коливань для умов затиснення біля кореня і вільного кінця лопатки. В якості початкової умови була обрана одна з 5 власних форм, для якої визначалася відповідна власна частота. Розрахункова сітка представляла собою Н-сітку розміром 8×38×1: 8 рядів рівномірно за висотою, 38 рядів вздовж хорди, 1 ряд за товщиною. У табл. 3 представлені вихідні та розрахункові значення власних частот для заданих характеристик матеріалу лопатки: модуль Юнга $E=2,1\cdot 10^8$ Па; коефіцієнт Пуассона $\nu=0,3$; щільність $\rho=7,8\cdot 10^3$ кг/м^3.

Таблиця 3

Власні частоти коливань лопатки

Форма	1	2	3	4	5
Частота ([17]), Гц	41,263	99,109	216,320	220,832	320,555
Частота (розрахунок), Гц	41,563	98,815	216,005	221,626	319,582

Середня відносна відмінність представлених даних для коливань лопатки в табл. 3 не перевищує 0,7 %.

4. Висновки

Розроблено метод та програмне забезпечення для чисельного моделювання термопружних коливань лопатки турбомашини з підвищеним порядком апроксимації. Представлені результати чисельного моделювання пружних коливань різних тіл складної форми демонструють достатню ефективність і точність розробленого чисельного методу. Даний метод дозволяє використовувати ускладнені моделі лопаток турбомашин. Подальший розвиток методу для вирішення задач термопружності дозволяє його використання для вирішення проблеми аеротермопружності турбомашин.

Література

1. Vorobev, Iu. S., Diakonenko, K. Iu., Kulishov, S. B., Skrickii, A. N. (2009). Vliianie temperaturnoi neodnorodnosti na kolebaniia okhlazhdaemykh monokristallicheskikh lopatok gazovykh turbin. *Vestnik dvigatelestroeniia, 3,* 140–143.
2. Miroshnichenko, S. T., Pukhlii, V. A. (2009). K raschetu centrobezhnykh nasosov v iadernoi energetike. *Sbornik nauchnykh trudov SNUIAEtaP, 3,* 31–40.
3. Grinberg, S. M. (1969). K raschetu chastot kolebanii lopatok kompressora metodami teorii obolochek. *Prochnost i dinamika aviacionnykh dvigatelei, 5,* 242–255.
4. Bendiksen, O. O. (1998). Nonlinear Blade Vibration and Flutter in Transonic Rotors. *Proc. of ISROMAC-7,* 664–673.
5. Moyroud, F., Jacquet-Richardet, G., Fransson, T. H. (2000). Aeroelasticity in Turbomachines: Some Aspects of the Effect of Coupling Modeling and Blade Material Changes. *International Journal of Rotating Machinery, 6 (4),* 265–273. doi: http://doi.org/10.1155/s1023621x00000257
6. Gnesin, V. I., Kolodiazhnaia, L. V. (2009). Chislennii analiz vliianiia sootnosheniia chisel lopatok statora i rotora na nestacionarnye nagruzki i rezhimy kolebanii lopatok. *Vestnik NTU «KHPI». Seriia: Energeticheskie i teplotekhnicheskie processy i oborudovanie, 3,* 23–32.
7. Vorobev, Iu. S., Chernobryvko, M. V., Chugai, M. A., Romanenko, V. N. (2010). Problemy chislennogo analiza dinamiki elementov sovremennykh konstrukcii. *Vestnik SevNTU, 110,* 20–25.
8. Gnesin, V. I., Kolodiazhnaia, L. V., Zhandkovski, R. (2009). Aerouprugoe povedenie poslednei stupeni turbomashiny na nominalnom i chastichnom rezhimakh v trekhmernom potoke viazkogo gaza. *Problemy mashinostroeniia, 12 (6),* 8–18.
9. Koltunov, M. A., Kravchuk, A. S., Maiboroda, V. P. (1983). *Prikladnaia mekhanika deformiruemogo tverdogo tela.* Moscow: Vysshaia shkola, 349.
10. Pobedria, B. E. (1995). *Chislennye metody v teorii uprugosti i plastichnosti*. Moscow: Izd-vo MGU, 366.
11. Kupradze, V. D. (1976). *Trekhmernye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti i termouprugosti*. Moscow: Nauka, 664.
12. Kovalenko, A. D. (1975). *Termouprugost*. Kyiv: Vischa shkola, 216.
13. Novackii, V. (1970). *Dinamicheskie zadachi termouprugosti*. Moscow: Mir, 256.
14. Bykov, Iu. A. (2009). Chislennoe modelirovanie techeniia v reshetke kolebliuschikhsia profilei s uchetom teploobmena. *Problemy mashinostroeniia, 12 (5),* 36–41.
15. Bykov, Iu. A., Gnesin, V. I. (2011). Numerical simulation of elastic vibrations of turbomachinery blades. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3 (7 (51)),* 62–65. Available at: http://journals.uran.ua/eejet/article/view/1631
16. Babakov, I. M. (1968). *Teoriia kolebanii*. Moscow: Nauka, 560.
17. Bykov, Iu. A., Gnesin, V. I. (2011). Chislennoe modelirovanie termouprugikh kolebanii lopatok turbomashin. *Vestnik NTU «KhPI», 33,* 43–47.

There was a tendency in recent decades to increase the combustion temperature in gas-turbine engines (GTE). This allows increasing both the efficiency of the engine and the output power. In modern engines, the temperature of the exhaust gas is already significantly higher than the melting temperature of blade material. In this regard, in the design of GTE turbines there is a need to use numerical methods that allow the most reliable modeling of unsteady aerothermoelastic effects. One of the components of the aerothermoelastic problem is to integrate the unsteady equations of thermoelasticity together with the equations of aerodynamics. As these equations must be solved together with a single step in time, implicit numerical integration methods should be preferred. The object of research is the unsteady interaction of thermoelastic vibrations of the turbine blades and gas flow.

This paper presents an implicit numerical method for modeling thermoelastic vibrations of the GTE turbine flow parts, including turbine blades with cooling channels. The method is based on equations of linear thermoelasticity, which are integrated by the finite element method. The investigated volume is divided into cells, forming a calculation grid with hexahedrons with additional nodes. The compute nodes are selected so that one element has 20 nodes. The approximation of the parameters in the element is performed using third-degree polynomials. Time integration is also performed with third-order accuracy.

The results of testing the method on test problems, as well as comparing the results of the vibrations simulation of the standard configuration blades with the results of other authors are shown. The discrepancy of the results does not exceed 0.4 % for the test problem and 0.7 % for the blade vibrations. The obtained results indicate that the presented method can be used for numerical simulation of the unsteady thermoelastic vibrations of the gas-turbine engine flow parts.

Keywords: *numerical methods, theory of elasticity, turbine blade dynamics, aerothermoelastics, gas-turbine engine.*