DOI: 10.15587/2312-8372.2018.146312

МІНІМІЗАЦІЯ КОН’ЮКТИВНИХ НОРМАЛЬНИХ ФОРМ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ КОМБІНАТОРНИМ МЕТОДОМ

Різник В. В., Соломко М. Т.

1. Вступ

Проблеми та недоліки відомих методів мінімізації кон’юктивних нормальних форм (КНФ) булевих функцій пов’язані зі зростанням обсягу обчислень при збільшенні кількості змінних логічних функцій. Складність задачі мінімізації булевих функцій *n* змінних у класі КНФ з ростом *n* зростає за експоненціальним законом. Складність алгебричного методу та складність мінімізації КНФ логічної функції картою Карно помітно збільшується при зростанні кількості змінних більше чотирьох-п’яти, тому ці методи недоцільно використовувати з більшим числом змінних.

Задача мінімізації булевих функцій $F = F(x_1, x_2 ... x_n)$ у класі КНФ формулюється наступним чином: необхідно для булевої функції *n* змінних F знайти КНФ функції з мінімально можливим числом множників КНФ або з мінімально можливим числом вхідних літералів (МКНФ).

В [1–3] розглянуто комбінаторний метод мінімізації булевих функцій у класі диз’юктивних нормальних форм (ДНФ). Особливості методу полягають у більшій інформативності процесу мінімізації, порівняно з алгебричним способом мінімізації булевих функцій, за рахунок табличної організації та впровадження апарату образних перетворень.

У даній роботі представлений комбінаторний метод мінімізації булевих функцій у класі КНФ логічних функцій. Застосування методу образних перетворень для спрощення КНФ функцій дає нові правила алгебри логіки, встановлює ознаку мінімальної функції.

Еволюція методів спрощення логічних функцій є результатом невпинної оптимізації, тому актуальними залишаються дослідження направлені, зокрема, на вдосконалення таких чинників, як:

- методологія мінімізації логічних функцій у класі ДНФ та КНФ;
- встановлення ознаки мінімальної функції;
- вартості технології мінімізації логічних функцій.

2. Об'єкт дослідження та його технологічний аудит

Об’єктом дослідження є образні перетворення комбінаторного методу, для мінімізації КНФ булевих функцій, які застосовуються за наявності у структурі таблиці істинності повної або неповної бінарних комбінаторних систем з повторенням [1–3].

Образні перетворення комбінаторного методу складають бібліотеку протоколів для процесу мінімізації КНФ булевих функцій як стандартні процедури, тому застосування окремого такого протоколу зводиться до проведення одного алгебричного перетворення. Рівносильні образні перетворення комбінаторного методу за своїми властивостями володіють більшою інформаційною ємністю, тому спроможні з ефектом замінити вербальні процедури мінімізації КНФ булевих функцій алгебричних перетворень.

Ефективність застосування образних перетворень комбінаторного методу для мінімізації КНФ булевих функцій полягає у суттєвому зменшенні складності процедури скорочення логічних функцій. Це дозволяє обходитись без апаратно-програмних засобів автоматизації процесу скорочення булевих функцій до 10 змінних.

Зменшення складності процесу спрощення КНФ булевих функцій комбінаторним методом, зокрема, додає ефективності у практичному встановленні та оперуванні ознакою мінімальної функції.

Недоліки застосування образних перетворень комбінаторного методу при мінімізації КНФ булевих функцій пов'язані з малим об'ємом існуючих теоретичних розробок. Перспектива застосування комбінаторного методу для мінімізації КНФ логічних функцій ґрунтується на практичних шансах оптимальної мінімізації КНФ логічних функцій. При збільшенні кількості змінних (часу обчислень) для мінімізації КНФ функції комбінаторним методом необхідним є пошук нових протоколів мінімізації КНФ булевих функцій та розширення бібліотеки зазначених протоколів.

3. Мета та задачі дослідження

Метою роботи є спрощення процесу мінімізації КНФ булевих функцій комбінаторним методом.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

1. Встановити адекватність застосування комбінаторного методу для мінімізації КНФ булевих функцій.
2. Визначити рівносильні образні перетворення макстермів для мінімізації КНФ булевих функцій.
3. Встановити доцільність застосування образних перетворень для отримання ознаки мінімальної логічної функції.
4. Встановити доцільність застосування образних перетворень для мінімізації двох нормальних формах – ДНФ і КНФ заданої булевої функції, використовуючи повну таблицю істинності.

4. Дослідження існуючих рішень проблеми

Відношення між представленнями КНФ заданої булевої функції і суттєвими наборами імплікант вивчається у роботі [4]. Відомо, що кожне представлення КНФ функції і кожна суттєва множина імплікант повинні пересікатися. Тому максимальне число попарно суттєвих множин, що не пересікаються, дають нижню границю розміру будь-якого представлення КНФ логічної функції. У роботі [4] вивчається нижня границя мінімального розміру КНФ заданої функції. Нижня оцінка подається виразом, який позначає число попарно суттєвих множин імплікант, що не пересікаються. Функції, для яких ця нижня границя відповідає мінімальному розміру КНФ, названі «покриваючими функціями». Показано поліноміальну складність розв'язку зазначеної проблеми мінімізації КНФ булевих функцій. Зазначена проблема мінімізації має багато практичних застосувань. Наприклад, для штучного інтелекту ця проблема еквівалентна пошуку найбільш компактного представлення заданої бази знань. Така трансформація бази знань забезпечує стиск знань, оскільки фактичне знання не змінюється, а розмір представлення може бути суттєво зменшений.

Проблема мінімізації КНФ булевих функцій розглядається у роботі [5], де представлено узагальнення великого класу формул КНФ та їх мінімізація за поліноміальний час.

Метод розкладання булевих функцій, який може бути застосований в деяких випадках до формули КНФ, коли необхідно довести її мінімум, розглядається у роботі [6], де представлені приклади такого підходу до мінімізації КНФ булевої функції.

У роботі [7] розглядається мінімізація КНФ булевих функцій за поліноміальний час та аналізується складність розв’язку цієї задачі. Відомо, що вирішення питання про те, чи існує коротша КНФ для функції, заданої як КНФ, має n^2 складність для загальних формул, хоча для певних класів формул складність мінімізації КНФ може бути іншою.

Дискусія про роль ступеня автосиметрії (autosymmetry) змінних булевої функції і чому вона заслуговує на увагу стосовно мінімізації логічної функції представлена у [8]. Закономірність змінних булевої функції може бути виражена ступенем автосиметрії, що у підсумку дає новий інструмент ефективної мінімізації.

Новий евристичний алгоритм для максимальної мінімізації булевих функцій запропоновано у роботі [9]. Для його реалізації використовуються графічні дані і представлені деякі умови для досягнення максимального рівня мінімізації булевої функції.

Комплексне обстеження методів мінімізації логічних функцій демонструється у роботі [10]. Ці методи розглядаються за їх метою, методологією, реалізацією та перевагами. Представлено порівняння переглянутих підходів до мінімізації логічних функцій.

Нова техніка двоетапного процесу оптимізації комбінаційної логіки описується в [11]. Така техніка може бути застосована до довільних комбінаційних логічних завдань, і часто дає поліпшення навіть після оптимізації за стандартними методами. Зазначена техніка оптимізації використовується для підвищення продуктивності програмного забезпечення.

Мінімізація булевих функцій за допомогою потрійного дерева, під час якої застосовуються базові булеві операції, розглядається у роботі [12]. Метод розрахований на мінімізацію булевих функцій з великою кількістю змінних за підтримки мінімізації неповно заданих функцій.

У роботі [13] розглядається мінімізація кон’юнктивних нормальних форм частково-монотонних булевих функцій для k-значної логіки, а в [14] доводиться, що кон’юнктивні нормальні форми частково-монотонних булевих функцій 2-значної логіки можна ефективно мінімізувати з використанням лише частково-монотонних диз’юнктів. Булева функція називається частково-монотонною, якщо вона монотонна відносно деяких з її аргументів та антимонотонна відносно решти її аргументів.

У роботі [14] доводиться, що кон’юнктивні нормальні форми частково-монотонних булевих функцій 2-значної логіки можна мінімізувати дуже ефективно з використанням лише частково-монотонних диз’юнктів. Булева функція називається частково-монотонною, якщо вона монотонна відносно деяких з її аргументів та антимонотонна відносно решти її аргументів.

На відміну від вищезгаданих джерел, у даній роботі об’єктом вирішення задачі є мінімізація КНФ булевих функцій комбінаторним методом за наявності в структурі таблиці істинності повної, або неповної бінарних комбінаторних систем з повторенням. Математичний апарат блок-схеми з повторенням дає можливість отримати більше інформації стосовно ортогональності, суміжності, однозначності блоків таблиці істинності. Рівносильні образні перетворення у вигляді двовимірних матриць за своїми властивостями мають більшу інформаційну ємність, тому спроможні ефективно замінити вербальні процедури алгебричних перетворень.

5. Методи дослідження

5.1. Рівносильні перетвореннями КНФ булевих функцій

Правила спрощення КНФ логічних функцій ґрунтуються на асоціативних (1), (2), комутативних (3), (4) та дистрибутивних (5), (6) законах алгебри логіки.

Асоціативні закони:

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3) = x_2 + (x_1 + x_3) = x_3 + (x_1 + x_2), \tag{1}$$

$$x_1 x_2 x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = x_2 \cdot (x_1 \cdot x_3) = x_3 \cdot (x_1 \cdot x_2). \tag{2}$$

Комутативні закони:

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1, \tag{3}$$

$$x_1 x_2 = x_2 \cdot x_1. \tag{4}$$

Комутативні закони справедливі для диз’юнкції і кон’юнкції будь-якого числа змінних.

Дистрибутивні закони:

а) дистрибутивність кон’юнкції відносно диз’юнкції (дистрибутивний закон 1-го роду):

$$x_1(x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3; \tag{5}$$

б) дистрибутивність диз’юнкції відносно кон’юнкції (дистрибутивний закон 2-го роду):

$$x_1 + (x_2 \cdot x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3). \qquad (6)$$

Також неважко переконатися у справедливості законів де Моргана (законів інверсії):

$$\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots + \overline{x_m};$$
$$\overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_m} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \ldots \cdot \overline{x_m}.$$

При виконанні логічних операцій у виразах необхідно дотримуватись таких правил:

1) якщо у виразі присутні тільки однакові операції, то їх необхідно проводити у тому порядку, в якому вони записані;

2) якщо у виразі присутні різні операції, то спочатку необхідно проводити операції інверсії, потім – кон'юнкції і, нарешті, – диз'юнкції.

Для зміни пріоритетів проведення логічних операцій використовують дужки.

У загальному випадку, під час мінімізації КНФ булевих функцій комбінаторним методом, використовуються наступні правила алгебри логіки:

Правило склеювання змінних для КНФ логічного виразу.

Кон'юнкція двох сусідніх елементарних диз'юнкцій деякого рангу *p* замінюється однією елементарною диз'юнкцією рангу *p–1*, та є загальною частиною вихідних операндів кон'юнкції. Дане правило є наслідком дистрибутивного закону 2-го роду:

$$(x_1 + x_2 + \overline{x_3} + \overline{x_4})(x_1 + x_2 + \overline{x_3} + x_4) = x_1 + x_2 + \overline{x_3}; \qquad (7)$$

$$(\overline{x_1} + x_2)(x_1 + x_2) = x_2. \qquad (8)$$

Рівносильні образні перетворення комбінаторного методу для правила склеювання КНФ логічного виразу (7), (8) мають ілюстрацію образів (9), (10) відповідно:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \sim \end{vmatrix}; \qquad (9)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sim & 1 \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

Правило напівсклеювання змінних для КНФ логічного виразу.

$$(x_1 + x_2)(x_1 + \overline{x_2} + x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3). \qquad (11)$$

Для доведення розкриємо дужки:

$$(x_1 + x_2)(x_1 + \overline{x_2} + x_3) = x_1 + x_1\overline{x_2} + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 = x_1 + x_2x_3.$$

Отриманий результат знову представимо у КНФ:

$$x_1 + x_2 x_3 = x_1(x_2 + x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3).$$

Отже

$$(x_1 + x_2)(x_1 + \overline{x_2} + x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3).$$

Рівносильні образні перетворення комбінаторного методу для правила напівсклеювання КНФ логічного виразу (11) мають ілюстрацію образу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Правило узагальненого склеювання змінних для КНФ логічного виразу:

$$(x_1 + x_3)(x_2 + \overline{x_3})(x_1 + x_2) = (x_1 + x_3)(x_2 + \overline{x_3}); \tag{13}$$

$$(x_1 + x_3)(x_2 + \overline{x_3}) = (x_1 + x_3)(x_2 + \overline{x_3})(x_1 + x_2). \tag{14}$$

Рівносильні образні перетворення комбінаторного методу для правила узагальненого склеювання КНФ логічного виразу (13), (14) мають ілюстрацію образів (15), (16) відповідно:

$$\begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 0 \end{vmatrix}; \tag{15}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Правило поглинання змінних для КНФ логічного виразу.

Кон'юнкція двох елементарних диз'юнкцій різних рангів, з яких одна є власною частиною іншої, замінюється диз'юнкцією, що має менший ранг. Дане правило є наслідком дистрибутивного закону 2-го роду:

$$(x_1 + x_2 + \overline{x_3} + x_4)(\overline{x_3} + x_4) = \overline{x_3} + x_4; \tag{17}$$

$$\overline{x_2} \cdot (x_1 + \overline{x_2}) = \overline{x_2}. \tag{18}$$

Рівносильні образні перетворення комбінаторного методу для правила поглинання КНФ логічного виразу (17), (18) мають ілюстрацію образів (19), (20) відповідно:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sim & \sim & 0 & 1 \end{vmatrix}; \tag{19}$$

$$\begin{vmatrix} & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sim & 0 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Правило іденподентності змінних для КНФ логічного виразу:

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_2) = x_1 + x_2. \tag{21}$$

Для доведення розкриємо дужки:

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_2) = x_1 + x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2 = x_1 + x_2.$$

Рівносильні образні перетворення комбінаторного методу для правила іденподентності КНФ логічного виразу (21) мають ілюстрацію образу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Якщо у кон'юктивній нормальній формі (КНФ) логічної функції:

$$F = (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)(\overline{x_1} + x_2 + x_3)(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})(x_1 + \overline{x_2} + x_3)(x_1 + x_2 + x_3), \tag{23}$$

змінні з інверсією $\overline{x}_n$ замінити на 0_n, а змінні без інверсії x_n замінити на «1_n», де *n* – числовий індекс, який визначає розрядність символа-змінної «1» або «0» у макстермі логічної функції (23), то отримаємо двійковий еквівалент виразу логічної функції у КНФ:

$$F = \left(0_1 + 0_2 + 0_3\right)\left(0_1 + 0_2 + 1_3\right)\left(0_1 + 1_2 + 1_3\right)\left(1_1 + 0_2 + 0_3\right)\left(1_1 + 0_2 + 1\right)\left(1_1 + 1_2 + 1_3\right). \tag{24}$$

Вираз (24) представимо матрицею:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Диз’юктивну нормально форму (ДНФ) логічної функції:

$$F=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}+\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3+\overline{x_1}x_2x_3+x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}+x_1\overline{x_2}x_3+x_1x_2x_3, \tag{26}$$

можна подати двійковими кодами:

$$F=000+001+011+100+101+111. \tag{27}$$

або матрицею:

$$F=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}. \tag{28}$$

З огляду записів (25) і (28) бачимо, що КНФ і ДНФ логічних функцій представлені матрицями з однаковими комбінаторними структурами. Різниця між зазначеними матрицями полягає у герменевтиці логічних операцій. Матриця (25), що відображає КНФ логічної функції подає макстерми функції та операцію кон’юнкції для них. Матриця (28), що відображає ДНФ логічної функції подає мінтерми функції та операцію диз’юнкції для них.

Оскільки матричні образи дають більше інформації стосовно ортогональності, суміжності, однозначності блоків комбінаторних систем (25) і (28), які є власне таблицями істинності заданих логічних функцій, застосування їх для пошуку об’єктів рівносильного перетворення, під час процесу спрощення логічних функцій, є ефективним.

5.2. Спрощення булевих функцій комбінаторним методом

Рівносильні перетворення структури булевих функцій, що змінюють тільки її форму, а не значення, дозволяють отримувати спрощену схему комбінаційного пристрою. Перетворення структури булевої функції з метою спрощення комбінаційного пристрою, називається її *мінімізацією*.

Приклад 1. Спростити вираз:

$$f=ad+ab+\bar{a}c+\bar{b}cd. \tag{29}$$

За законом узагальненого склеювання:

$$ad+\bar{a}c=ad+\bar{a}c+cd,$$

тому

$$f = ad + ab + \bar{a}c + cd + \bar{b}cd,$$

звідки

$$f = ad + ab + \bar{a}c + cd(1 + \bar{b}) = ad + ab + \bar{a}c + cd.$$

Знову застосуємо закон узагальненого склеювання:

$$ad + \bar{a}c + cd = ad + \bar{a}c,$$

і остаточно отримуємо:

$$f = ad + ab + \bar{a}c.$$

Спрощення алгебричного виразу (29) образними перетвореннями виглядає так:

$$f = \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \end{vmatrix}.$$

Спрощена форма функції:

$$f = ad + ab + \bar{a}c.$$

Під час спрощення виразу (29) образними перетвореннями застосована тотожність (виділено червоним кольором) та двічі закон поглинання.

Приклад 2. Спростити вираз:

$$\begin{aligned} y &= x_1x_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = x_1x_2x_3 + \bar{x}_1x_2(x_3 + \bar{x}_3) + \bar{x}_1\bar{x}_2(x_3 + \bar{x}_3) = \\ &= x_1x_2x_3 + \bar{x}_1x_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 = x_1x_2x_3 + \bar{x}_1(x_2 + \bar{x}_2) = x_1x_2x_3 + \bar{x}_1 = x_2x_3 + \bar{x}_1. \end{aligned} \tag{30}$$

Спрощення алгебричного виразу (30) образними перетвореннями має вигляд:

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 & 1 \\ 0 & & \end{vmatrix}.$$

Спрощена форма функції:

$$y = \overline{x_1} + x_2 x_3.$$

Під час спрощення виразу (30) образними перетвореннями застосований закон супер-склеювання змінних [2] (виділено червоним кольором) та напівсклеювання змінних.

Приклад 3. Спростити вираз:

$$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 x_3. \tag{31}$$

Склеюємо 1-ий та 4-ий, 2-ий та 5-ий, 3-ій та 6-ий мінтерми:

$$y = \overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_2} x_3 + x_2 x_3.$$

Продовжимо спрощення виразу. Застосуємо до другого мінтерму аксіому:

$$\overline{x_2} x_3 = \overline{x_2} x_3 + \overline{x_2} x_3. \tag{32}$$

та підставимо в отриманий результат, тоді:

$$y = \left(\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_2} x_3\right) + \left(\overline{x_2} x_3 + x_2 x_3\right) = \overline{x_2}\left(\overline{x_3} + x_3\right) + x_3\left(\overline{x_2} + x_2\right) = \overline{x_2} + x_3.$$

Це й є шукане спрощення виразу (31). Для його отримання ще раз застосований закон склеювання.

Спрощення алгебричного виразу (31) образними перетвореннями має вигляд:

$$y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 0 & \\ & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 0 & \\ & & 1 \end{vmatrix}.$$

Спрощена форма функції:

$$y = \overline{x_2} + x_3.$$

Під час спрощення виразу (31) образними перетвореннями застосований закон супер-склеювання змінних [2] (виділено червоним кольором), просте склеювання (виділено синім кольором) та напівсклеювання змінних.

Інший варіант спрощення виразу (31) образними перетвореннями є такий:

$$y=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & 0 & 0 \\ & & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & 0 & \\ & & 1 \end{vmatrix}.$$

Результат спрощення виразу (31) двома варіантами однаковий.

Отримані результати спрощення булевих функцій у прикладах 1–3 образними перетвореннями збігаються з результатом спрощення, отриманими за допомогою алгебричного методу, однак процес спрощення функцій образними перетвореннями є простішим.

5.3. Метод Нельсона

Метод дозволяє отримати скорочену ДНФ булевої функції F з її довільної КНФ. Алгоритм методу зводиться до розкриття дужок довільної КНФ булевої функції F з наступним проведенням всіх поглинань. У результаті буде отримано скорочену ДНФ булевої функції F.

Приклад 4. Знайти методом Нельсона спрощену ДНФ функції F, задану у КНФ:

$$F=(x_1+\overline{x_2})(\overline{x_1}+x_3)(x_1+x_2+\overline{x_3}). \tag{33}$$

Після розкриття дужок отримуємо:

$$\begin{aligned} F&=(x_1x_3+\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_2}x_3)(x_1+x_2+\overline{x_3})= \\ &=x_1x_3+x_1x_2x_3+\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}+x_1\overline{x_2}x_3). \end{aligned} \tag{34}$$

Після проведення всіх поглинань отримуємо спрощену ДНФ функції F:

$$F=x_1x_3+\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}. \tag{35}$$

Зазначимо, що для спрощення булевої функції (34) можна застосувати образні перетворення:

$$F=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & & 1 \end{vmatrix}.$$

Спрощена форма функції:

$$F=x_1x_3+\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}. \tag{36}$$

Для спрощення функції (34) образними перетвореннями двічі застосовано поглинання. Результат спрощення (36) отриманий образними перетвореннями збігається з результатом (35), отриманим методом Нельсона.

6. Результати дослідження

При мінімізації КНФ алгебричним методом досить часто (але не завжди!) вдається отримати кращі результати, якщо «нарощувати» задану КНФ використовуючи властивість ідемпотентності диз'юнкції: $xx = x$.

Приклад 5. Мінімізувати КНФ функції, що задана досконалою кон'юктивною нормальною формою (ДКНФ):

$$F(x_1,x_2,x_3) = (\overline{x_1} + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}). \tag{37}$$

Спочатку мінімізуємо функцію $F(x_1,x_2,x_3)$, застосовуючи закони склеювання. Виберемо один із можливих варіантів склеювання змінних, наприклад (диз'юнкції, що можна склеїти підкреслені):

$$F(x_1,x_2,x_3) = \underline{(\overline{x_1} + x_2 + x_3)}\underline{(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)}(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}),$$

і мінімізуємо КНФ:

$$F(x_1,x_2,x_3) = (\overline{x_1} + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}). \tag{38}$$

Добавимо другу диз'юнкцію ще раз у вираз (37). Це не змінить саму булеву функцію, але у результаті такого «нарощення» функції отримаємо мінімальну КНФ з більш коротким її представленням, порівняно з (38) [15]:

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2,x_3) &= (\overline{x_1} + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)\times \\ &\times(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) = (\overline{x_1} + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2}). \end{aligned} \tag{39}$$

Метод образних перетворень мінімізації КНФ булевих функцій дозволяє отримати результат мінімізації (39) без додаткового «нарощення» заданої функції (37):

$$F(x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ 0 & 0 & \end{vmatrix}.$$

Мінімізована КНФ функції $F(x_1,x_2,x_3)$:

$$F(x_1,x_2,x_3) = (\overline{x_1} + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2}). \tag{40}$$

У першій матриці застосована операція склеювання змінних (виділено червоним кольором), у другій матриці проведено напівсклеювання змінних. Результати мінімізації (39) та (40) співпадають. На відміну від алгебричного методу, образні перетворення мають ширші можливості стосовно спрощення мінімізації КНФ булевих функцій.

Приклад 6. Мінімізувати КНФ булевої функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ методом Нельсона, задану наступною таблицею істинності:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Pi(4,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11).$$

Примітка: значення в П є макстермами для рядків, коли функція $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ повертає «0» на виході (табл. 1).

Таблиця 1

Таблиця істинності функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$

№ з/п	X_1	X_2	X_3	X_4	F
4	0	1	0	0	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
9	1	0	0	1	0
11	1	0	1	1	0

Виходячи з таблиці істинності (табл. 1), згідно з методом Нельсона, проведемо інверсію змінних у блоках табл. 1, що, таким чином, дасть КНФ заданої булевої функції. Мінімізацію отриманої КНФ функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ проведемо двома варіантами.

Варіант перший. Мінімізація КНФ булевої функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$, що задана табл. 1, алгебричним методом:

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (x_1+\overline{x_2}+x_3+x_4)(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}+x_4)\times\\ &\times(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}+\overline{x_4})(\overline{x_1}+x_2+x_3+\overline{x_4})(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3}+\overline{x_4});\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}&(x_1+\overline{x_2}+x_3+x_4)(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}+x_4) = x_1+x_1\overline{x_2}+x_1\overline{x_3}+x_1x_4+\\ &+x_1\overline{x_2}+\overline{x_2}+\overline{x_2}\,\overline{x_3}+\overline{x_2}x_4+x_1x_3+\overline{x_2}x_3+x_3x_4+\\ &+x_1x_4+\overline{x_2}x_4+\overline{x_3}x_4+x_4 = x_1+\overline{x_2}+x_4;\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}&(\overline{x_1}+x_2+x_3+\overline{x_4})(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3}+\overline{x_4}) = \overline{x_1}+\overline{x_1}x_2+\overline{x_1}\,\overline{x_3}+\overline{x_1}\,\overline{x_4}+\\ &+\overline{x_1}x_2+x_2+x_2\overline{x_3}+x_2\overline{x_4}+\overline{x_1}x_3+x_2x_3+x_3\overline{x_4}+\\ &+\overline{x_1}\,\overline{x_4}+x_2\overline{x_4}+\overline{x_3}\,\overline{x_4}+\overline{x_4} = \overline{x_1}+x_2+\overline{x_4}.\end{aligned} \tag{43}$$

Враховуючи результати (42) та (43) перепишемо функцію (41):

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+\overline{x_2}+x_4)(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}+\overline{x_4})(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_4}). \qquad (44)$$

Функція (44) допускає два варіанти продовження її мінімізації.

У *першому варіанті* продовжуємо використовувати метод Нельсона, для чого розкриємо дужки виразу (44):

$$(x_1+\overline{x_2}+x_4)(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}+\overline{x_4})=x_1+x_1\overline{x_2}+x_1\overline{x_3}+x_1\overline{x_4}+$$
$$+x_1\overline{x_2}+\overline{x_2}+\overline{x_2}\,\overline{x_3}+\overline{x_2}\,\overline{x_4}+x_1x_4+\overline{x_2}x_4+\overline{x_3}x_4=x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}x_4;$$

$$(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}\,x_4)(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_4})=x_1x_2+x_1\overline{x_4}+$$
$$+\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_2}\,\overline{x_4}+\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4+x_2\overline{x_3}\,x_4.$$

Всі можливі перетворення, що скорочують задану функцію вичерпані. Таким чином, отримана скорочена ДНФ заданої функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ алгебричним методом:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_1\overline{x_4}+\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_2}\,\overline{x_4}+\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4+x_2\overline{x_3}\,x_4. \qquad (45)$$

У *другому варіанті* для мінімізації функції (44) застосуємо образні перетворення:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{vmatrix} x_1 & \overline{x_1} & & x_4 \\ x_1 & \overline{x_2} & \overline{x_3} & \overline{x_4} \\ \overline{x_1} & x_2 & & \overline{x_4} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & \overline{x_1} & & x_4 \\ x_1 & \overline{x_2} & \overline{x_3} & \\ \overline{x_1} & x_2 & & \overline{x_4} \end{vmatrix}.$$

Мінімізована КНФ функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+\overline{x_2}+x_4)(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3})(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_4}). \qquad (46)$$

У першій матриці проведена операція напівсклеювання змінних. Порівняно з (44), функція (46) є простішою. Розкриємо дужки у виразі (46):

$$(x_1+\overline{x_2}+x_4)(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3})=x_1+x_1\overline{x_2}+x_1\overline{x_3}+x_1\overline{x_2}+$$
$$+\overline{x_2}+\overline{x_2}\,\overline{x_3}+x_1x_4+\overline{x_2}x_4+\overline{x_3}x_4=x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}x_4;$$

$$(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}\,x_4)(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_4})=x_1x_2+x_1\overline{x_4}+$$
$$+\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_2}\,\overline{x_4}+\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4+x_2\overline{x_3}\,x_4.$$

Отримана скорочена ДНФ функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$, що задана табл. 1:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_1\overline{x_4}+\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_2}\,\overline{x_4}+\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4+x_2\overline{x_3}\,x_4. \qquad (47)$$

Результати спрощення (45) і (47) співпадають.

Варіант другий. Мінімізація КНФ булевої функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$, що задана табл. 1, образними перетвореннями:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left|\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & & 0 \end{array}\right|.$$

Всі можливі перетворення, що скорочують задану функцію вичерпані. Отримана скорочена КНФ функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ образними перетвореннями:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+\overline{x_2}+x_4)(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3})(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_4}). \tag{48}$$

Згідно з методом Нельсона розкриємо дужки у виразі (48) та представимо його у ДНФ:

$$(x_1+\overline{x_2}+x_4)(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3})=x_1+x_1\overline{x_2}+x_1\overline{x_2}+$$
$$+x_1\overline{x_2}+\overline{x_2}+\overline{x_2}\,\overline{x_3}+x_1x_4+\overline{x_2}x_4+\overline{x_3}x_4=x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}x_4;$$

$$(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}x_4)(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_4})=x_1x_2+x_1\overline{x_4}+\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_2}\,\overline{x_4}+\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4+x_2\overline{x_3}x_4.$$

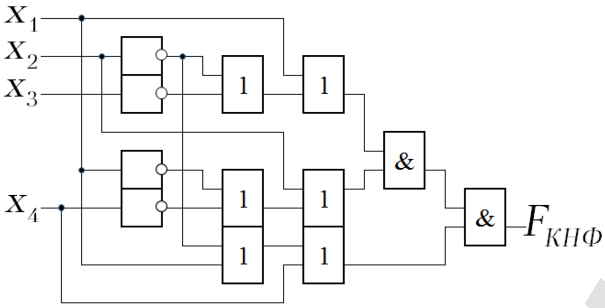
Подальші скорочення вже неможливі. Отримана спрощена ДНФ функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$, що задана табл. 1:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_1\overline{x_4}+\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_2}\,\overline{x_4}+\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4+x_2\overline{x_3}x_4. \tag{49}$$

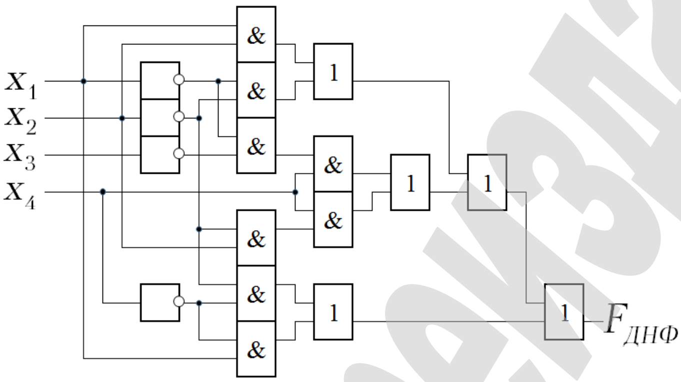
Результати спрощення (45) та (49) співпадають, однак процес спрощення КНФ функції у другому варіанті (образними перетвореннями) є простішим.

Зазначимо також, що КНФ функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ (48), порівняно з ДНФ функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ (49), містить менше число логічних операцій та інверсій. Таким чином, при однаковій функціональності виразів (49) і (48), останній має простішу структуру (рис. 1, *а*).

Споглядаючи рис. 1 легко бачити, що реалізація структури мінімальної КНФ функції логічними 2-входовими елементами є простішою, порівняно з реалізацією мінімальної структури ДНФ 2-входовими логічними елементами, як за складністю, так і за глибиною схеми.



а



б

Рис. 1. Реалізація мінімальної: *а* – кон'юктивна нормальна форма; *б* – диз'юктивна нормальна форма булевої функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ на типових 2-входових логічних елементах

У табл. 2 представлена функціональність мінімізованих КНФ та ДНФ функції, що задана табл. 1.

Таблиця 2

Таблиця істинності функцій $F_{КНФ}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \overline{x_2} + x_4)(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_4})$,

$F_{ДНФ}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_1 \overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_2}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_3}\, x_4 + x_2 \overline{x_3}\, x_4$

№ з/п	X_1	X_2	X_3	X_4	$F_{КНФ}$	$F_{ДНФ}$
0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
2	0	0	1	0	1	1
3	0	0	1	1	1	1
5	0	1	0	1	1	1
8	1	0	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1	1
12	1	1	0	0	1	1
13	1	1	0	1	1	1
14	1	1	1	0	1	1
15	1	1	1	1	1	1
№ з/п	X_1	X_2	X_3	X_4	$F_{КНФ}$	$F_{ДНФ}$
4	0	1	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0
7	0	1	1	1	0	0
9	1	0	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0	0

З огляду табл. 2 бачимо, що мінімальна КНФ і ДНФ функції володіють однаковою функціональністю, однак КНФ мінімальної функції має простішою структуру (рис. 1, *а*).

Приклад 7. Мінімізувати КНФ функції, що задана ДКНФ:

$$
\begin{aligned}
&F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)(x_1+x_2+x_3+x_4+\overline{x_5})\times\\
&\times(x_1+x_2+\overline{x_3}+x_4+x_5)(x_1+x_2+\overline{x_3}+\overline{x_4}+x_5)(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}+x_4+x_5)\times\\
&\times(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}+\overline{x_4}+x_5)(\overline{x_1}+x_2+x_3+x_4+x_5)(\overline{x_1}+x_2+x_3+x_4+\overline{x_5})\times\\
&\times(\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}+x_4+x_5)(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3}+\overline{x_4}+\overline{x_5}).
\end{aligned}
$$

Дана функція повертає нуль на таких наборах: (0,0,0,0,0), (0,0,0,0,1), (0,0,1,0,0), (0,0,1,1,0), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (1, 1, 1,0,0), (1, 0, 1, 1, 1).

Мінімізуємо КНФ заданої функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ образними перетвореннями:

$$
F=\begin{vmatrix}
1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&0\\
1&1&0&1&1\\
1&1&0&0&1\\
1&0&0&1&1\\
1&0&0&0&1\\
0&1&1&1&1\\
0&1&1&1&0\\
0&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
 &1&1&1& \\
1& &0& &1\\
0&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
 &1&1&1& \\
1& &0& &1\\
 &0&0&1&1\\
0&1&0&0&0
\end{vmatrix}.
$$

Мінімізована КНФ функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$:

$$
\begin{aligned}
&F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_2+x_3+x_4)(x_1+\overline{x_3}+x_5)\times\\
&\times(\overline{x_2}+\overline{x_3}+x_4+x_5)(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3}+\overline{x_4}+\overline{x_5}).
\end{aligned}
$$

Операція супер-склеювання змінних у першій матриці проведена для блоків, які виділені червоним та синім кольором. У другій матриці проведена операція напівсклеювання змінних.

6.1. Застосування образних перетворень для встановлення ознаки мінімальної логічної функції

Встановлення ознаки мінімальної логічної функції зводиться до проведення мінімізації функції з наборів таблиці істинності, при яких функція повертає «1» на виході та для наборів таблиці істинності, при яких функція повертає «0» на виході. При безпомилкових розрахунках мінімальної функції у двох випадках результат мінімізації буде однаковий. Для зазначеного порівняння необхідно враховувати те, що задана логічна функція може мати декілька *мінімальних функцій. У зв'язку з цим, в окремих випадках, результати мінімізації логічної функції у ДНФ і КНФ можуть відрізнятися, наприклад, в одній змінній, однак обидві мінімізовані функції будуть мінімальні.*

Приклад 8. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ образними перетвореннями, яка задана наступною таблицею істинності:

F=Σ(1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 26, 28, 30, 31)

та встановити ознаку мінімальної функції.

Примітка: значення в Σ є мінтермами для рядків, коли функція $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ повертає «1» на виході.

Процедуру мінімізації булевої функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ будемо проводити до тих пір, поки не будуть вичерпані всі перетворення, що мінімізують дану функцію:

$$F_{ДНФ}=\left|\begin{array}{r|ccccc}
1 & 0&0&0&0&1\\
2 & 0&0&0&1&0\\
3 & 0&0&0&1&1\\
4 & 0&0&1&0&0\\
5 & 0&0&1&0&1\\
7 & 0&0&1&1&1\\
9 & 0&1&0&0&1\\
11 & 0&1&0&1&1\\
12 & 0&1&1&0&0\\
13 & 0&1&1&0&1\\
14 & 0&1&1&1&0\\
15 & 0&1&1&1&1\\
16 & 1&0&0&0&0\\
17 & 1&0&0&0&1\\
18 & 1&0&0&1&0\\
20 & 1&0&1&0&0\\
22 & 1&0&1&1&0\\
26 & 1&1&0&1&0\\
28 & 1&1&1&0&0\\
30 & 1&1&1&1&0\\
31 & 1&1&1&1&1
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc}
0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&1\\
0&0&1&0&1\\
0&0&1&1&1\\
0&1&0&0&1\\
0&1&0&1&1\\
0&1&1&0&1\\
0&1&1&1&0\\
0&1&1&1&1\\
1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1\\
1&0&0&1&0\\
1&0&1&1&0\\
1&1&0&1&0\\
1&1&1&1&0\\
1&1&1&1&1\\
 & &1&0&0
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc}
0& & & &1\\
0&0&0&1& \\
0&1&1&1& \\
1&0&0&0& \\
1& & &1&0\\
1&1&1&1& \\
 & &1&0&0
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc}
0& & & &1\\
0&0&0&1& \\
 &1&1&1& \\
1&0&0&0& \\
1& & &1&0\\
 & &1&0&0
\end{array}\right|.$$

Операція супер-склеювання змінних у першій матриці проведена для блоків 4, 12, 20, 28, які виділені червоним кольором. Мінімізація блоків у другій матриці, що виділені синім та зеленим кольором, проведена за протоколами мінімізації 5-розрядних булевих функцій [3].

Спроби подальшого застосування операцій алгебричного перетворення не дають поліпшеного результату. Отже, отримана мінімальна форма логічної функції набуває вигляду:

$$F_{ДНФ} = \bar{x}_1 x_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_4 \bar{x}_5 + x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5. \quad (50)$$

Для мінімізації функції з наборів таблиці істинності, при яких функція повертає «0» на виході, застосовується метод Нельсона. Це передбачає мінімізацію функції у КНФ з відповідними інверсіями змінних у блоках та з подальшим перетворенням результату мінімізації у ДНФ функції. Набори таблиці істинності, при яких функція $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ повертає «0» на виході, визначаються наступною таблицею істинності:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \Pi(0,\ 6,\ 8,\ 10,\ 19,\ 21,\ 23,\ 24,\ 25,\ 27,\ 29). \quad (51)$$

Проведемо інверсію змінних у блоках таблиці істинності (51), після чого проведемо мінімізацію КНФ функції образними перетвореннями:

$$F_{КНФ} = \left|\begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 19 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 23 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 25 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 27 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 29 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & y_2 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & y_3 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 & y_4 \\ 0 & & 1 & 0 & 0 & y_5 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & y_6 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & y_7 \end{array}\right|. \quad (52)$$

Блоки першої матриці 19, 21, 23, 25, 27, 29 (виділені синім кольором) мінімізуються за протоколом мінімізації 5-розрядних булевих функцій [3]:

$$\left|\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc} 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{array}\right|. \quad (53)$$

Згідно з методом Нельсона, результат мінімізації (остання матриця) запису (52) записуємо у КНФ мінімальної функції:

$$F_{КНФ} = y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7,$$

після чого розкриваємо дужки і перетворюємо його у ДНФ мінімальної булевої функції.

Для подальших алгебричних викладок у прикладі 8 зробимо такі заміни змінних:

– x_n замінимо на 1_n;

– $\overline{x}_n$ замінимо на 0_n,

де *n* – індекс, який визначає розрядність символа-змінної «1» або «0» у мінтермі логічної функції.

Перевага зазначеної заміни полягає у тому, що символ-змінна «0» не потребує додаткового символу інверсії, що спрощує подальше обчислення.

Після вище зазначеної заміни змінних та згідно з методом Нельсона перемножимо змінні у блоках КНФ мінімізованої булевої функції (52):

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= (1_1 + 1_3 + 1_4 + 1_5)(1_1 + 1_2 + 0_3 + 0_4 + 1_5) = 1_1 + 1_1 1_2 + 1_1 0_3 + 1_1 0_4 + 1_1 1_5 + \\ &+ 1_1 1_3 + 1_2 1_3 + 1_3 0_4 + 1_3 1_5 + 1_1 1_4 + 1_2 1_4 + 0_3 1_4 + 1_4 1_5 + 1_1 1_5 + 1_2 1_5 + \\ &+ 0_3 1_5 + 0_4 1_5 + 1_5 = 1_1 + 1_2 1_3 + 1_3 0_4 + 1_2 1_4 + 0_3 1_4 + 1_5. \end{aligned} \tag{54}$$

Множення змінних першого рядка y_1, результуючої матриці (52), на другий її рядок y_2 здійснюється за правилами алгебри логіки:

$$1_1 \cdot 1_1 \rightarrow 1_1, \quad 1_1 \cdot 1_2 \rightarrow 1_1 1_2, \quad 1_1 \cdot 0_3 \rightarrow 1_1 0_3,$$

і т. д., де нижні числові індекси визначають розрядність символа-змінної «1» або «0» у мінтермі логічної функції.

Головним завданням мінімізації функції у ДНФ та КНФ є пошук термів, придатних до тієї чи іншої алгебричної операції, в основному до склеювання змінних з наступним поглинанням. Однак при збільшенні кількості змінних алгебричного виразу такий пошук може виявитися досить складним. При спрощенні логічних формул не завжди очевидно, який із законів алгебри логіки необхідно застосувати на тому чи іншому кроці.

У свою чергу, образні перетворення комбінаторного методу, завдяки притаманній їм наглядності, дозволяють до певної міри вирішувати цю проблему. В окремих випадках апарат образних перетворень є єдиним засобом продовжити оптимальне спрощення логічного виразу.

Оскільки отриманий логічний вираз (54) набув тієї складності, коли вже не очевидно, який із законів алгебри логіки необхідно використати, застосуємо наглядний апарат образних перетворень комбінаторного методу:

$$y_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & 1 & & 1 & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидним є застосування узагальненого склеювання змінних (один із варіантів застосування узагальненого склеювання змінних виділено червоним кольором). У підсумку отримуємо спрощений логічний вираз:

$$y_{1,2} = 1_1 + 1_2 1_3 + 1_3 0_4 + 0_3 1_4 + 1_5. \tag{55}$$

$$\begin{aligned} y_{3,4} &= (0_2 + 1_3 + 1_4 + 1_5)(1_1 + 0_2 + 1_3 + 1_5) = 1_1 0_2 + 0_2 + 0_2 1_3 + 0_2 1_5 + 1_1 1_3 + 0_2 1_3 + 1_3 + \\ &+ 1_3 1_5 + 1_1 1_4 + 0_2 1_4 + 1_3 1_4 + 1_4 1_5 + 1_1 1_5 + 0_2 1_5 + 1_3 1_5 + 1_5 = 0_2 + 1_3 + 1_1 1_4 + 1_5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{5,6} &= (0_1 + 1_3 + 0_4 + 0_5)(0_1 + 1_2 + 0_3 + 0_5) = 0_1 + 0_1 1_2 + 0_1 0_3 + 0_1 0_5 + 0_1 1_3 + 1_2 1_3 + 1_3 0_5 + \\ &+ 0_1 0_4 + 1_2 0_4 + 0_3 0_4 + 0_4 0_5 + 0_1 0_5 + 1_2 0_5 + 0_3 0_5 + 0_5 = 0_1 + 1_2 1_3 + 1_2 0_4 + 0_3 0_4 + 0_5. \end{aligned} \tag{56}$$

До виразу (56) застосуємо образні перетворення комбінаторного методу:

$$y_{5,6} = \left| \begin{array}{ccccc} 0 & & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccc} 0 & & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 \end{array} \right| .$$

Після застосування узагальненого склеювання змінних (виділено червоним кольором) отримуємо спрощений логічний вираз:

$$y_{5,6} = 0_1 + 1_2 1_3 + 0_3 0_4 + 0_5. \tag{57}$$

$$\begin{aligned} y_{1,2,3,4} &= y_{1,2} \cdot y_{3,4} = (1_1 + 1_2 1_3 + 1_3 0_4 + 0_3 1_4 + 1_5)(0_2 + 1_3 + 1_1 1_4 + 1_5) = 1_1 0_2 + 1_1 1_3 + 1_1 1_4 + \\ &+ 1_1 1_5 + 1_2 1_3 + 1_1 1_2 1_3 1_4 + 1_2 1_3 1_5 + 0_2 1_3 0_4 + 1_3 0_4 + 1_3 0_4 1_5 + 0_2 0_3 1_4 + 1_1 0_3 1_4 + 0_3 1_4 1_5 + \\ &+ 0_2 1_5 + 1_3 1_5 + 1_1 1_4 1_5 + 1_5 = 1_1 0_2 + 1_1 1_3 + 1_1 1_4 + 1_2 1_3 + 1_3 0_4 + 0_2 0_3 1_4 + 1_5. \end{aligned} \tag{58}$$

До виразу (58) застосуємо образні перетворення комбінаторного методу:

$$y_{1,2,3,4} = \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ 1 & & & 1 & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & & & \\ 1 & & & 1 & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & 1 \end{array} \right| .$$

Після застосування узагальненого склеювання змінних (виділено червоним кольором) дістаємо наступний спрощений логічний вираз:

$$y_{1,2,3,4} = 1_1 0_2 + 1_1 1_4 + 1_2 1_3 + 1_3 0_4 + 0_2 0_3 1_4 + 1_5. \tag{59}$$

$$y_{5,6,7} = y_{5,6} \cdot y_7 = (0_1 + 1_2 1_3 + 0_3 0_4 + 0_5)(0_1 + 0_2 + 1_4 + 0_5) = 0_1 +$$
$$+ 0_1 0_2 + 0_1 1_4 + 0_1 0_5 + 0_1 1_2 1_3 + 1_2 1_3 1_4 + 1_2 1_3 0_5 + 0_1 0_3 0_4 + 0_2 0_3 0_4 +$$
$$+ 0_3 0_4 0_5 + 0_1 0_5 + 0_2 0_5 + 1_4 0_5 + 0_5 = 0_1 + 1_2 1_3 1_4 + 0_2 0_3 0_4 + 0_5.$$

$$\begin{aligned} y_{1,2,3,4,5,6,7} &= y_{1,2,3,4} \cdot y_{5,6,7} = F_{ДНФ} = (1_1 0_2 + 1_1 1_4 + 1_2 1_3 + 1_3 0_4 + 0_2 0_3 1_4 + 1_5) \times \\ &\times (0_1 + 1_2 1_3 1_4 + 0_2 0_3 0_4 + 0_5) = 1_1 0_2 0_3 0_4 + 1_1 0_2 0_5 + 1_1 1_2 1_3 1_4 + 1_1 1_4 0_5 + 0_1 1_2 1_3 + \\ &+ 1_2 1_3 1_4 + 1_2 1_3 0_5 + 0_1 1_3 0_4 + 1_3 0_4 0_5 + 0_1 0_2 0_3 1_4 + 0_2 0_3 1_4 0_5 + 0_1 1_5 + 1_2 1_3 1_4 1_5 + \\ &+ 0_2 0_3 0_4 1_5 = 1_1 0_2 0_3 0_4 + 1_1 0_2 0_5 + 1_1 1_4 0_5 + 0_1 1_2 1_3 + 1_2 1_3 1_4 + 1_2 1_3 0_5 + 0_1 1_3 0_4 + \\ &+ 1_3 0_4 0_5 + 0_1 0_2 0_3 1_4 + 0_2 0_3 1_4 0_5 + 0_1 1_5 + 0_2 0_3 0_4 1_5. \end{aligned} \tag{60}$$

До виразу (60) застосуємо образні перетворення комбінаторного методу:

$$F_{ДНФ} = \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 1 & & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 1 & & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{array}\right|.$$

У першій матриці двічі застосовано узагальнене склеювання змінних. Для дидактичної зручності образних перетворень права матриця переписана до нового рядка, оскільки поточна процедура спрощення використовує спільний блок:

$$F_{ДНФ} = \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 1 & & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 1 & & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{array}\right|.$$

Така ж операція виконується знову, оскільки поточна процедура спрощення використовує спільний блок:

$$F_{ДНФ}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\\1&0&&&0\\1&&&1&0\\0&1&1&&\\&1&1&1&\\&1&1&&0\\&&1&0&0\\0&0&0&1&\\0&&&&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\\1&0&&&0\\1&&&1&0\\&1&1&1&\\&1&1&&0\\&&1&0&0\\0&0&0&1&\\0&&&&1\end{vmatrix}.$$

$$F_{ДНФ}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\\1&0&&&0\\1&&&1&0\\&1&1&1&\\&1&1&&0\\&&1&0&0\\0&0&0&1&\\0&&&&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\\1&0&&&0\\1&&&1&0\\&1&1&1&\\&1&1&1&0\\&1&1&0&0\\&&1&0&0\\0&0&0&1&\\0&&&&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\\1&0&&&0\\1&&&1&0\\&1&1&1&\\&&1&0&0\\0&0&0&1&\\0&&&&1\end{vmatrix}.$$

$$F_{ДНФ}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\\1&0&&&0\\1&&&1&0\\&1&1&1&\\&&1&0&0\\0&0&0&1&\\0&&&&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\\1&0&&0&0\\1&0&&1&0\\1&&&1&0\\&1&1&1&\\&&1&0&0\\0&0&0&1&\\0&&&&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\\1&0&&0&0\\1&&&1&0\\&1&1&1&\\&&1&0&0\\0&0&0&1&\\0&&&&1\end{vmatrix}.$$

$$F_{ДНФ}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\\1&0&&0&0\\1&&&1&0\\&1&1&1&\\&&1&0&0\\0&0&0&1&\\0&&&&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\\1&&&1&0\\&1&1&1&\\&&1&0&0\\0&0&0&1&\\0&&&&1\end{vmatrix}.$$

Спроби подальшого застосування операцій образного перетворення не дають поліпшення результату. Отже, після здійснення мінімізації КНФ (52) методом Нельсона за допомогою образних перетворень була отримана наступна мінімальна ДНФ функції:

$$F_{ДНФ} = \overline{x_1}x_5 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + x_2x_3x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1x_4\overline{x_5} + x_3\overline{x_4}\,\overline{x_5}. \tag{61}$$

Функції (50) і (61) співпадають, що згідно з ознакою мінімальної функції вказує на те, що процедурою мінімізації отримано мінімальну булеву функцію. Оскільки ДНФ мінімальної функції (50) є простішою, порівняно з КНФ мінімальної функції (52), оптимальною для застосування у цифровій технології слід вважати булеву функція (50).

З вищенаведених прикладів випливає, що зі збільшенням розрядності булевої функції зростає відносна ефективність застосування образних перетворень для мінімізації КНФ функцій, завдяки уніфікації оригінальних процедур та встановлення ознаки мінімальної логічної функції.

6.2. Застосування образних перетворень для мінімізації булевих функцій на повній таблиці істинності

Мінімізація ДНФ або КНФ булевих функцій проводиться на відповідних наборах змінних таблиці істинності. Однак, результати мінімізації булевих функцій у прикладах 6 і 8 засвідчують, що для отримання оптимального з погляду практичної реалізації вищеописаного методу у цифровій технології мінімізацію доцільно здійснювати у двох нормальних формах – ДНФ і КНФ, використовуючи повну таблицю істинності заданої функції. Повна таблиця істинності вміщує набори змінних, при яких функція повертає «1» або «0» на виході. Мінімальну функцію слід обирати за результатами мінімізації двох нормальних формах – ДНФ і КНФ.

Приклад 9. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ на повній таблиці істинності образними перетвореннями у двох нормальних формах – ДНФ і КНФ, яка задана у канонічній формі [16]:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(0,1,6,8,11,14,15). \tag{62}$$

Мінімальну функцію обрати за результатами мінімізації двох нормальних форм – ДНФ і КНФ.

Мінімізація ДНФ заданої функції ілюструється образними перетвореннями:

$$F_{ДНФ} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 8 \\ 11 \\ 14 \\ 15 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\Bigg| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Мінімізована ДНФ функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$F_{ДНФ} = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_2x_3\bar{x}_4 + x_1x_3x_4. \qquad (63)$$

Результати мінімізації ДНФ функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ за допомогою паралельного розчеплення кон’юнктермів [16] та методом образних перетворень представлені у табл. 3.

Таблиця 3

Результат мінімізації функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$

Методом паралельного розчеплення кон’юнктермів	Метод образних перетворень
$\{(000\sim),(\sim 000),(\sim 110),(1\sim 11)\}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix}$

З табл. 3 можна бачити, що результати мінімізації двох порівнюваних методів однакові. Збігається й показник мінімізації $k_\theta / k_l = 4/12$, де k_θ – число простих імплікант, k_l – число вхідних змінних. Однак, обчислювальна складність мінімізації булевої функції образними перетвореннями є меншою.

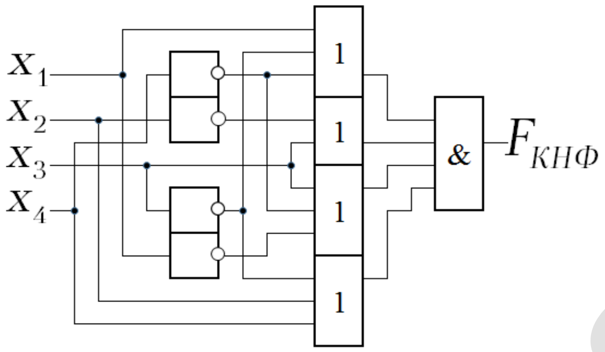
Мінімізація КНФ заданої функції:

$$F_{КНФ} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \\ 0 & & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

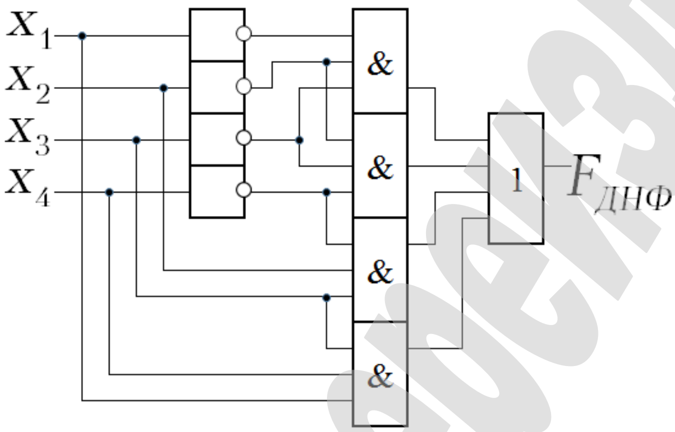
Мінімізована КНФ функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$:

$$F_{КНФ} = (x_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + x_3 + \bar{x}_4)(x_2 + \bar{x}_3 + x_4)(\bar{x}_2 + x_3). \qquad (64)$$

Мінімальна КНФ функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ (64) містить менше число літералів, порівняно з мінімальною ДНФ функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ (63). Отже, при однаковій функціональності виразів (63) і (64) (табл. 4) останній відповідає простішій структурі (рис. 2, *а*).



а



б

Рис. 2. Реалізація мінімальної: *а* – кон'юктивна нормальна форма; *б* – диз'юктивна нормальна форма булевої функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ комбінаційною схемою

З рис. 2 бачимо, що реалізація комбінаційною схемою мінімальної КНФ булевої функції (рис. 2, *а*) є простішою, оскільки містить 2-входовий логічний елемент АБО, які відсутні на схемі, що реалізує мінімальну ДНФ булевої функції (рис. 2, *б*).

У табл. 4 представлена функціональність мінімізованих КНФ та ДНФ функції, що задана канонічною формою (62).

Таблиця 4

Таблиця істинності функцій

$$F_{КНФ}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \overline{x_3} + \overline{x_4})(\overline{x_1} + x_3 + \overline{x_4})(x_2 + \overline{x_3} + x_4)(\overline{x_2} + x_3),$$

$$F_{ДНФ}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 x_3 x_4$$

№ з/п	X_1	X_2	X_3	X_4	$F_{КНФ}$	$F_{ДНФ}$
0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
6	0	1	1	0	1	1
8	1	0	0	0	1	1
11	1	0	1	1	1	1
14	1	1	1	0	1	1
15	1	1	1	1	1	1

Продовження таблиці 4

№ з/п	X_1	X_2	X_3	X_4	$F_{КНФ}$	$F_{ДНФ}$
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0
4	0	1	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0
7	0	1	1	1	0	0
9	1	0	0	1	0	0
10	1	0	1	0	0	0
12	1	1	0	0	0	0
13	1	1	0	1	0	0

З огляду табл. 4 бачимо, що мінімальні КНФ і ДНФ функції володіють однаковою функціональністю, однак КНФ мінімальної функції має на один літерал менше.

За результатами мінімізації двох нормальних формах – ДНФ і КНФ заданої функції, мінімальну функцію обираємо у КНФ (64).

Приклад 10. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ образними перетвореннями на повній таблиці істинності у двох нормальних формах – ДНФ і КНФ, яка задана наступною таблицею істинності:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(1,3,6,7,8,10,14,15).$$

Мінімальну функцію обрати за результатами мінімізації двох нормальних форм – ДНФ і КНФ.

Нижче приведена мінімізація ДНФ заданої функції методом образних перетворень:

$$F_{ДНФ} = \left|\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & & 1 \\ & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & & 0 \end{array}\right|. \qquad (65)$$

Мінімізована ДНФ функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$F_{ДНФ} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_4 + x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_4}. \qquad (66)$$

Мінімізація КНФ заданої функції:

$$F_{КНФ}=\left|\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 11 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & & 1 \\ & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & & 0 \end{array}\right|.$$

Мінімізована КНФ функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$:

$$F_{КНФ}=(x_1+x_2+x_4)(\overline{x_2}+x_3)(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_4}). \tag{67}$$

Перетворимо мінімальну КНФ (67) у ДНФ:

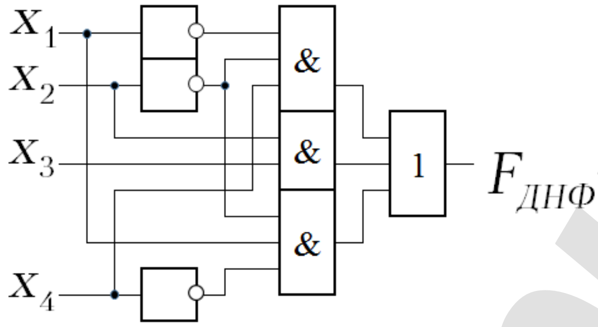
$$(x_1+x_2+x_4)(\overline{x_2}+x_3)=x_1\overline{x_2}+x_1x_3+x_2x_3+\overline{x_2}x_4+x_3x_4.$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & & \\ 1 & & 1 & \\ & 1 & 1 & \\ & 0 & & 1 \\ & & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & & \\ & 1 & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{array}\right|.$$

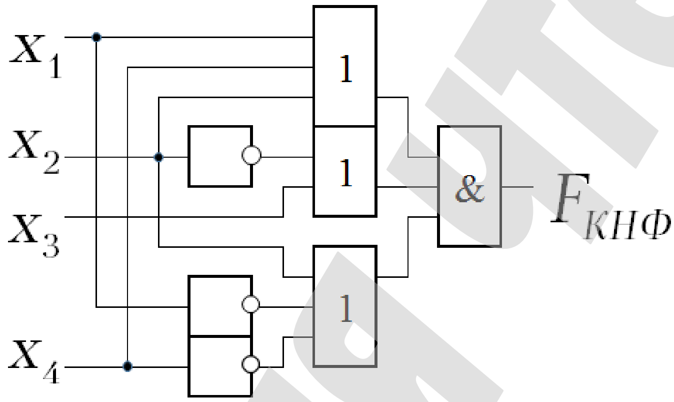
$$(x_1\overline{x_2}+x_2x_3+\overline{x_2}x_4)(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_4})=x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4}+\overline{x_1}x_2x_3+x_2x_3+x_2x_3\overline{x_4}+\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4.$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & & 0 \\ & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & & 1 \end{array}\right|. \tag{68}$$

Результати обчислень (65) і (68) співпадають, що відповідає процедурі отримання мінімізації функції на повній таблиці істинності. Можна бачити, що в мінімальній КНФ функції (67), порівняно з мінімальною ДНФ функції (66), для вхідної змінної x_2 є на одну інверсію менше. Тому реалізація КНФ функції комбінаційною схемою дасть на одне з’єднання менше (рис. 3).



а



б

Рис. 3. Реалізація мінімальної: *а* – диз'юктивна нормальна форма; *б* – кон'юктивна нормальна форма булевої функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ комбінаційною схемою

З рис. 3 випливає, що структура комбінаційної схеми, яка реалізує мінімальну КНФ функції (рис. 3, *б*), містить менше провідних з'єднань, порівняно з реалізацією мінімальної ДНФ (рис. 3, *а*). Це дає змогу технологічно спростити виготовлення схеми. Отже, при інших рівних умовах в якості мінімальної функції з погляду технологічної реалізації схеми доцільно обрати КНФ (67).

Приклад 11. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ образними перетвореннями на повній таблиці у двох нормальних формах – ДНФ і КНФ, яка задана наступною таблицею істинності [17]:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Мінімальну функцію обрати за результатами мінімізації двох нормальних форм – ДНФ і КНФ.

Для мінімізації ДНФ заданої функції складемо таблицю істинності 4-розрядної булевої функції з блоків, при яких функція повертає значення «1», тобто для наборів: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15. Та проведемо мінімізацію:

$$F_{ДНФ} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

До блоків 8–11 (виділені червоним кольором) першої матриці застосований протокол супер-склеювання змінних, оскільки присутня комбінаторна система 2-(2, 4)-design [2]. Прості склеювання змінних виділені іншими кольорами. В останніх двох матрицях проведено неповне склеювання змінних.

У підсумку отримуємо мінімальну ДНФ функції:

$$F_{ДНФ} = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2\overline{x_4} + \overline{x_2}x_3 + x_3x_4. \tag{69}$$

У табл. 5 представлені результати мінімізації функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ за допомогою паралельного розчеплення кон'юнктермів [17] та методом образних перетворень.

Таблиця 5

Результат мінімізації функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$

Методом паралельного розчеплення кон'юнктермів	Метод образних перетворень
$F_{ДНФ} = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2\overline{x_4} + \overline{x_1}x_3 + x_3x_4$	$F_{ДНФ} = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2\overline{x_4} + \overline{x_2}x_3 + x_3x_4$

З огляду табл. 5 легко бачити, що обидві функції мають однакові параметри і проходять верифікацію, хоч відрізняються складом змінних у третій імпліканті. Приклад 11 демонструє меншу обчислювальну складність мінімізації ДНФ булевої функції комбінаторним методом.

Мінімізація КНФ заданої функції:

$$F_{КНФ} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \\ & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}.$$

Мінімізована КНФ функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$F_{КНФ} = (x_1 + x_2 + x_3)(\overline{x_2} + x_3 + \overline{x_4})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_4). \qquad (70)$$

Мінімальна КНФ функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (70), порівняно з мінімальною ДНФ функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (69), має однакову кількість літералів, однак меншу кількість термів, що дає технологічне спрощення виготовлення схеми. У зв'язку з цим при інших рівних умовах, в якості мінімальної функції доцільно обрати КНФ (70).

7. SWOT-аналіз результатів досліджень

Strengths. До сильної сторони комбінаторного методу мінімізації булевих функцій можна віднести зменшення складності алгоритму мінімізації КНФ булевих функцій. Це вигідно відрізняє комбінаторний метод у порівнянні з аналогами за такими чинниками:

– збільшенням продуктивності розумової праці (інтелектуальної складової) під час мінімізації КНФ булевих функцій, що сприяє вдосконаленню алгоритму мінімізації КНФ логічних функцій, розширенню контрольних функцій комбінаторного методу та глибшому розумінню логічних перетворень;

– зменшенням обсягу обчислень у випадку використання ознаки мінімальної функції та зменшенням обсягів обчислень у випадку мінімізації булевої функції на повній таблиці істинності;

– меншою вартістю розробки та впровадження за рахунок скорочення потреби у застосуванні апаратно-програмних засобів автоматизації.

Weaknesses. Слабка сторона комбінаторного методу при ручній мінімізації КНФ булевих функцій пов'язана з малою практикою застосування методу мінімізації КНФ булевих функцій. Негативні внутрішні фактори, притаманні процесу мінімізації КНФ булевих функцій комбінаторним методом, полягають у збільшенні часу отримання мінімальної функції при недостатній бібліотеці протоколів мінімізації КНФ булевих функцій.

Opportunities. Перспективою подальших досліджень комбінаторного методу може бути вироблення протоколу обчислень мінімальних функцій для симетричних булевих функцій.

Додаткові можливості практичного впровадження комбінаторного методу мінімізації КНФ булевих функцій полягають у встановленні нових критеріїв комбінаторної оптимізації булевих функцій, що визначається ознакою мінімальної функції та мінімізацією булевих функцій на повній таблиці істинності.

Threats. Процес мінімізації КНФ булевих функцій комбінаторним методом є незалежним від процесів мінімізації іншими методами, тому загроза негативної дії на об'єкт дослідження зовнішніх чинників відсутня.

Аналогом комбінаторного методу мінімізації КНФ булевих функцій є алгебричний метод [18]. Алгебричний метод мінімізації КНФ булевих функцій кращий тим, що для нього вже завчасно встановлені закони спрощення, виявлені властивості та створені алгоритми мінімізації булевих функцій. Однак алгебричний метод є вербальною процедурою операційних перетворень, що дає менший ефект якості мінімізації, порівняно з образними перетвореннями комбінаторного методу.

8. Висновки

1. Встановлено, що мінімізація КНФ булевих функцій комбінаторним методом ґрунтується на блок-схемі з повторенням, якою є власне таблиця істинності заданої функції. Це дозволяє зосередити принцип мінімізації у межах протоколу обчислення логічної функції (у межах таблиці істинності функції) і, таким чином, обійтись без допоміжних об'єктів, як то карта Карно, діаграми Вейча, ациклічний граф, кубічне представлення та ін.

2. Виявлено, що таблична організація математичного апарату блок-схеми з повторенням дозволяє отримати більше інформації стосовно ортогональності, суміжності, однозначності блоків комбінаторної системи, а, отже, і блоків таблиці істинності заданої функції. Рівносильні образні перетворення, що за своїми властивостями мають більшу інформаційну ємність, спроможні з ефектом замінити вербальні процедури алгебричних перетворень, зокрема за допомогою бібліотеки протоколів мінімізації КНФ булевих функцій.

3. Виявлено, що образні перетворення спрощують процедуру встановлення ознаки мінімальної логічної функції (приклади 8–10), яка гарантує оптимальне зменшення кількості змінних логічної функції без втрати її функціональності.

4. Виявлено, що досягнути найліпшого результату мінімізації булевих функцій можна отримати як у ДНФ, так і в КНФ мінімальної функції (приклади 6, 8–11). Звідси випливає, що мінімізацію заданої функції доцільно здійснювати у двох нормальних формах – ДНФ і КНФ, використовуючи повну таблицю істинності, а мінімальну функцію слід обирати за результатами мінімізації двох нормальних форм – ДНФ і КНФ.

Література

1. Riznyk V., Solomko M. Minimization of Boolean functions by combinatorial method // Technology Audit and Production Reserves. 2017. Vol. 4, Issue 2 (36). P. 49–64. doi: http://doi.org/10.15587/2312-8372.2017.108532

2. Riznyk V., Solomko M. Application of super-sticking algebraic operation of variables for Boolean functions minimization by combinatorial method // Technology Audit and Production Reserves. 2017. Vol. 6, Issue 2 (38). P. 60–76. doi: http://doi.org/10.15587/2312-8372.2017.118336

3. Riznyk V., Solomko M. Research of 5-bit boolean functions minimization protocols by combinatorial method // Technology Audit and Production Reserves. 2018. Vol. 4, Issue 2 (42). P. 41–52. doi: http://doi.org/10.15587/2312-8372.2018.140351

4. Cepek O., Kucera P., Savicky P. Boolean functions with a simple certificate for CNF complexity // Discrete Applied Mathematics. 2012. Vol. 160, Issue 4-5. P. 365–382. doi: http://doi.org/10.1016/j.dam.2011.05.013

5. Hemaspaandra E., Schnoor H. Minimization for Generalized Boolean Formulas // Proceedings of the Twenty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence. 2012. P. 566–571.

6. Boros E., Cepek O., Kucera P. A decomposition method for CNF minimality proofs // Theoretical Computer Science. 2013. Vol. 510. P. 111–126. doi: http://doi.org/10.1016/j.tcs.2013.09.016

7. Gursk´y, S. Minimization of Matched Formulas // WDS'11 Proceedings of Contributed Papers. Part 1. 2011. P. 101–105.

8. Bernasconi A., Ciriani V., Luccio F., Pagli L. Three-level logic minimization based on function regularities // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2003. Vol. 22, Issue 8. P. 1005–1016. doi: http://doi.org/10.1109/tcad.2003.814950

9. Nosrati M., Karimi R. An Algorithm for Minimizing of Boolean Functions Based on Graph DS // World Applied Programming. 2011. Vol. 1, Issue 3. P. 209–214.

10. Valli M., Periyasamy Dr. R., Amudhavel J. A state of appraoches on minimization of boolean functions // Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems. 2017. Issue 12. P. 1322–1341. URL: http://www.jardcs.org/abstract.php?archiveid=1323#

11. Boyar J., Peralta R. A New Combinational Logic Minimization Technique with Applications to Cryptology. Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer, 2010. P. 178–189. doi: http://doi.org/10.1007/978-3-642-13193-6_16

12. Fiser P., Toman D. A Fast SOP Minimizer for Logic Funcions Described by Many Product Terms // 2009 12th Euromicro Conference on Digital System Design, Architectures, Methods and Tools. Patras, 2009. doi: http://doi.org/10.1109/dsd.2009.157

13. Pynko A. P. Minimal sequent calculi for monotonic chain finitely-valued logics // Bulletin of the Section of Logic. 2014. Vol. 43, Issue 1-2. P. 99–112.

14. Pyn'ko A. P. Minimizaciya KNF chastichno-monotonnykh bulevykh funkciy // Dopovidi Nacional'noi akademii nauk Ukraini. 2017. Issue 3. P. 18–21.

15. Bulevy funkcii. URL: http://any-book.org/download/88296.html

16. Rytsar B. Ye. New minimization method of logical functions in polynomial set-theoretical format. 1. Generalized rules of conjuncterms simplification // Upravlyayushhie sistemy i mashiny. 2015. Issue 2. P. 39–57. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/87194

17. Rytsar B. Ye. Minimizatsiia systemy lohichnykh funktsii metodom paralelnoho rozcheplennia koniunktermiv // Visnyk Natsionalnoho universytetu «Lvivska politekhnika». Radioelektronika ta telekomunikatsii. 2013. Issue 766. P. 18–27. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/VNULPPT_2013_766_6

18. Martyniuk O. M. Osnovy dyskretnoi matematyky. Konspekt lektsii. Odesa: Odeskyi natsionalnyi politekhnichnyi universytet: Nauka i tekhnika, 2008. 300 p.