

Оптимізація моделі управління запасами зі змінними вхідними параметрами методами збурень

Д. Т. Бікулов, О. О. Головань, О. М. Олійник, К. С. Шупчинська,
С. В. Маркова, А. С. Чкан, Є. В. Маказан, К. В. Сухарева, О. А. Кривенко

Запропоновано напрямки оптимізації моделі економічного замовлення за умови незначних змін вхідних параметрів методами збурень.

Для досягнення мети отримано аналітичні формули моделі економічного розміру замовлення на основі асимптотичного підходу за умов незначних змін вхідних параметрів. Як змінні параметри системи приймалися: дискретне зростання витрат на виконання замовлення, витрати на виконання замовлення та зберігання запасів, які залежать від «малого параметру», а також періодичні коливання попиту на продукцію.

На основі асимптотичного методу збурень одержано зручну у використанні формулу для визначення економічного розміру замовлення за умови незначного зростання витрат на виконання замовлення. Також визначено відсоткове відхилення «збуреного» розміру замовлення від формули Вільсона. Оцінка чутливості EOQ-моделі виявила, що відносне відхилення «збуреного» обсягу замовлення від оптимального при незначних змінних витратах на його виконання варіюється в межах від 1 % до 15 % в залежності від періоду. Порівняльний аналіз загальних витрат, розрахованих з використанням асимптотичної формули та формули Вільсона, виявив, що урахування зміни обсягів замовлення призводить до зменшення витрат фірми.

Побудована двопараметрична модель оптимального розміру замовлення, яка враховує як незначні зміни витрат на виконання замовлення, так і витрат на зберігання запасів. Одержані двопараметричні асимптотичні формули для визначення оптимального розміру замовлення та загальних витрат, які відповідають «збуреному» розміру замовлення.

Запропонована в роботі асимптотична модель, яка враховує дискретне незначне підвищення витрат на виконання замовлення та періодичний характер коливань попиту на продукцію, має практичне значення. Ця модель може бути використана для оптимізації системи управління логістикою підприємства через наближеність до реалій та зручність у використанні

Ключові слова: модель управління запасами, малий параметр, метод збурень, асимптотичне розвинення, розмір замовлення

1. Вступ

Сучасна економічна ситуація характеризується наростанням кризових явищ, які мають глобальний характер, однією з причин яких є наслідки пандемії. Вона стосується багатьох країн і призводить до втрати виробничого потенціалу та можливостей для розвитку як глобальної, так і локальної економіки

через розрив існуючих логістичних зв'язків, порушення транспортних коридорів та падіння обсягів споживання та виробництва.

Потенціал сучасного підприємства залежить від наявних у нього основних та оборотних засобів, а також інших факторів. Оборотні засоби підприємств та організацій внаслідок тривалої роботи в умовах карантину та економічних обмежень скоротились, а у деяких випадках пали до критичного мінімуму. Компанії, що планують продовжити свою діяльність, вимушені шукати можливості для відновлення фінансування оборотних засобів. В умовах, коли зовнішні запити є обмеженими за кількістю та відсотковими ставками, одним з найбільш доступних джерел стають власні фінансові активи підприємств.

Перед компаніями постає завдання оптимізації використання обігових коштів, що можливе, зокрема, за рахунок удосконалення системи управління запасами та логістики. Це вимагає від менеджменту застосування нових підходів та методів управління матеріальними потоками. Такі методи дозволяють включити управління матеріальними ресурсами до складу основних стратегічних пріоритетів розвитку компаній, а також використання відповідного сучасного та ефективного програмного забезпечення. Це дозволяє оперативно аналізувати наявні матеріальні ресурси, узгоджуючи їх з потребами споживачів та особливостями взаємодії з постачальниками.

На ринку представлена значна кількість програмних продуктів, що сприяють підвищенню якості та ефективності управління логістичними процесами. В них реалізовані та використовуються переважно функції обліку та руху товарів, проте майже відсутні ефективно реалізовані функції розрахунку обсягів закупівель і часу поповнення запасів, що суттєво обмежує ефективність пропонованих програмних продуктів. Однією з причин відсутності ефективно реалізованих зазначених функцій є недостатня розробленість аналітичного інструментарію, моделей і методів управління запасами.

Моделювання логістичних систем на сучасному етапі їх розвитку вимагає застосування математичних інструментів оптимізації, які виявили свою ефективність, особливо у сфері управління запасами. Наявні моделі, які застосовуються у процесі прийняття управлінських рішень у функціональній логістиці, мають багато обмежень як, наприклад, незмінність вхідних параметрів моделі, що значно звужує можливості їх використання на практиці. Відхилення спрощеної економіко-математичної моделі від реальної, яка описує логістичну систему компанії, можуть бути різними. У випадку, коли вхідні параметри системи зазнають незначних змін, відхилення в результатах моделювання можуть бути з економічної точки зору невеликими на області вхідних параметрів. В цьому випадку для моделювання логістичних процесів можуть використовуватися асимптотичні методи «збурень», які дозволяють отримати наближений розв'язок задачі з припустимою похибкою та у зручній для застосування аналітичній формі. Більш того, асимптотичні методи дозволяють використовувати раніше отримані аналітичні розв'язки прикладних задач для вирішення аналогічних, проте більш складних задач, шляхом встановлення зв'язків між ними.

Застосування асимптотичних методів для розв'язання прикладних економічних задач в галузі логістики дозволить менеджменту компанії отримати зро-

зумілі нескладні аналітичні розрахункові формули. Ці формули нададуть можливість оптимізувати загальні логістичні витрати компанії та підвищити конкурентоспроможність фірм, що їх використовуватимуть.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

З опублікованих за останній час праць з асимптотичних методів необхідно відзначити роботу [1], в якій асимптотичні ідеї і методи викладені на доступному широкому колу читачів рівні. В роботі продемонстровано основні ідеї асимптотичних підходів, досліджено особливості їх застосування в різних галузях. У [2] наведений огляд методів теорії збурень для розв'язання диференціальних рівнянь, що описують задачі прикладної фізики та механіки, а також обговорюються їх переваги та межі застосування.

Визначенню сутності методів збурень, яка полягає в тому, що розв'язання задачі шукається у вигляді розвинення в ряд за степенями малого параметра, присвячено [3]. Цей параметр з'являється в моделі або природним чином, або вводиться штучно для зручності. Метод передбачає, що для дослідження прикладної задачі обирається відповідна асимптотична послідовність, яка в найпростішому та поширеному варіанті приймається у вигляді степеневої функції малого параметра ε^n .

Методи збурень застосовуються в:

– механіці твердих структур (наприклад, в [4] за допомогою асимптотичного підходу побудовано розв'язок задачі стійкості кругової циліндричної оболонки змінної товщини при осьовому стисканні, у [5] пропонується варіативне виведення змінених рівнянь Бресса-Тимошенка за допомогою асимптотичного підходу);

– диференціальних рівняннях. Так, (наприклад, в [6] метод збурень застосований до проблеми вібрації п'єзоелектричної сендвіч-пластини з урахуванням ефекту сили зсуву. В [7] застосовується гібридний метод на основі поєднання аналітичного асимптотичного ВКБ підходу та чисельного методу Гальоркіна).

Використання методів збурень в задачах механіки твердих структур та диференціальних рівняннях обумовлено тим, що вони дозволяють побудувати наближений аналітичний розв'язок та оцінити чутливість системи до зміни вхідних параметрів. Ці методи досі не набули застосування в прикладних економічних дослідженнях через їх вузьку спеціалізацію та переважну спрямованість на дослідження поведінки механічних об'єктів. Проте сфера застосування цих методів може бути поширена на задачі оптимізації економічних процесів та прийняття управлінських рішень. Отримані завдяки застосуванню методів збурень аналітичні формули є зручними для застосування менеджментом компаній, а також можуть розширити сферу використання економічних моделей, зокрема моделей управління запасами.

Проблеми управління запасами вивчалися у працях [8–29]. Праці [8, 9] вивчають особливості побудови детермінованих однопродуктових та багатопродуктових моделей закупівельної логістики, які допомагають менеджерам у процесі прийняття рішень. Проте вхідні параметри цих моделей вважаються незмінними, що обмежує границі практичного використання.

У [10] розроблено EOQ-модель закупівельної логістики з виникненням дефіциту через можливість наявності в замовленій партії бракованої продукції; отримана модель обмежена щодо врахування незначних дискретних змін витрат на виконання замовлення. В роботі [11] побудовано динамічну модель закупівельної логістики з виникненням дефіциту при попиті, що лінійно залежить від часу. Ця модель дає можливість оцінити оптимальні обсяги замовлення, його періодичність та загальні витрати при цьому припущенні, проте вона не враховує зміни витрат на виконання замовлення та зберігання запасів. Подальше дослідження в [12] торкається вивчення поведінки моделі закупівлі швидкопсувних товарів за умови наявної інфляції та можливих затримок платежів. Питання можливих затримок платежів проаналізовано у [13], однак ці моделі не враховують можливі коливання попиту на пропоновану продукцію. У [14] вивчається модель управління запасами за умови зміни попиту та псування запасів через неоптимальне розташування складу, неналежні умови зберігання тощо. При цьому швидкість псування запасів розподілена за функцією Weibull, а вартість утримання запасів вважається дискретною змінною. Недоліком отриманої моделі можна вважати використання постійних витрат на виконання замовлення. У [15] було розроблено EOQ-моделі для швидкопсувних продуктів, які враховують можливе погіршення якості продукту з врахуванням можливих штрафних санкцій, представлених у вигляді експоненціальної та лінійної функцій. Подальше дослідження [16] стосувалось побудови інтегрованої моделі управління запасами для одного постачальника та одного покупця із зменшенням витрат на замовлення, які залежать від часу його виконання, однак змінність витрат на зберігання не враховано. Також вдосконаленню однопродуктової моделі присвячена робота [17], де розглянуті особливості процедур EOQ-оптимізації ланцюгів поставок. Такі процедури дозволять враховувати доцільність спільного використання декількох транспортних засобів при кожному замовленні та специфіку оплати витрат зберігання як у вигляді оренди, так і при оплаті тільки зайнятих місць на складі. Проте відсутні аналітичні формули, зручні для застосування та подальшого аналізу менеджментом компанії. Використання асимптотичного підходу для визначення розміру замовлення однопродуктової задачі за умови змінних витрат на виконання замовлення наведено у [18]. Однак витрати на зберігання запасів розраховувались з урахуванням займаної площі складу за певний період та просторових габаритів одиниці продукції.

Деякі дослідники розглядають варіації реальних ситуацій в системі управління логістикою компаній, а саме – інфляція, раптові підйоми та падіння попиту тощо та представляють моделі управління запасами в умовах невизначеності середовища. Так, у [19] досліджено задачу визначення оптимальних обсягів замовлення (EOQ) для випадку, коли входні параметри мають ймовірнісний характер, а оптимальні функції розподілу ймовірностей обчислюються за допомогою геометричної моделі програмування. У [20] розв'язують стохастичну задачу пошуку оптимального розміру замовлення на певному часовому інтервалі. Проте, дослідження мають переважно теоретичний характер та не мають спрямування до практичного застосування.

Робота [21] присвячена розробці моделі управління запасами, яка оптимізує витрати та розмір замовлення, приймаючи певні недетерміновані параметри як нечіткі числа. У дослідженні [22] попит та відповідні витрати приймаються як нечіткі змінні, а для визначення оптимальної політики управління запасами застосовується метод ранжирування Ягера для нечітких чисел. Однак отримані моделі складні для застосування на практиці через відсутність зручних аналітичних формул.

У [23] пропонується багатопродуктова модель управління запасами для дворівневого ланцюга поставок за умови чутливого до стимулюючих заходів маркетингу попиту. При цьому постачальник пропонує роздрібному продавцю можливість для затримки в оплаті вартості закупівлі готової продукції. У [24] здійснено моделювання логістичних процесів на підприємстві в умовах замовлення широкої номенклатури продукції в одного постачальника за допомогою асимптотичних методів. За умов змінних витрат на постачання отримано модель, що дозволяє адаптувати логістичну систему підприємства до сучасних умов господарювання, однак недостатню увагу приділено визначенню оптимального розміру заказу за умов змінності лише витрат на виконання замовлення. Подальший розвиток асимптотичного підходу до багатономенклатурної поставки наведено у [25], де враховано зміни витрат на зберігання запасів, однак за постійного попиту на пропоновану продукцію.

У [26] розглядається модель управління запасами в системі зі зворотною логістикою на рівні роздрібною торгівлі, яка дозволяє компанії максимізувати прибуток, враховуючи обсяги постачань та їх терміни. Проте пропонована модель враховує змінність ціни і не враховує змінність інших вхідних параметрів.

Більшість досліджень не враховують транспортні витрати в аналізі економічного обсягу замовлення або розглядають транспортну вартість як постійну частину витрат на замовлення, що враховано у роботі [27], однак дослідники використовують складний для реалізації ітераційний метод.

Ще однією модифікацією EOQ-моделі [28] є модель з урахуванням обмеженості ресурсів для зберігання продукції, а саме виділення простору у холодильному обладнанні в роздрібній торгівлі. Це передбачає наявність додаткових витрат на підтримку певної температури зберігання, однак отримані результати не передбачають врахування змін витрат на виконання замовлення та зберігання запасів.

Деякі дослідники [29] торкаються проблем розвитку аналітичного інструментарію визначення оптимального розміру замовлення, однак цей апарат є недосконалим та потребує подальшого дослідження.

Проаналізовані у відомих роботах дослідників методи оптимізації можуть ефективно вирішувати проблеми управління запасами, проте через їх складність (використання ітераційних процесів при розрахунку, використання складного математичного апарату тощо) вони часто є незрозумілими для практиків-менеджерів. Як дослідникам, так і менеджерам, більш зручними для використання виявляються аналітичні моделі, що описують поведінку об'єкта за зрозумілими формулами, які враховують змінність витрат на виконання замовлення та зберігання, а також змінність попиту на пропоновану продукцію.

3. Мета та задачі дослідження

Метою дослідження є оптимізація моделі управління запасами за умови незначних змін входних параметрів методами збурень. Це дасть можливість розширити сферу застосування даної моделі на практиці.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

- одержати асимптотичну формулу моделі економічного розміру замовлення при незначному дискретному зростанні витрат на виконання замовлення;
- отримати аналітичну формулу для моделі економічного розміру замовлення при змінних витратах на виконання замовлення та зберігання запасів, які залежать від «малого параметру»;
- вивести асимптотичну формулу моделі економічного розміру замовлення за умови періодичних коливань попиту на продукцію.

4. Дослідження задачі визначення економічного розміру замовлення методами збурень

4.1. Асимптотичне розв'язку умови дискретного зростання витрат на виконання замовлення

Економічна модель замовлення (модель EOQ) або формула Вільсона, яка використовується для оцінки величини розміру замовлення, може бути подана наступним чином [4]:

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{2C_0 S}{h}}, \quad (1)$$

де q_{opt} – це економічний розмір замовлення; C_0 – вартість виконання одного замовлення, S – величина попиту за певний період часу; h – вартість зберігання одиниці продукції протягом певного періоду часу.

Однією з основних складових вартості замовлення є вартість доставки, яка через підвищення цін на паливо постійно зростає. Якщо припустити, що протягом певного періоду часу (наприклад, кожного місяця) вартість замовлення збільшується на $i\%$, то після n періодів часу вона сягатиме $C_0 \cdot \left(1 + \frac{i\%}{100\%}\right)^n$.

Приймаючи відношення $\varepsilon = \frac{i\%}{100\%}$ ($\varepsilon \ll 1$) за малий параметр, одержуємо витрати на замовлення у такій формі $C_0 \cdot (1 + \varepsilon)^n$. Оскільки параметр ε – це малий параметр, то можна припустити, що відхилення від початкового значення C_0 не є значним, і умова про постійність витрат на виконання замовлення виконується.

«Збурений» економічний розмір замовлення q_{opt}^* можна представити як асимптотичне розв'язання за штучно введеним малим параметром ε :

$$q_{opt}^* = q_0 + q_1 \cdot \varepsilon + q_2 \cdot \varepsilon^2 + \dots \quad (2)$$

Формули для визначення розміру замовлення набувають форми (3):

$$q_0 + q_1 \cdot \varepsilon + q_2 \cdot \varepsilon^2 + \dots = \sqrt{\frac{2C_0(1+\varepsilon)^n S}{h}}. \quad (3)$$

Піднісши до квадрата обидві частини рівності (3), розклавши в ряд Тейлора $(1+\varepsilon)^n$ та нехтуючи членами порядку ε^3 і більше, маємо:

$$(q_0 + q_1 \cdot \varepsilon + q_2 \cdot \varepsilon^2 + \dots)^2 = \frac{2C_0S}{h} \left(1 + n \cdot \varepsilon + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \varepsilon^2 + \dots \right), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} q_0^2 + 2q_0 \cdot q_1 \cdot \varepsilon + q_1^2 \cdot \varepsilon^2 + 2q_0 \cdot q_2 \cdot \varepsilon^2 + \dots = \\ = \frac{2C_0S}{h} \left(1 + n \cdot \varepsilon + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \varepsilon^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях параметра ε , одержуємо рівняння для визначення невідомих q_0, q_1, q_2 :

$$\varepsilon^0 : q_0^2 = \frac{2C_0S}{h}, \quad (6)$$

$$\varepsilon^1 : q_0 \cdot q_1 = \frac{C_0S}{h} \cdot n, \quad (7)$$

$$\varepsilon^2 : q_1^2 + 2q_0 \cdot q_2 = \frac{C_0S}{h} \cdot n \cdot (n-1). \quad (8)$$

Розв'язуючи рівняння (6)–(8), маємо:

$$\begin{aligned} q_0 = \sqrt{\frac{2C_0S}{h}}, \quad q_1 = \frac{n}{2} \cdot \sqrt{\frac{2C_0S}{h}}, \\ q_2 = \frac{n \cdot (n-2)}{8} \cdot \sqrt{\frac{2C_0S}{h}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для отримання асимптотичного представлення формули (1) знайдені значення (9) підставлені у розвинення (2). Внаслідок цього отримано формулу (10).

$$q_{opt}^* = \sqrt{\frac{2C_0S}{h}} \cdot \left(1 + \frac{n}{2} \cdot \varepsilon + \frac{n \cdot (n-2)}{8} \cdot \varepsilon^2 \right). \quad (10)$$

Як можна бачити з формули (10), «збурений» розмір замовлення відрізняється від формули Вільсона (1) на множник

$$\left(1 + \frac{n}{2} \cdot \varepsilon + \frac{n \cdot (n-2)}{8} \cdot \varepsilon^2\right).$$

Загальні витрати фірми за умови незначного дискретного зростання витрат на виконання замовлення мають вигляд:

$$TC(q_{opt}) = \frac{C_0(1+\varepsilon)^n S}{q_{opt}} + \frac{hq_{opt}}{2} = \sqrt{\frac{C_0Sh}{2}} \cdot \left(2 + n \cdot \varepsilon + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \varepsilon^2\right), \quad (11)$$

$$TC^*(q_{opt}^*) = \frac{C_0(1+\varepsilon)^n S}{q_{opt}^*} + \frac{hq_{opt}^*}{2} = \sqrt{\frac{C_0Sh}{2}} \cdot \left(2 + n \cdot \varepsilon + \frac{n \cdot (n-2)}{4} \cdot \varepsilon^2\right). \quad (12)$$

Як можна бачити з отриманих формул, загальні витрати, які відповідають економічному (1) та «збуреному» розмірам замовлення (10), при незначному зростанні витрат на виконання замовлення сягають мінімуму при q , що відповідає (10).

Проаналізуємо чутливість отриманої моделі визначення оптимального розміру замовлення до зміни вхідних параметрів, а саме витрат на виконання замовлення. Розрахуємо відносне відхилення оптимального обсягу партії при змінних витратах на виконання замовлення, варіюючи параметр ε . Відсоток відхилення «збуреного» розміру замовлення від економічного, який розрахований згідно формули (10), представлений на рис. 1.

Розглянемо випадки, коли з кожним періодом відбувається збільшення витрат на виконання замовлення на 1 % ($\varepsilon=0,01$), 1,5 % ($\varepsilon=0,015$), 2 % ($\varepsilon=0,02$) та 2,5 % ($\varepsilon=0,025$). Як видно на рис. 1, поступове збільшення вартості замовлення на 1 % ($\varepsilon=0,01$) призводить до збільшення розміру замовлення на 3,03 % та 6,15 % у періоди 6 та 12 відповідно. Якщо вартість замовлення поступово зростає з кожним періодом, наприклад, на 2,5 % ($\varepsilon=0,025$), то величина відхилення становить 7,69 % у період 6 та 15,94 % у періоді 12.

Апробуємо побудовану модель для оптимізації моделі управління запасами за умови незначних змін вхідних параметрів на прикладі закупівлі кави та чаю підприємством, що працює в сегменті HoReCa. Вихідні дані та розрахунок параметрів моделі наведені в табл. 1. Розрахунок оптимального розміру замовлення здійснювався за формулою Вільсона (1). Визначення збуреного розміру замовлення q_{opt}^* відбувалося за умови зростання витрат на виконання замовлення при $\varepsilon=0,025$ з використанням формули (10).

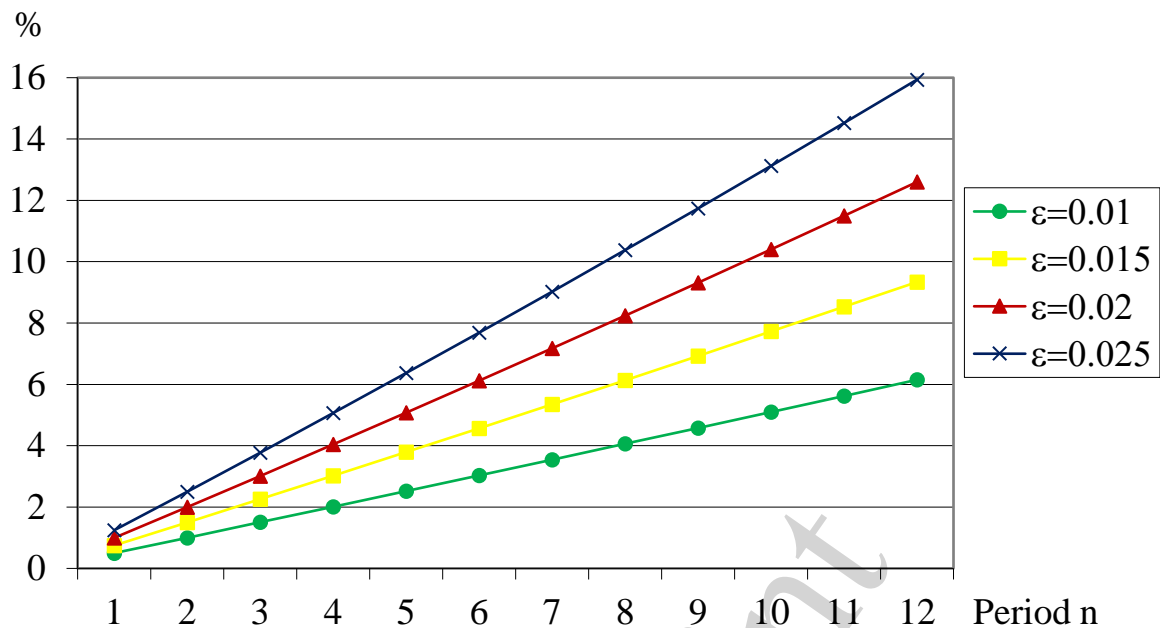


Рис. 1. Відхилення (%) «збуреного» розміру замовлення від формули Вільсона за умови зростання витрат на виконання замовлення за періодами n

Таблиця 1

Вихідні дані та результати розрахунку поставки кави та чаю

Вид продукції	Річна потреба S , q_{opt} уп.	Витрати на зберігання, h , грош. од.	Витрати на виконання замовлення, C_0 , грош. од.	Розмір замовлення, уп.		Загальні витрати, грош. од.	
				q_{opt}	q_{opt}^*	TC	TC^*
Чай (10 фільтр-пакетів)	700	1,0	52	270	313	315,9	312,8
Кава в зернах (1 кг)	240	4,5	56	77	89	407,1	403,2

В табл. 1 наведені значення збурених розмірів замовлення q_{opt}^* наприкінці року, тобто $n=12$. Як можна бачити, абсолютне відхилення розміру замовлення чаю наприкінці періоду становить 43 упаковки (15,93 %), а для кави – 12 упаковок (15,58 %).

Порівняльний аналіз загальних витрат, розрахованих за формулами (11), (12), дає можливість зазначити, що витрати, які відповідають збуреному розміру замовлення, є менше аніж витрати, які відповідають розміру замовлення, розрахованому за формулою Вільсона (1).

4. 2. Розв'язок задачі за умови зміни витрат на виконання замовлення та зберігання запасів

На практиці не тільки вартість виконання замовлення, але й вартість зберігання запасів зростає внаслідок зростання витрат (наприклад, за рахунок підвищення цін на електроенергію, комунальні послуги). Припустимо, що вартість зберігання збільшується з кожним періодом часу на j %. Приймаючи за малий

параметр величину $\beta = \frac{j\%}{100\%}$ ($\beta \ll 1$), одержуємо залежність витрат на зберігання запасів у вигляді $h \cdot (1 + \beta)^m$.

Зміна вартості доставки, яка є однією з основних компонент у структурі витрат на виконання замовлення, і зростання цін на комунальні послуги, які, відповідно, збільшують витрати на зберігання, часто відбуваються у різні періоди часу. Отже, внаслідок різних причин ціни на ресурси та матеріали збільшуються, і це відображається в транспортних тарифах.

Доцільно враховувати різні комбінації значень параметрів n і m , ε і β в EOQ-моделі з урахуванням того, що інтервал m зміни витрат на зберігання запасів, як правило, є меншим порівняно з інтервалом n зміни витрат на виконання замовлення. Параметр β , який характеризує зростання вартості зберігання, може перевищувати значення параметра ε , що характеризує зростаючу вартість виконання замовлення.

Якщо зміна вартості зберігання відбувається із затримкою у порівнянні зі зміною вартості замовлення, виразити зв'язок між параметрами n і m можна, наприклад, поклавши $m = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$, $m = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$ тощо, де $\lfloor \cdot \rfloor$ означає цілу частину числа.

Через малі значення параметрів ε і β припустимо, що відхилення від початкових значень C_0 і h є малим, і обмеження, які мають місце в моделі (1), виконуються.

Представляючи q_{opt}^* як асимптотичне розвинення за двома малими параметрами ε і β та нехтуючи членами порядку ε^3 , β^3 , $\varepsilon^2\beta$, $\varepsilon\beta^2$ та вище, одержано (13).

$$q_{opt}^* = q_0 + q_1 \cdot \varepsilon + q_2 \cdot \beta + q_3 \cdot \varepsilon^2 + q_4 \cdot \varepsilon \cdot \beta + q_5 \cdot \beta^2 + \dots \quad (13)$$

Розкладаючи функції $(1 + \varepsilon)^{\frac{n}{2}}$ і $(1 + \beta)^{-\frac{m}{2}}$ в ряд Тейлора, одержано асимптотичні формули за двома параметрами ε і β для «збуреного» розміру замовлення у вигляді (14):

$$q_{opt}^* = \sqrt{\frac{2C_0S}{h}} \cdot \left(1 + \frac{n}{2} \cdot \varepsilon - \frac{m}{2} \beta + \frac{n \cdot (n-2)}{8} \cdot \varepsilon^2 - \frac{m \cdot n}{4} \varepsilon \cdot \beta + \frac{m \cdot (m+2)}{8} \beta^2 \right). \quad (14)$$

Загальні витрати TC за умови незначного зростання витрат на виконання замовлення та витрат на зберігання для економічного (1) та «збуреного» розміру замовлення (14) одержано у вигляді:

$$TC(q_{opt}) = \sqrt{\frac{C_0Sh}{2}} \times \left(\Omega + \frac{1}{2}(n \cdot \varepsilon - m \cdot \beta)^2 \right), \quad (15)$$

$$TC^*(q_{opt}^*) = \sqrt{\frac{C_0 S h}{2}} \times \left(\Omega + \frac{1}{4} (n \cdot \varepsilon - m \cdot \beta)^2 \right), \quad (16)$$

де

$$\Omega = \left(2 + n \cdot \varepsilon + m \cdot \beta - \frac{n}{2} \cdot \varepsilon^2 - \frac{m}{2} \cdot \beta^2 + m \cdot n \cdot \varepsilon \cdot \beta \right).$$

Можна бачити, що загальні витрати TC (16), які відповідають «збуреному» розміру замовлення, є меншими, ніж (15), що відповідають економічному розміру.

Для аналізу чутливості величини розміру замовлення до зміни витрат на виконання замовлення та вартості зберігання запасу були розраховані відношення «збуреного» розміру замовлення (14) до оптимального (1). При цьому використовувались різні значення вхідних параметрів ε , β та різні інтервали зміни витрат n і m .

Відсоток відхилення «збуреного» розміру замовлення від величини економічного замовлення (1) за умови, коли витрати на виконання замовлення є фіксованими ($\varepsilon=0,0$), наведено на рис. 2.

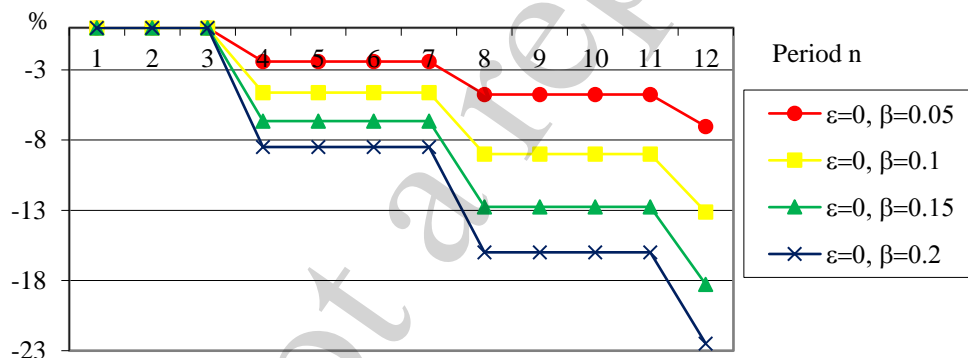


Рис. 2. Відхилення (%) «збуреного» розміру замовлення від економічного в залежності від періоду n , за умови, що витрати на виконання замовлення є фіксованими, $\left(\varepsilon = 0, m = \left[\frac{n}{4} \right] \right)$

Як видно на рис. 2, поступове збільшення вартості зберігання на 5 % ($\beta=0,05$) у періоди $n=4$, $n=8$ призводить до зменшення розміру замовлення на 2,41 %, 4,75 % відповідно. Якщо вартість зберігання змінюється суттєво, наприклад, зростає на 20 % ($\beta=0,2$) кожного кварталу (періоди $n=4$, $n=8$ і $n=12$), розмір замовлення зменшується на 8,5 %, 16 % та 22,5 % відповідно.

Відношення «збуреного» розміру замовлення (14) до економічного (1) та відсоток відхилення за умови, що витрати на виконання замовлення та витрати на зберігання запасів зазнають незначних змін, наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Відношення «збуреного» розміру замовлення до економічного за умови зміни

витрат на виконання замовлення та зберігання запасів, $m = \left[\frac{n}{4} \right]$

Період		$\varepsilon=0,01, \beta=0,1$		$\varepsilon=0,01, \beta=0,2$		$\varepsilon=0,02, \beta=0,2$	
n	m	$\frac{q_{opt}^*}{q_{opt}}$	%	$\frac{q_{opt}^*}{q_{opt}}$	%	$\frac{q_{opt}^*}{q_{opt}}$	%
0	0	1,0	0	0	0	1,0	0
1	0	1,005	+0,5	1,005	+0,5	1,010	+1,0
2	0	1,010	+1,0	1,010	+1,0	1,020	+2,0
3	0	1,015	+1,5	1,015	+1,5	1,030	+3,0
4	1	0,973	-2,7	0,933	-6,7	0,951	-4,9
5	1	0,978	-2,2	0,938	-6,2	0,961	-3,9
6	1	0,983	-1,7	0,942	-5,8	0,970	-3,0
7	1	0,987	-1,3	0,947	-5,3	0,980	-2,0
8	2	0,947	-5,3	0,873	-12,7	0,906	-9,4
9	2	0,951	-4,9	0,877	-12,3	0,915	-8,5
10	2	0,956	-4,4	0,881	-11,9	0,924	-7,6
11	2	0,961	-3,9	0,885	-11,5	0,933	-6,7
12	3	0,921	-7,9	0,819	-18,1	0,865	-13,5

Дані табл. 2 показують, що збільшення витрат на зберігання кожні 4 місяці призводить до суттєвого зменшення «збуреного» розміру замовлення у порівнянні з економічним. Так, наприклад, коли $n=4$, а $m=1$ при $\varepsilon=0,01$, $\beta=0,1$ розмір замовлення зменшується на 2,7 %; при $\varepsilon=0,01$, $\beta=0,2$ відбувається зменшення замовлення на 6,7 %. У наступному періоді $n=8$, а $m=2$ при $\varepsilon=0,01$, $\beta=0,1$ розмір замовлення зменшується на 5,3 %; а при $\varepsilon=0,01$, $\beta=0,2$ – на 12,7 %. Зміни витрат, що відбуваються в межах одного зазначеного періоду (4 місяці) $m=1$ та подальше зростання витрат на виконання замовлення (n змінюється від 4 до 7) призводять до поступового зменшення відхилення від незбуреного значення.

Розглянемо, наприклад, ситуацію коли $n=4$, а $m=1$ за незмінного відсотку зростання витрат на зберігання ($\beta=0,2$) та за збільшення відсоткового зростання витрат на виконання замовлення (з $\varepsilon=0,01$ до $\varepsilon=0,02$). При цьому відхилення «збурених» обсягів замовлення від розрахованого за формулою (1) зменшується від -6,7 % до -4,9 %, а при $n=8$, а $m=2$ – від -12,7 % до -9,4 %.

У табл. 3 показано чутливість «збуреного» розміру замовлення до економічного у залежності від темпів зростання витрат на зберігання, при цьому у першому випадку зміна витрат відбувається раз на 3 періоди ($m = \left[\frac{n}{3} \right]$), а у другому випадку раз на 4 періоди ($m = \left[\frac{n}{4} \right]$).

Як можна бачити з табл. 3, динаміка та інтервал збільшення ставки тарифу на зберігання впливає на обсяг замовлення. Так, при $n=6$, $\varepsilon=0,01$ та $\beta=0,1$ відхи-

лення розміру замовлення становить $-6,3\%$; якщо витрати на зберігання змінюються кожні 3 періоди, та $-1,7\%$, коли витрати на зберігання змінюються кожні 4 періоди. При $n=6$, $\varepsilon=0,01$ та $\beta=0,2$ ці зміни більш значущі, а саме $-13,6\%$ та $-5,8\%$ відповідно.

Таблиця 3

Чутливість «збуреного» розміру замовлення до витрат на зберігання

Період		$\varepsilon=0,01,$ $\beta=0,1$	$\varepsilon=0,01,$ $\beta=0,2$	Період		$\varepsilon=0,01,$ $\beta=0,1$	$\varepsilon=0,01,$ $\beta=0,2$
n	m	$\frac{q_{opt}^*}{q_{opt}}$	$\frac{q_{opt}^*}{q_{opt}}$	n	m	$\frac{q_{opt}^*}{q_{opt}}$	$\frac{q_{opt}^*}{q_{opt}}$
0	0	1,0	1,0	0	0	1,0	1,0
1	0	1,005	1,005	1	0	1,005	1,005
2	0	1,010	1,010	2	0	1,010	1,010
3	1	0,968	0,929	3	0	1,015	1,015
4	1	0,973	0,933	4	1	0,973	0,933
5	1	0,978	0,938	5	1	0,978	0,938
6	2	0,937	0,864	6	1	0,983	0,942
7	2	0,942	0,868	7	1	0,987	0,947
8	2	0,947	0,873	8	2	0,947	0,873
9	3	0,908	0,807	9	2	0,951	0,877
10	3	0,912	0,811	10	2	0,956	0,881
11	3	0,917	0,815	11	2	0,961	0,885
12	4	0,880	0,758	12	3	0,921	0,819

Залежність відношення «збуреного» розміру замовлення до оптимального від параметрів ε та β при $n=4$, $m = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil = 1$ наведено на рис. 3.

На рис. 3 продемонстровано характер відхилення «збуреного» розміру замовлення від економічного за різних умов поступового зростання витрат на виконання замовлення і зберігання.

Моделюючи характер змін витрат на виконання замовлення та комунальних тарифів у короткостроковому періоді, менеджери можуть внести відповідні коригування в організацію закупівель компанії, визначивши розмір замовлення за асимптотичною формулою (14).

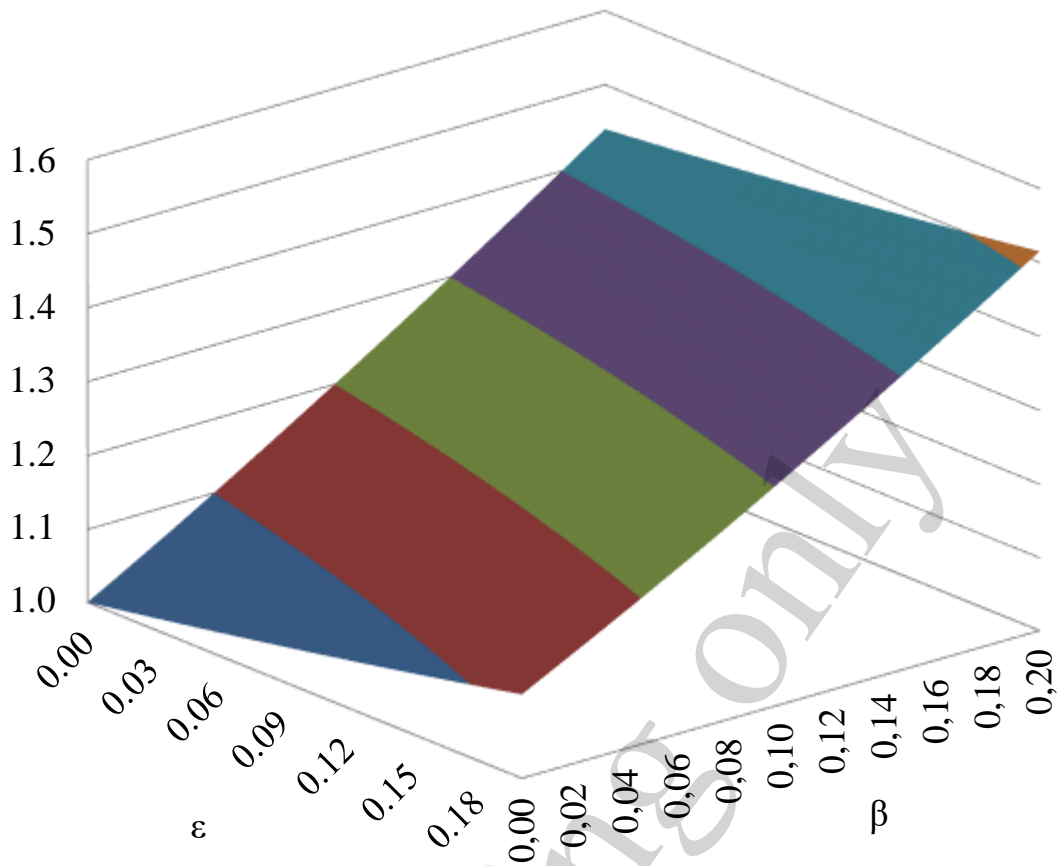


Рис. 3. Залежність відношення «збуреного» розміру замовлення до оптимального від параметрів ε та β

4. 3. Розв'язок EOQ-задачі за умови періодичних коливань попиту на пропонувану продукцію з використанням асимптотичного методу

На практиці окрім змін витрат на замовлення та зберігання, попит S на продукцію також може зазнавати коливань, які обумовлюються різними екзогенними та ендогенними факторами, наприклад, сезонністю тощо.

Витрати на виконання замовлення приймаємо у вигляді $C_0(1 + \varepsilon)^n$. Періодичні зміни у попиті S можуть бути представлені у вигляді функції $S\left(1 - \beta \sin \frac{\pi n}{2}\right)$, де $\beta \ll 1$ є малим параметром.

Використовуючи описану вище процедуру, розмір замовлення q_{opt}^* - визначався як асимптотичне розвинення за двома малими параметрами ε і β , нехтуючи членами ε^3 , $\varepsilon^2\beta$ та членами більш високих порядків:

$$q_{opt}^* = (q_0 + \beta \cdot q_1) + (\tilde{q}_0 + \beta \cdot \tilde{q}_1) \cdot \varepsilon + q_2 \cdot \varepsilon^2 + \dots \quad (17)$$

Асимптотична формула для «збуреного» розміру замовлення визначена у вигляді:

$$q_{opt}^* = \sqrt{\frac{2C_0S}{h}} \cdot \left(\begin{array}{l} 1 + \frac{n}{2} \cdot \varepsilon - \frac{1}{2} \beta \sin \frac{\pi n}{2} - \\ - \frac{n}{4} \varepsilon \cdot \beta \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{n \cdot (n-2)}{8} \cdot \varepsilon^2 \end{array} \right). \quad (18)$$

Як можна бачити з формули (18), «збурений» розмір замовлення відрізняється від формули Вільсона (1) на множник

$$\left(1 + \frac{n}{2} \cdot \varepsilon - \frac{1}{2} \beta \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{n}{4} \varepsilon \cdot \beta \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{n \cdot (n-2)}{8} \cdot \varepsilon^2 \right).$$

В залежності від значення функції синус величина розміру замовлення буде зазнавати періодичних змін у бік збільшення або зменшення відносно значення, яке дає формула Вільсона (1).

На рис. 4 показано відхилення «збуреного» розміру замовлення від економічного за умови поступового зростання витрат на його виконання та незначних коливань попиту (при цьому зафіксуємо амплітуду коливання попиту $\beta=0,02$).

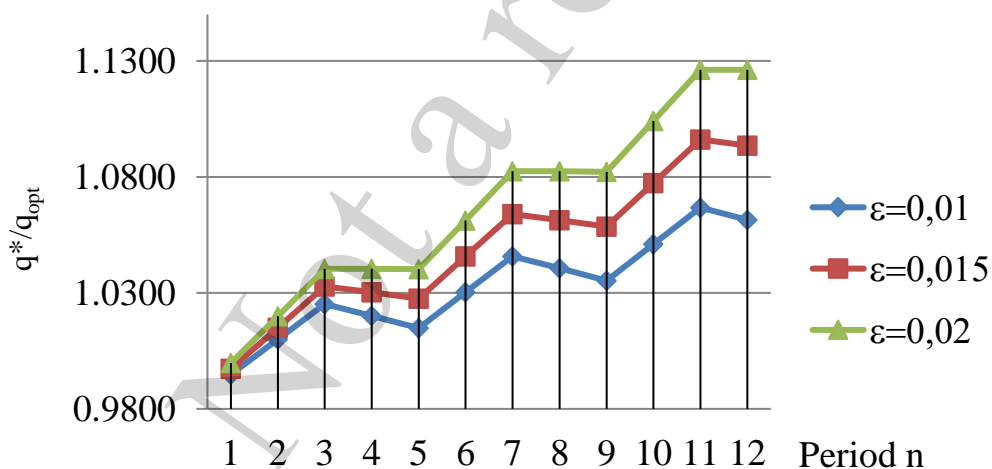


Рис. 4. Чутливість відхилення збуреного розміру замовлення від оптимального (q^*/q_{opt}) до поступового зростання витрат на виконання замовлення в залежності від періоду n при незначних коливаннях попиту

Як можна бачити на рис. 4, зростання витрат на виконання замовлення та незначні коливання попиту зумовлюють коливання величини замовлення. Більш того, чим більше значення параметру збурень ε , тим більш значущим є відхилення від економічного розміру замовлення, розрахованого за формулою (1). Так, при $\varepsilon=0,015$ у 7 періоді відхилення розміру замовлення від оптимального становить +6,4 %, а при $\varepsilon=0,02$ це відхилення становить вже +8,24 %.

На рис. 5 наведено чутливість економічного розміру замовлення до амплітуди коливань попиту при фіксованих темпах зростання витрат на його виконання (на рис. 5 зафіксовано $\varepsilon=0,01$).

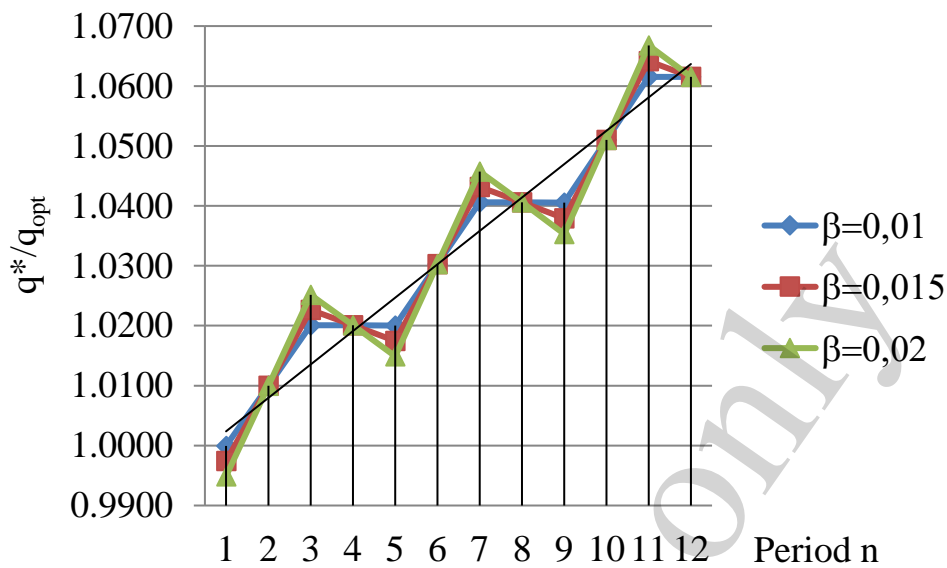


Рис. 5. Чутливість відхилення розміру замовлення (q^*/q_{opt}) до амплітуди коливань попиту в залежності від періоду n при фіксованих темпах зростання витрат на виконання замовлення

На рис. 5 видно, що в непарних періодах $n=3, 7, 11, \dots$ за умови, що параметр ε фіксований, збільшення амплітуди коливань попиту призводить до збільшення розміру замовлення. У непарних періодах $n=5, 9, \dots$ навпаки відбувається його зменшення, що обумовлюється виглядом функції, обраної для апроксимації попиту. Отже, під час прийняття рішення про замовлення менеджмент компанії повинен брати до уваги ці коливання.

Розглянемо, наприклад, період 3, коли витрати на виконання замовлення зростають на 1 % ($\varepsilon=0,01$), а амплітуда коливання попиту становить 1,5 % ($\beta=0,015$). «Збурений» розмір замовлення збільшується на 2,26 % у порівнянні з економічним розміром замовлення, а у 11 періоді за цих умов відхилення становитиме +6,4 %. Однак, якщо замовлення здійснюється у 5 період, то відхилення зменшиться.

На рис. 6 наведемо чутливість відхилення розміру замовлення до поступового зростання витрат на виконання замовлення при незначних коливаннях попиту. Для побудови зафіксуємо амплітуду коливання попиту (значення параметру $\beta=0,015$), а показник ε змінюємо в інтервалі від 0 до 0,02 (темпл змін витрат на виконання замовлення не перевищує 2 %).

На рис. 7 наведемо залежність відхилення розміру замовлення від амплітуди коливання попиту при незначному зростанні витрат на виконання замовлення. Для побудови графіку зафіксуємо показник $\varepsilon=0,01$ (темпи зростання на виконання замовлення складають 1 %), а показник β – амплітуду коливання попиту змінюємо від 0 до 0,2.

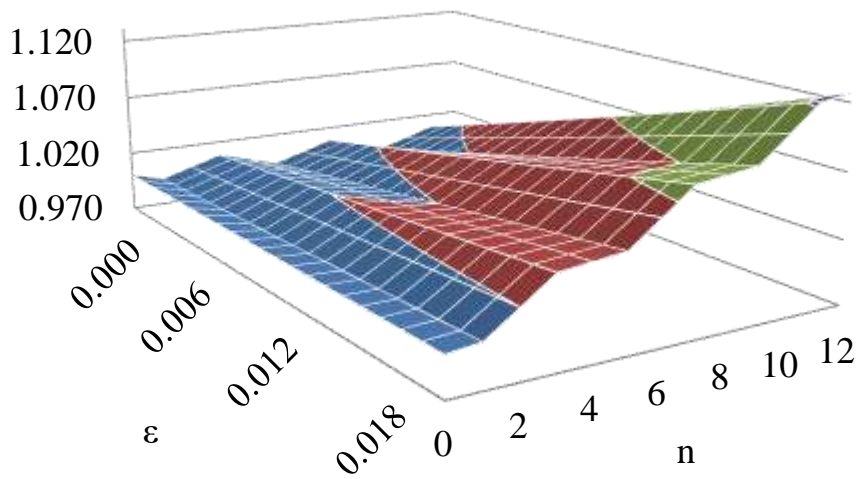


Рис. 6. Чутливість відхилення розміру замовлення до поступового зростання витрат на виконання замовлення (ϵ) за періодами n при незначних коливаннях амплітуди попиту

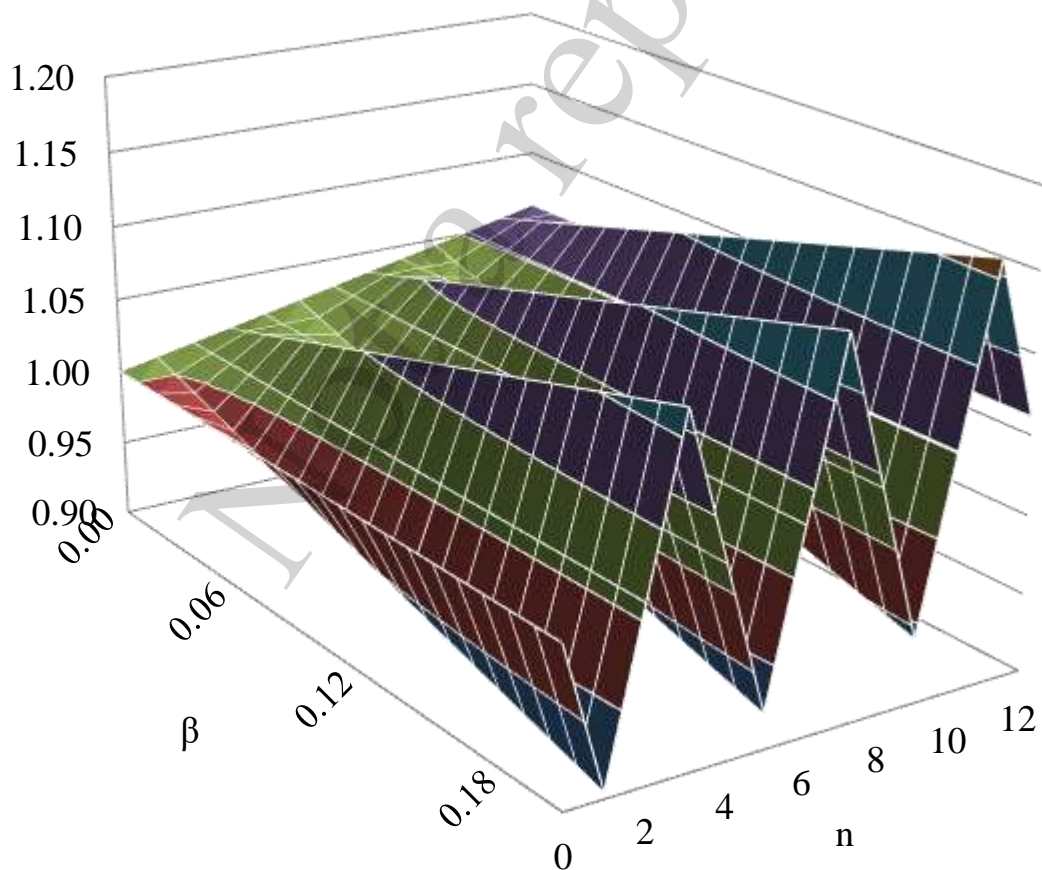


Рис. 7. Чутливість відхилення розміру замовлення до амплітуди коливання попиту (β) при незначному зростанні витрат на виконання замовлення за періодами n

Отже, рис. 6, 7 дають можливість візуально оцінити характер залежності відхилення «збуреного» розміру замовлення від оптимального, розрахованого за формулою Вільсона.

5. Обговорення результатів оптимізації моделі управління запасами за допомогою методів збурень

Запропонований асимптотичний підхід до розвитку моделі управління запасами з використанням методів збурень дозволяє знайти розв'язок задачі у великому діапазоні варіації вхідних параметрів. Це значно розширює сферу застосування EOQ-моделі. Під малим параметром в задачі пошуку оптимального розміру замовлення можна розуміти відсоткові темпи зростання витрат на зберігання та виконання замовлення, амплітуду коливання попиту та інші фактори.

В цьому дослідженні як діапазон зміни малого параметру ϵ , який характеризує темпи зростання витрат на виконання замовлення, був прийнятий інтервал від 0 до 0,025 (тобто 0–2,5 %). Як діапазон варіації параметру β , який визначає темпи зростання витрат на зберігання, був обраний інтервал від 0 до 0,2 (тобто 0–20 %). Такі значення параметрів обумовлені специфікою кожного з них. Параметр β приймає більші значення ніж параметр ϵ через суттєві збільшення комунальних витрат (на воду, електроенергію, опалення тощо). Однак, оскільки при побудові моделі нехтувались члени порядку малості більше ніж ϵ^2 та β^2 , похибка обчислення є несуттєвою з економічної точки зору.

Побудовані формули EOQ-моделі містять параметри n і m , які описують залежність витрат на зберігання та виконання замовлення. Вони характеризують інтервали зміни витрат на зберігання запасів (m) та зміни витрат на виконання замовлення (n). На практиці зміна вартості зберігання відбувається із затримкою у порівнянні зі зміною вартості замовлення, тому виразити зв'язок між параметрами n і m можна з використанням математичної функції цілої частини від числа $y = [x]$.

Аналітичний розв'язок задачі визначення економічного розміру замовлення за умови дискретного зростання витрат на виконання замовлення одержано у вигляді однопараметричної формули (10). Відповідно до неї виведена формула (12) загальних витрат на виконання замовлення та зберігання запасів. Застосування формули (10) замість формули Вільсона (1) дозволяє знизити загальні витрати (12) компанії. Оцінка чутливості EOQ-моделі виявила, що відносне відхилення оптимального обсягу замовлення (рис. 1) при незначних змінних витратах на його виконання варіюється в межах від 1 % до 15 % в залежності від періоду.

Отримано асимптотичний розв'язок задачі визначення економічного розміру замовлення за умови зміни витрат на виконання замовлення та зберігання запасів за допомогою методу збурень у вигляді двопараметричної формули (14), що дозволяє знизити загальні витрати (16) компанії в цьому випадку. Дослідження чутливості розміру замовлення до зміни витрат на його замовлення та зберігання запасів (рис. 2, 3) виявило, що він залежить від періодів зміни вхідних параметрів, а також відсоткової зміни відповідних витрат. Розрахунок відхилення обсягу замовлення за формулою (14) відносно формули Вільсона (1) (табл. 2, 3) при різних значеннях вхідних параметрів демонструє різноспрямовану динаміку. Так, відхилення може сягати від +3 % до –16 % для відповідних періодів.

Розв'язок EOQ-задачі за умови зростання витрат на виконання замовлення та періодичних коливань попиту на пропоновану продукцію одержано у вигляді (18). Характер залежності відхилення розміру замовлення до зростання витрат на його виконання при незначних коливаннях попиту наведено на рис. 6. Із зростанням витрат на виконання замовлення відбуваються зміни оптимального обсягу замовлення від -1% до $+12\%$. Залежність відхилення збуреного розміру замовлення до амплітуди коливання попиту при зростанні витрат на його виконання (рис. 7) має різноспрямований характер. Характер змін залежить від періоду. Так, мінімальні обсяги замовлення спостерігаються у періоди 1, 5, 9, а максимальні у періоди 3, 7, 11. При цьому обсяг замовлення коливається від -10% до $+15\%$.

Однак обмеженням, притаманним цьому дослідженню, є використання обраних форм функціональної залежності витрат на виконання замовлення та зберігання запасів, а також попиту на продукцію фірми.

Отримані однопараметричні та двопараметричні розв'язки EOQ-моделі мають практичну значущість, оскільки аналітичні асимптотичні формули є зручними для аналізу та використання менеджментом компаній і можуть бути використані у подальших дослідженнях за умови зміни характеру варіації витрат.

Загальні витрати, які відповідають розміру замовлення, отриманому за асимптотичними формулами в даній роботі, суттєво не відрізняються від тих, що відповідають розміру замовлення класичної EOQ-моделі. Проте, в масштабах загальних закупівель підприємств скорочення витрат може бути значним.

Запропонований метод «збурень», застосований до моделі управління запасами, є розвитком аналітичного інструментарію управління логістикою закупівель та запасів на відміну від [4–7]. Зокрема, запропоновані асимптотичні формули дозволяють моделювати систему управління запасами підприємства за умови змінних витрат на виконання замовлення та зберігання, а також враховують коливань попиту на товари та послуги, що пропонуються фірмою на ринку. Маючи зручну для використання модель, яка враховує зміни попиту та витрат, менеджер може своєчасно внести корективи в процеси організації закупівель підприємства, мінімізувати загальні витрати та підвищити конкурентоспроможність компанії на ринку.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з адаптацією методу «збурень» до інших логістичних моделей, в яких можуть бути виокремлені малі параметри, що мають економічний зміст. Крім того, доцільним вважається розробка аналітичних асимптотичних моделей управління логістичними процесами у випадку змінних входних параметрів системи. Зокрема метод «збурень» може бути застосований до побудови моделі багатономенклатурних поставок за умови змінних параметрів системи.

6. Висновки

1. У роботі на основі методу збурень одержано асимптотичну формулу для визначення економічного розміру замовлення за умови незначного дискретного зростання витрат на виконання замовлення. Ця формула містить малий параметр, який характеризує зміну витрат на виконання замовлення в залежності від періодів. Вона є зручною для використання та дає можливість отримати

уточнені значення обсягів замовлення і загальних витрат, що дозволяє менеджменту компанії оптимізувати логістичні процеси. Відхилення збурених обсягів замовлення знаходиться в межах від 1 % до 15 % в залежності від періоду. Порівняльний аналіз загальних витрат, розрахованих з використанням формули Вільсона та асимптотичної формули, дає можливість констатувати, що врахування змін обсягів замовлення, які відповідають збуреному його розміру, призводить до зменшення загальних логістичних витрат фірми.

2. Побудована двопараметрична модель управління запасами, яка враховує як незначні зміни витрат на виконання замовлення, так і витрати зберігання запасів. Одержані асимптотичні формули з двома малими параметрами для визначення оптимального розміру замовлення та загальних витрат, які відповідають розміру замовлення, визначеному за формулою Вільсона (1), та збуреному розміру. Дослідження характеру відхилення «збуреного» розміру замовлення від економічного за різних умов поступового зростання витрат на виконання замовлення і зберігання виявив, що він є переважно лінійним через малість входних параметрів моделі. Відхилення збурених обсягів замовлення знаходиться в межах від +3 % до -16 % для відповідних періодів.

3. Одержана двопараметрична модель, що враховує дискретне підвищення витрат на виконання замовлення та періодичний характер коливань попиту на пропоновану продукцію за умови їх незначних змін. Вона містить два малих параметра, які характеризують відсоткову зміну витрат на виконання замовлення та амплітуду коливання попиту на продукцію. Чутливість відхилення збуреного розміру замовлення від оптимального при поступовому зростанні витрат на виконання замовлення в залежності від періоду при незначних коливаннях попиту становить від -2 % до +13 %. Відсоткове відхилення розміру замовлення від оптимального в залежності від амплітуди коливань попиту та періоду n при фіксованих темпах зростання витрат на виконання замовлення становить від -1 % до +6,5 %. Як показали результати дослідження, більший вплив на оптимальний обсяг замовлення спричиняють темпи зростання витрат на виконання замовлення, ніж амплітуда коливань попиту на продукцію, які є малими параметрами побудованої моделі. Ця модель має практичне значення для менеджменту компанії через те, що окрім змін витрат на замовлення та зберігання, попит на продукцію фірми також може зазнавати коливань, які обумовлюються зміною різних внутрішніх та зовнішніх факторів.

Література

1. Андрианов, И. В., Маневич, Л. И. (1994). Асимптология: идеи, методы, результаты. Москва: Аслан, 160.
2. Найфэ, А. Х. (1984). Введение в методы возмущений. Москва: Мир, 536.
3. Грищак, В. З. (2009). Гибридные асимптотичні методи та техніка їх застосування. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 226.
4. Koiter, W. T., Elishakoff, I., Li, Y. W., Starnes, J. H. (1994). Buckling of an axially compressed cylindrical shell of variable thickness. International Journal

of Solids and Structures, 31 (6), 797–805. doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)90078-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)90078-7)

5. Elishakoff, I., Hache, F., Challamel, N. (2018). Variational derivation of governing differential equations for truncated version of Bresse-Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 435, 409–430. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.07.039>

6. Gristchak, V. Z., Ganilova, O. A. (2008). A hybrid WKB–Galerkin method applied to a piezoelectric sandwich plate vibration problem considering shear force effects. *Journal of Sound and Vibration*, 317 (1-2), 366–377. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.03.043>

7. Geer, J. F., Andersen, C. M. (1989). A Hybrid Perturbation-Galerkin Method for Differential Equations Containing a Parameter. *Applied Mechanics Reviews*, 42 (11S), S69–S77. doi: <https://doi.org/10.1115/1.3152410>

8. Лукинский, В. С., Лукинский, В. В., Плетнева, Н. Г. (2016). Логистика и управление цепями поставок. Москва: Издательство Юрайт, 359.

9. Pentico, D. W., Drake, M. J. (2011). A survey of deterministic models for the EOQ and EPQ with partial backordering. *European Journal of Operational Research*, 214 (2), 179–198. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.01.048>

10. Jaggi, C. K., Goel, S. K., Mittal, M. (2013). Credit financing in economic ordering policies for defective items with allowable shortages. *Applied Mathematics and Computation*, 219 (10), 5268–5282. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.11.027>

11. Tripathi, R. P., Singh, D., Mishra, T. (2015). Economic Order Quantity with Linearly Time Dependent Demand Rate and Shortages. *Journal of Mathematics and Statistics*, 11 (1), 21–28. doi: <https://doi.org/10.3844/jmssp.2015.21.28>

12. Mittal, M., Khanna, A., Jaggi, C. K. (2017). Retailer's ordering policy for deteriorating imperfect quality items when demand and price are time-dependent under inflationary conditions and permissible delay in payments. *International Journal of Procurement Management*, 10 (4), 461–494. doi: <https://doi.org/10.1504/ijpm.2017.085037>

13. Brodetskii, G. L. (2017). Influence of order payment delays on the efficiency of multinomenclature reserve control models. *Automation and Remote Control*, 78 (11), 2016–2024. doi: <https://doi.org/10.1134/s0005117917110078>

14. Tyagi, A. P. (2014). An Optimization of an Inventory Model of Decaying-Lot Depleted by Declining Market Demand and Extended with Discretely Variable Holding Costs. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 5, 71–86. doi: <https://doi.org/10.5267/j.ijiec.2013.09.005>

15. Vijayashree, M., Uthayakumar, R. (2015). An EOQ Model for Time Deteriorating Items with Infinite & Finite Production Rate with Shortage and Complete Backlogging. *Operations Research and Applications: An International Journal*, 2 (4), 31–50. doi: <https://doi.org/10.5121/oraj.2015.2403>

16. Vijayashree, M., Uthayakumar, R. (2017). A single-vendor and a single-buyer integrated inventory model with ordering cost reduction dependent on lead time. *Journal of Industrial Engineering International*, 13 (3), 393–416. doi: <https://doi.org/10.1007/s40092-017-0193-y>

17. Герами, В., Шидловский, И. (2014). Поставки несколькими транспортными средствами при управлении запасами. Риск: ресурсы, информация, снабжение, конкуренция, 3, 66–71. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22510104>
18. Головань, О. О. Олійник, О. М., Шишкін, В. О. (2015). Моделювання логістичних бізнес-процесів з використанням асимптотичних методів. Актуальні проблеми економіки, 9, 428–433. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ape_2015_9_55
19. Yousefli, A., Ghazanfari, M. (2012). A Stochastic Decision Support System for Economic Order Quantity Problem. *Advances in Fuzzy Systems*, 2012, 1–8. doi: <https://doi.org/10.1155/2012/650419>
20. Эрдэнэбат, М., Кузьмин, О. В., Тунгалаг, Н., Энхбат, Р. (2017). Оптимизационный подход к стохастической задаче управления запасами. Современные технологии. Системный анализ. Моделирование, 3 (55), 106–109. doi: [https://doi.org/10.26731/1813-9108.2017.3\(55\).106-110](https://doi.org/10.26731/1813-9108.2017.3(55).106-110)
21. Kaur, P., Deb, M. (2014). An Intuitionistic Approach to an Inventory Model without Shortages. *International Journal of Pure and Applied Sciences and Technology*, 22 (2), 25–35. URL: https://www.researchgate.net/profile/Prabjot_Kaur/publication/273135862_An_Intuitionistic_Approach_to_an_Inventory_Model_without_Shortages/links/54f949930cf28d6deca3f55f/An-Intuitionistic-Approach-to-an-Inventory-Model-without-Shortages.pdf
22. Ritha, W., Sagayarani SSA, Sr. A. (2013) Determination of Optimal Order Quantity of Integrated an Inventory Model Using Yager Ranking Method. *International Journal of Physics and Mathematical Sciences*, 3 (1), 73–80. URL: <https://www.cibtech.org/J-PHYSICS-MATHEMATICAL-SCIENCES/PUBLICATIONS/2013/Vol%203%20No.%201/12-006...%20Ritha...Determination...Method...73-80.pdf>
23. Cárdenas-Barrón, L. E., Sana, S. S. (2015). Multi-item EOQ inventory model in a two-layer supply chain while demand varies with promotional effort. *Applied Mathematical Modelling*, 39 (21), 6725–6737. doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.02.004>
24. Олійник, О. М., Коваленко, Н. М., Головань, О. О. (2016). Адаптація систем управління логістикою на підприємствах з використанням асимптотичних методів. Актуальні проблеми економіки, 5, 395–401. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ape_2016_5_46
25. Horoshkova, L., Khlobystov, I., Volkov, V., Holovan, O., Markova, S. (2019). Asymptotic Methods in Optimization of Inventory Business Processes. *Proceedings of the 2019 7th International Conference on Modeling, Development and Strategic Management of Economic System (MDSMES 2019)*. doi: <https://doi.org/10.2991/mdsmes-19.2019.12>
26. Sanni, S., Jovanoski, Z., Sidhu, H. S. (2020). An economic order quantity model with reverse logistics program. *Operations Research Perspectives*, 7, 100133. doi: <https://doi.org/10.1016/j.orp.2019.100133>
27. Rasay, H., Golmohammadi, A. M. (2020). Modeling and Analyzing Incremental Quantity Discounts in Transportation Costs for a Joint Economic Lot Sizing Problem. *Iranian Journal of Management Studies (IJMS)*, 13 (1), 23–49. doi: <https://doi.org/10.22059/ijms.2019.253476.673494>

28. Satiti, D., Rusdiansyah, A., Dewi, R. S. (2020). Modified EOQ Model for Refrigerated Display's Shelf-Space Allocation Problem. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 722, 012014. doi: <https://doi.org/10.1088/1757-899x/722/1/012014>

29. Лукинский, В., Фатеева, Н. (2011). Совершенствование аналитических методов управления запасами. Логистика, 2, 46–49. URL: http://www.logistika-prim.ru/sites/default/files/46-49_0.pdf

30.

Not a reprint