

## Напіваналітичний метод аналізу контактної взаємодії елементів конструкцій за узгодженими поверхнями

М. М. Ткачук, А. В. Грабовський, М. А. Ткачук, М. С. Саверська,  
І. П. Гречка

*Значна частина конструкцій має у своєму складі деталі, які перебувають у контактній взаємодії одна з одною. Це, наприклад, штампи, прес-форми, верстатні пристосування, технологічне обладнання, двигуни тощо. Для них характерним є варійований режим навантаження. Тому важливим аспектом при дослідженні напружено-деформованого стану таких конструкцій є визначення залежності контактного тиску від зовнішніх сил, які на них діють. Принцип суперпозиції для контактних задач у загальному випадку незастосовний. Однак для такого типу конструкцій установлена лінійна залежність контактного тиску від рівня навантаження. При цьому область контактної взаємодії не залежить від рівня навантаження. Продемонстровано, що така закономірність справедлива не тільки для однокомпонентного, але і для багатоконпонентного навантаження. У результаті забезпечується можливість оперативного визначення напружено-деформованого стану таких конструкцій зі збереженням точності одержуваних результатів.*

*Застосовність розробленого методу продемонстрована на прикладі верстатних пристосувань лещатного типу. Установлені закономірності мають значення при здійсненні проектних досліджень конструкцій. Завдяки установленій прямо пропорційній залежності розв'язку від діючих навантажень стає можливим скоротити терміни розробок конструкцій із елементами, що перебувають у контактній взаємодії на поверхнях співпадаючої форми. При цьому розглядали різні варіанти набору навантажень, а також різні варіанти варіювання цих навантажень. Для розглянутих випадків підтвердилася пряма пропорційність компонент напружено-деформованого стану величині діючих сил у випадку їх узгодженої зміни. Також показано, що при нерівномірній зміні окремих компонент навантажень залежність контактного тиску і компонент напружено-деформованого стану досліджених об'єктів від діючих сил має складний характер, відмінний від прямо пропорційного зв'язку. Одержані залежності служать основою при обґрунтуванні проектних і технологічних параметрів конструкцій, що проектуються, а також режимів їх експлуатації*

*Ключові слова: контактний тиск, напружено-деформований стан, теорія варіаційних нерівностей, верстатне пристосування, область контактної взаємодії*

### 1. Вступ

Серед машинобудівних конструкцій значну частину складають такі, у складі яких є деталі, що контактують за узгодженими (конгруентними) поверхнями. Це,

наприклад, технологічне обладнання (преси, верстати, термопластавтомати), технологічне оснащення (пристосування, штампи, прес-форми), двигуни тощо. Відповідно, при цьому неможливо уникнути розв'язання задачі про контактну взаємодію елементів цих конструкцій [1]. На етапі проектних досліджень напружено-деформованого стану (НДС) серед варійованих параметрів присутні не тільки проектні та технологічні параметри, але й діючі навантаження. Враховуючи, що у загальному випадку контактні задачі є нелінійними, це створює ситуацію, у якій необхідно додатково здійснювати комп'ютерні розрахунки НДС при варіюванні кожного із компонентів системи діючих навантажень. Відповідно, різко зростає обсяг обчислень. Це припадає на той етап проектних розробок, коли тривалість чисельних досліджень є найбільш обмежувальним фактором. З іншого боку, застосування спрощених аналітичних залежностей для аналізу розподілу контактного тиску та компонент НДС у багатьох випадках неприпустиме, оскільки це призводить до значної втрати точності розв'язку. Отже, створене протиріччя між необхідною точністю та оперативністю чисельних досліджень НДС елементів конструкцій. Задля вирішення цього протиріччя для окремого класу конструкцій пропонується новий метод, який дає можливість поєднати переваги чисельного та аналітичного моделювання НДС конструкцій. Така задача є актуальною, оскільки її розв'язання дає можливість різко підвищити оперативність досліджень широкого класу конструкцій.

## **2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми**

Особливістю сучасного машинобудування є широке застосування та виготовлення прогресивних конструкцій, що виконують традиційні функції. Це, наприклад, нагнітачі [2, 3], насоси [4, 6], підшипники [5], гідромашини [7–11] тощо. Так, у роботах [2, 3] із залученням чисельного та експериментального моделювання визначені характеристики цих складних конструкцій. Проте, у цих роботах не описані дослідження НДС окремих елементів нагнітачів із урахуванням контактної взаємодії. У роботах [4, 5] описані чисельні та експериментальні дослідження елементів насосів та роликів підшипників. Проте з точки зору аналізу контактної взаємодії до аналізу працездатності цих елементів є зауваження. Вони полягають у недостатній увазі до розподілів компонент НДС, які зумовлені дією контактного тиску. У роботах [7–11] досліджені робочі процеси у насосах, гідромоторах та роторах мехатронних систем. Разом із тим, недостатня увага приділяється нелінійним процесам і станам, що реалізуються у таких конструкціях.

Таким чином, у цих роботах для обґрунтування раціональної форми, розмірів та режимів експлуатації таких конструкцій застосовуються та розробляються високоефективні моделі та методи досліджень. У багатьох випадках такі дослідження призводять до необхідності розв'язання нелінійних задач аналізу [4–6]. Однак це суттєво збільшує обсяг чисельних досліджень, оскільки стає несправедливим принцип суперпозиції, який властивий лінійним системам. Отже, як варіант усунення цього протиріччя, привабливою є перспектива хоча би для частинних випадків установити закономірності поведінки розв'язків нелінійних задач при варіюванні, зокрема, діючих навантажень [8–10]. Це створило би можливість поєднання переваг чисельних та аналітичних методів дослі-

джень. З одного боку, – це широка область застосування та висока точність, а з іншого – оперативність, а також наочність та прогнозування тенденцій зміни результатів аналізу при варіюванні навантажень.

Зокрема, це дуже важливо для аналізу контактної взаємодії тіл уздовж співпадаючих поверхонь. Це – достатньо широкий та розповсюджений клас конструкцій. Для їх функціонування важливим аспектом є забезпечення необхідного рівня міцності або жорсткості. А це, в свою чергу, визначається, значною мірою, контактною взаємодією системи тіл. Натепер це – не повністю досліджена тема [1].

На теперішній час існує велика кількість проблем у дослідженні контакту пружних тіл. Контактна взаємодія елементів конструкцій складає важливий та обширний напрям у механіці [1]. Для розв'язання задач про контактну взаємодію елементів конструкцій розроблено широку множину методів та моделей. Зокрема, це роботи [1, 12–14]. Для розв'язання контактних задач, які при цьому виникають, у цих роботах застосовуються методи варіаційних нерівностей або варіаційний принцип Калькера [14–16]. Ці методи та моделі охоплюють широкий клас контактних задач, проте мають низку недоліків. Серед них – відсутність універсального механізму урахування різних чинників, зокрема властивостей матеріалів проміжних шарів між контактуючими тілами. У роботах [17–19] описані моделі властивостей шорстких поверхонь контактуючих тіл із врахуванням їх хвилястості. У роботах [20–22] описано вплив геометричної форми поверхонь та розподілу властивостей матеріалу на контактну взаємодію пружних тіл. Ці моделі мають велике методологічне значення. Проте залишається питання інтегрування цих моделей у задачі тієї чи іншої предметної області. У роботах [23, 24] увага приділяється контакту із адгезією. У роботах [25, 26] описана, зокрема, модель ЖКР для аналізу контакту тіл із адгезією. Ці моделі дають можливість визначити залежність не тільки стискних, але й сил розтягнення при контакті пружних тіл. Проте для чисельної реалізації ці моделі створюють певні труднощі. У роботах [27–29] описано застосування методу граничних елементів для аналізу контактної взаємодії пружних тіл. Цей метод має деякі переваги перед методом скінченних елементів. Проте є певні обмеження при застосуванні до реальних машинобудівних конструкцій.

Окремі, важливі для аналізу контактної взаємодії пружних тіл, чинники враховані у низці робіт. Це, зокрема, урахування впливу болтових з'єднань [30, 31], наявність лінійного або нелінійного проміжного шару між контактуючими тілами [32–34] тощо. Крім того, у деяких роботах [35–37] враховуються спеціальні властивості тонкостінних конструкцій або зміцнених поверхневих шарів деталей машин на їх міцність і жорсткість. При цьому класичні підходи, описані у роботах [38–40] стосовно моделей механіки суцільного середовища, методу скінченних елементів та методів мінімізації, створюють основу тільки для загальної варіаційної постановки задач аналізу контактної взаємодії. Проте пряме їх застосування не дає можливості напряму ставити та розв'язувати усі типи виникаючих контактних задач.

Таким чином, існуючі підходи, методи, моделі та засоби досліджень не дають прямої можливості здійснювати аналіз закономірностей розподілу контактного тиску між тілами за узгодженими поверхнями. Таку можливість нада-

ють розробки, описані у роботах [34, 41, 42]. Ці розробки розширюють відомі методи типу варіаційного принципу Калькера і метода граничних елементів [16, 28]. При цьому вдається уникнути недоліків традиційних методів і моделей. Разом із тим стає можливим застосувати ці розробки для розв'язання задач контактної взаємодії тіл із узгодженими поверхнями. При цьому природнім чином ураховуються властивості проміжних шарів.

Слід звернути увагу на ту обставину, що у низці робіт установлені залежності зміни розв'язків задач про напружено-деформований стан елементів конструкцій на контактуючих поверхнях співпадаючої форми [34, 41, 42]. Проте залишається невизначеною поведінка розв'язків таких задач при багатокомпонентній множині навантажень, яка складається не з однієї-двох, а з декількох сил.

### 3. Мета і завдання дослідження

Метою дослідження є розробити напіваналітичний метод дослідження НДС конструкцій із елементами, що контактують за узгодженими (конгруентними) поверхнями. Це дасть можливість прискорити розв'язання задач про контактну взаємодію елементів конструкцій за узгодженими поверхнями.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

- розробити моделі та методи досліджень контактної взаємодії конструкцій із елементами, які взаємодіють за узгодженими (конгруентними) поверхнями;
- здійснити розв'язання тестових чисельних задач;
- проаналізувати зміни розподілів компонент НДС та контактного тиску у досліджених об'єктах.

### 4. Моделі та методи досліджень контактної взаємодії конструкцій із елементами, які взаємодіють за узгодженими (конгруентними) поверхнями

У розгляд вводиться система контактуючих тіл, які займають у просторі об'єми  $\Omega_n$ ,  $n=1, \dots, N$  (тут  $N$  – кількість тіл). Визначаються наступні компоненти НДС цих тіл: вектор переміщень точок тіл  $\vec{u}^{(n)}$ , тензори деформацій  $\epsilon^{(n)}$  та напружень  $\sigma^{(n)}$ . Ці компоненти утворюють поля, тобто розподіли цих величин відносно просторових координат  $x_k$ ,  $k=1, 2, 3$ , які є компонентами радіус-вектора  $\vec{r}$  довільної точки  $M_n \in \Omega_n$ . Компоненти НДС задовольняють системі рівнянь механіки суцільного середовища [38]:

$$2\epsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}; \quad \sigma_{ij,j} + f_j = 0;$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Тут компоненти  $u$ ,  $\epsilon$ ,  $\sigma$  фігурують без індекса  $n$  приналежності до того чи іншого тіла, тобто вони справедливі для усіх тіл.

У рівняннях (1)  $f_i$  – компоненти об'ємних навантажень,  $C_{ijkl}$  – компоненти тензора пружних констант матеріалу.

Рівняння (1) доповнюються граничними умовами:

$$u^{(n)} \Big|_{S_u^{(n)}} = u^{(n)*}, \quad \sigma^{(n)} \Big|_{S_\sigma^{(n)}} = \sigma^{(n)*}, \quad (2)$$

де  $u^*$ ,  $\sigma^*$  – задані переміщення та навантаження на поверхнях  $S_u^{(n)}$  та  $S_\sigma^{(n)}$  відповідно.

Крім того, на частинах контактних поверхонь  $S_c^{(pq)}$  діють умови непроникнення:

$$u_v^{(p)} + u_v^{(q)} \leq \delta_{pq}; \quad p, q = 1, \dots, N, \quad (3)$$

де  $u_v^{(p)}$ ,  $u_v^{(q)}$  – переміщення у напрямку нормалі  $v$  до поверхні  $S_c^{(pq)}$ ;  $\delta_{pq}(r_p) \equiv \delta_{pq}(r_q)$  – розподіл зазору між тілами  $\Omega_p$  та  $\Omega_q$ ;  $N$  – кількість тіл, що контактують.

У загальному випадку  $\delta_{pq}(r_p)$  – деякий довільний розподіл зазору. Разом із тим, для певного класу конструкцій (рис. 1)  $\delta_{pq} \equiv 0$ . Якщо до того ж  $S_c$  – частини площин, то за відсутності тертя приходимо до варіаційного формулювання контактної задачі [12–14]:

$$I(u) \rightarrow \min, \quad (4)$$

де  $u = \bigcup_n u^{(n)}$  – розподіли переміщень точок контактуючих тіл, які задовольняють умовам (2), (3).

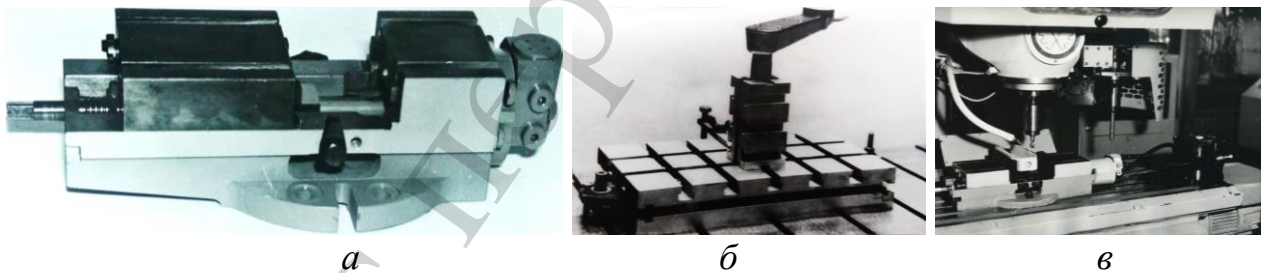


Рис. 1. Приклади конструкцій із контактом тіл за узгодженими поверхнями: *a* – лещата з однією рухомою губкою; *б* – універсальне збірне пристосування; *в* – лещата з двома рухомими губками

Функціонал повної енергії досліджуваної системи контактуючих тіл [12–14]:

$$I(u) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_n} \sigma_{ij}^{(n)}(u^{(n)}) \cdot \varepsilon_{ij}^{(u)}(u^{(n)}) d\Omega_n - \sum_{S_\sigma^{(n)}} \int \sigma^{(n)*} \cdot u^{(n)} dS_\sigma^{(n)}, \quad (5)$$

визначений на множині переміщень  $u$ . При дискретизації цього функціонала із застосуванням методу скінченних елементів (МСЕ) [32] функціонал приймає вигляд квадратичної форми  $J$ :

$$J(U) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} K_{ij} U_i U_j - \sum_i f_i U_i, \quad (6)$$

де  $U$  – масив вузлових переміщень із компонентами  $U_i$ ;  $f$  – масив вузлових сил із компонентами  $f_i$ ;  $K_{ij}$  – компоненти матриці жорсткості  $K$ .

При цьому співвідношення (3) набувають вигляду:

$$U_e - U_g \leq 0, \quad (7)$$

де індекси  $e, g$  відповідають нормальним переміщенням спряжених вузлів скінченно-елементних моделей контактуючих тіл.

Отже, вихідна задача набуває вигляду задачі квадратичного програмування [40, 43, 44]: знайти мінімум функції (6) на множині, заданій умовами (7). Подібні формулювання розглядаються у роботах [32, 34, 41, 42]. Проте розв'язувальні співвідношення у цих роботах сформовані для загального випадку розподілу початкового зазору між контактуючими тілами.

Як відмічається у роботах [41, 42], для випадку штампів та прес-форм підтверджується частинні закономірності для розподілів контактної тиску. Ці закономірності полягають у тому, що для одно- та двокомпонентних систем сил спостерігається прямо пропорційна залежність між рівнем діючих сил та рівнем контактної тиску. При цьому область контакту залишається незмінною при варіюванні діючих сил. Ставиться задача визначити правомірність цих особливостей для випадку багатокомпонентної системи сил, які діють на досліджувані конструкції.

Для випадку довільної системи сил, які діють на конструкції із тілами, що контактують за узгодженими поверхнями, як у роботі [41], можна застосовувати міркування про мінімум квадратичної форми (6) на областях, заданих обмеженнями (7) [43, 44]. Як видно із рис. 2, маємо у цьому випадку пропорційну залежність розв'язку, тобто точки мінімуму від рівня навантаження. Тобто якщо усі компоненти масиву  $f$  вузлових сил збільшити у  $\tau$  разів, то розв'язок зміниться також пропорційно. При цьому, якщо у співвідношеннях (7) виконується нерівність, то маємо безумовний мінімум  $J$  (точки  $O_0, O_\tau$  на рис. 2). Якщо ж у (7) справедлива рівність, то маємо умовний мінімум (точки  $T_0, T_\tau$  на рис. 2). Самі ж підмножини вузлів, у яких виконується рівність та нерівність, залишаються незмінними. Фізично це означає незмінність області контакту.

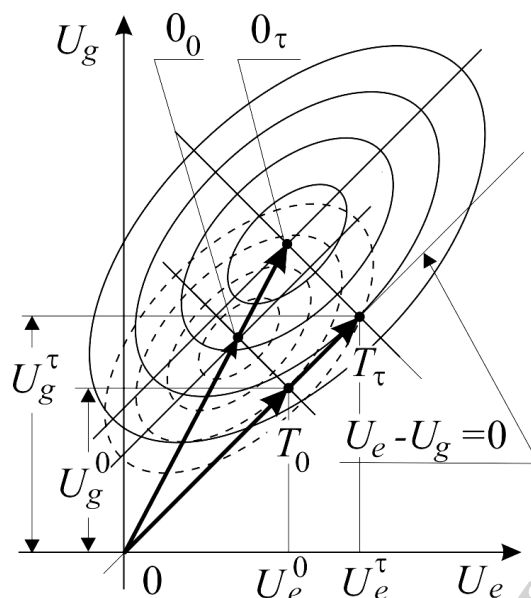


Рис. 2. Лінії рівня функції  $J$  у перерізі  $U_e - U_g$

Таким чином, для дискретизованої моделі досліджуваного об'єкта показана відома [1] справедливості прямої пропорційної залежності компонент НДС системи тіл, контактуючих за узгодженими поверхнями, від рівня діючої системи сил.

### 5. Розв'язання тестових чисельних задач

Як приклад досліджуваної конструкції розглядається верстатне пристосування лещатного типу. Для нього характерна наявність трьох компонент діючих сил. Першу створюють сили закріплення  $F$ , які діють у болтах В1 та В2 (рис. 3). Друга компонента – це зусилля закріплення  $Q$ , яке розвиває силовий циліндр. Третя компонента – це сила різання деталі  $N$ , яка діє з боку інструмента при виконанні технологічної операції. Контакт задається між підшоною лещат та основою.

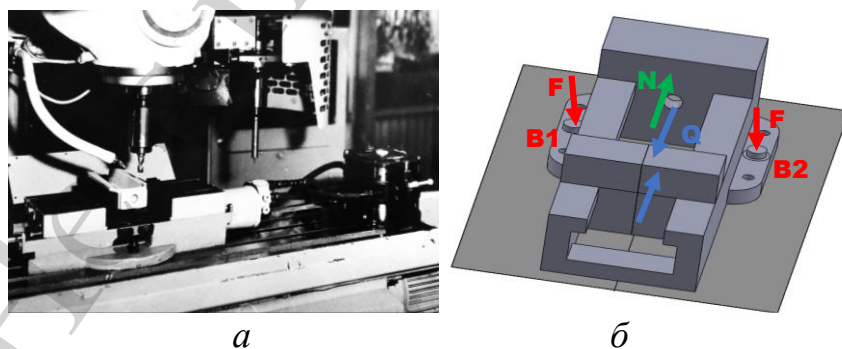


Рис. 3. Верстатні пристосування лещатного типу:  $a$  – зображення досліджуваного об'єкту;  $b$  – розрахункова модель та схема прикладення сил

Прийmemo за номінальні значення  $F_0=30$  кН,  $Q_0=60$  кН,  $N_0=40$  кН. При цьому поточне значення сил:

$$F = \tau_F \cdot F_0; Q = \tau_Q \cdot Q_0; N = \tau_N \cdot N_0. \quad (8)$$

Формулюються наступні задачі: варіюються коефіцієнти  $\tau_F$ ,  $\tau_Q$ ,  $\tau_N$  і визначаються залежності:

$$q^{\wedge} = \frac{q_{\max}(\tau_F, \tau_Q, \tau_N)}{q_{\max}(1,1,1)}; \sigma^{\wedge} = \frac{\sigma_{\max}(\tau_F, \tau_Q, \tau_N)}{\sigma_{\max}(1,1,1)}; u^{\wedge} = \frac{u_{\max}(\tau_F, \tau_Q, \tau_N)}{u_{\max}(1,1,1)}, \quad (9)$$

де  $q_{\max}$  – максимальний контактний тиск;  $\sigma_{\max}$  – максимальні еквівалентні напруження за Мізесом;  $u_{\max}$  – максимальні повні переміщення при заданих значеннях  $\tau_F$ ,  $\tau_Q$ ,  $\tau_N$ .

За результатами досліджень формуються залежності безрозмірних характеристик  $q^{\wedge}$ ,  $\sigma^{\wedge}$ ,  $u^{\wedge}$  від параметрів  $\tau_F$ ,  $\tau_Q$ ,  $\tau_N$ . Визначимо наступні сценарії варіювання параметрів  $\tau$ :

- 1)  $\tau_Q = \tau_N = 0$ ;  $\tau_F \in [0, 1; 10]$ ;
- 2)  $\tau_Q = 0$ ;  $\tau_N \in [0, 1; 10]$ ;  $\tau_F \in [0, 1; 10]$ ;
- 3)  $\tau_Q = \tau_N = \tau_F = \tau \in [0, 1; 10]$ .

Далі здійснено аналіз результатів розв'язання задач 1–3.

1. При варіюванні  $\tau_F$  ( $\tau_Q = \tau_N = 0$ ) одержуємо за допомогою скінченно-елементних пакетів незмінну картину розподілу контактної тиску, напружень та переміщень (рис. 4–6). Область контакту – постійна. Залежність  $q^{\wedge}(0, 0, \tau_F)$ ,  $\sigma^{\wedge}(0, 0, \tau_F)$ ,  $u^{\wedge}(0, 0, \tau_F)$  від  $\tau_F$  – прямо пропорційна (рис. 7).

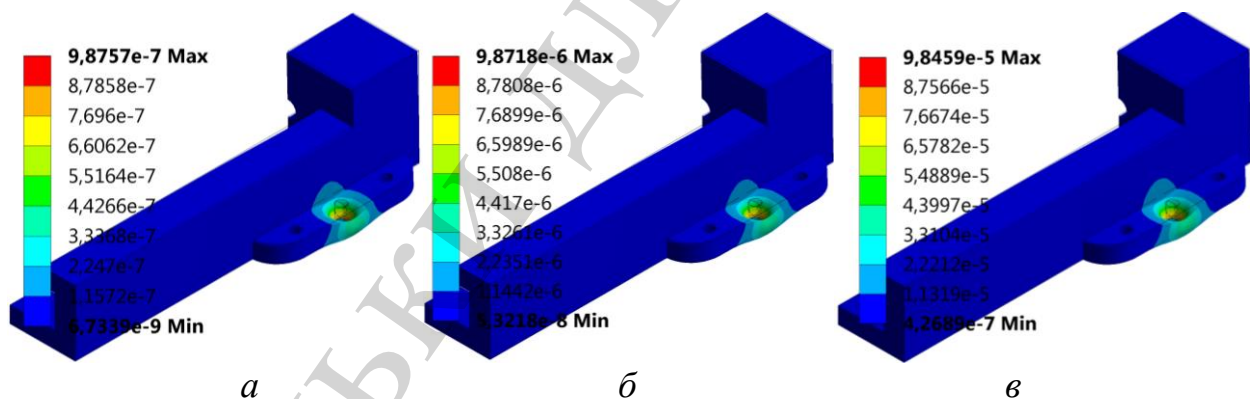


Рис. 4. Картини розподілу переміщень для характерних значень сили болтового закріплення: *a* –  $\tau_F = 0, 1$ ; *б* –  $\tau_F = 1$ ; *в* –  $\tau_F = 10$



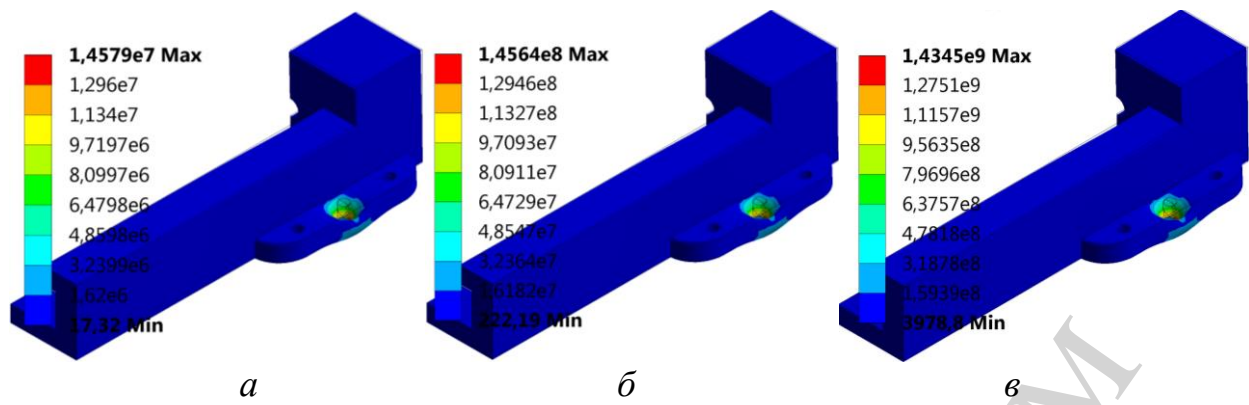


Рис. 5. Картини розподілу напружень для характерних значень сили болтового закріплення:  $a - \tau_F=0,1$ ;  $b - \tau_F=1$ ;  $v - \tau_F=10$

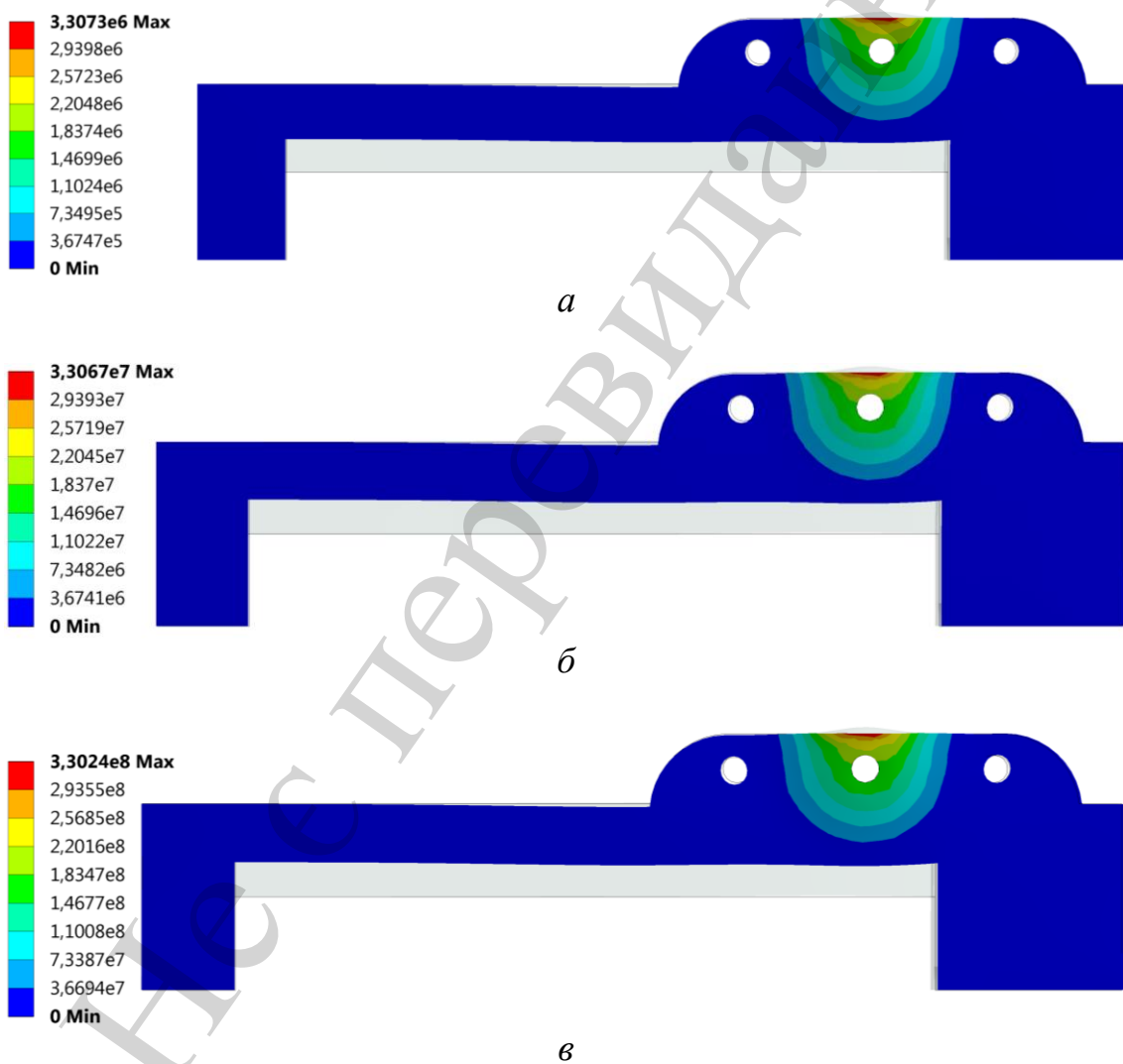


Рис. 6. Картини розподілу контактної тиску для характерних значень сили болтового закріплення:  $a - \tau_F=0,1$ ;  $б - \tau_F=1$ ;  $в - \tau_F=10$

2. При варіюванні  $\tau_F$ ,  $\tau_Q$  ( $\tau_N=0$ ) картина розподілу контактної тиску, напружень та переміщень сильно залежить від співвідношення  $\tau_F$ ,  $\tau_Q$  (рис. 8–10). Область контакту – змінна. Залежність  $q^{\wedge}(0, \tau_F, \tau_Q)$  має складний характер (рис. 11).

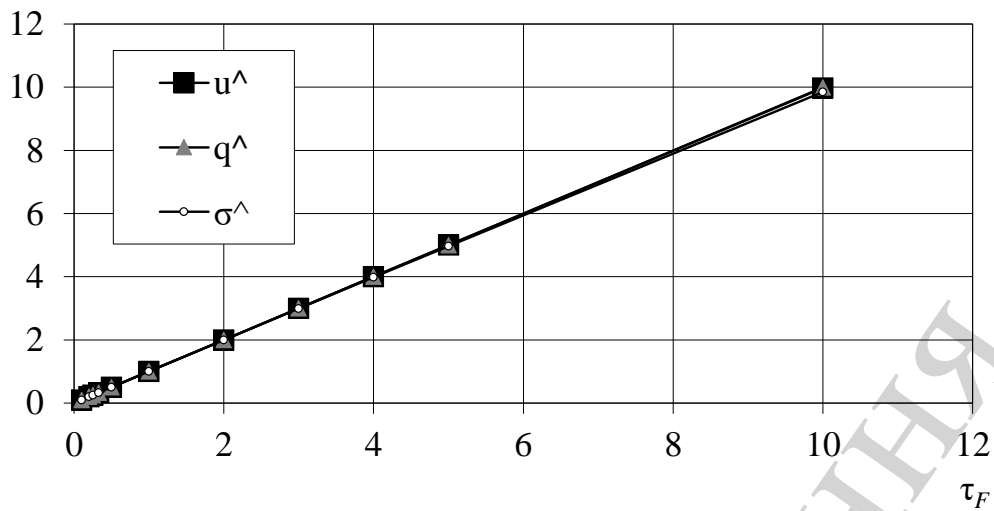


Рис. 7. Залежність зміни безрозмірних характеристик  $q^{\wedge}$ ,  $\sigma^{\wedge}$ ,  $u^{\wedge}$  від ступеня варіювання сили болтового закріплення  $\tau_F$

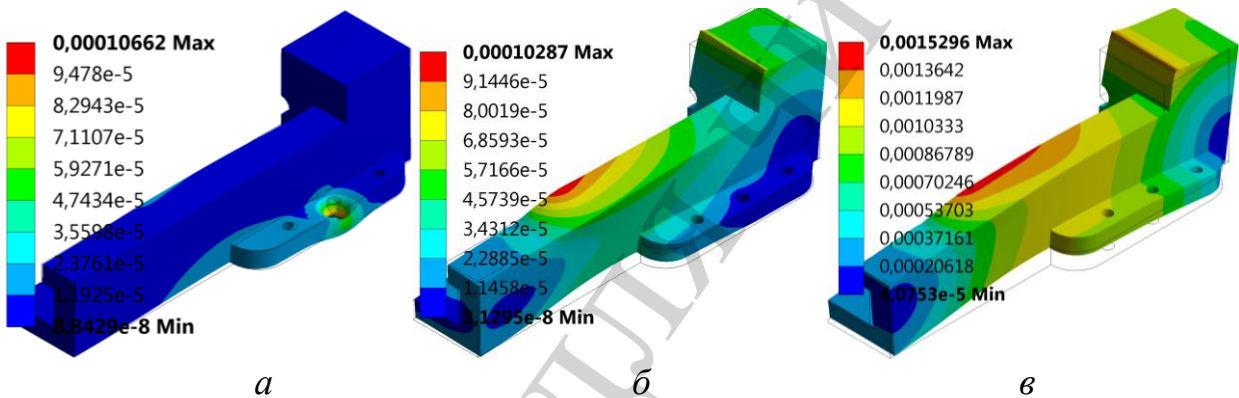


Рис. 8. Картини розподілу переміщень для різних варіантів варіювання  $\tau_N$ ,  $\tau_Q$ :  
 а –  $\tau_F=10$ ,  $\tau_Q=0,1$ ; б –  $\tau_F=1$ ,  $\tau_Q=1$ ; в –  $\tau_F=0,1$ ,  $\tau_Q=10$

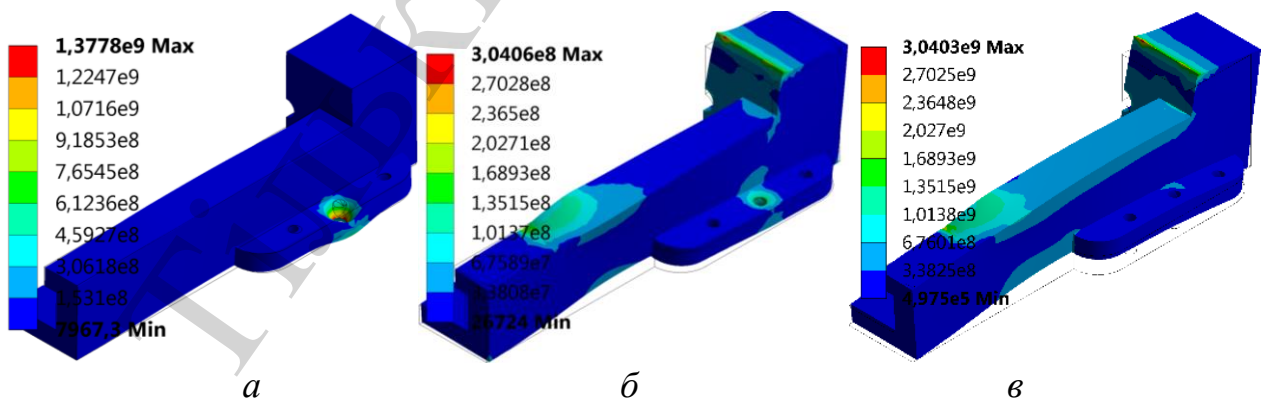


Рис. 9. Картини розподілу напружень для різних варіантів варіювання  $\tau_N$ ,  $\tau_F$ : а –  
 а –  $\tau_F=10$ ,  $\tau_Q=0,1$ ; б –  $\tau_F=1$ ,  $\tau_Q=1$ ; в –  $\tau_F=0,1$ ,  $\tau_Q=10$

У той же час, при фіксованих співвідношеннях  $\tau_N$ ,  $\tau_F$  спостерігається прямо пропорційна залежність характеристик  $q^{\wedge}$ ,  $\sigma^{\wedge}$ ,  $u^{\wedge}$  від  $\tau=\tau_N=\tau_F$ .

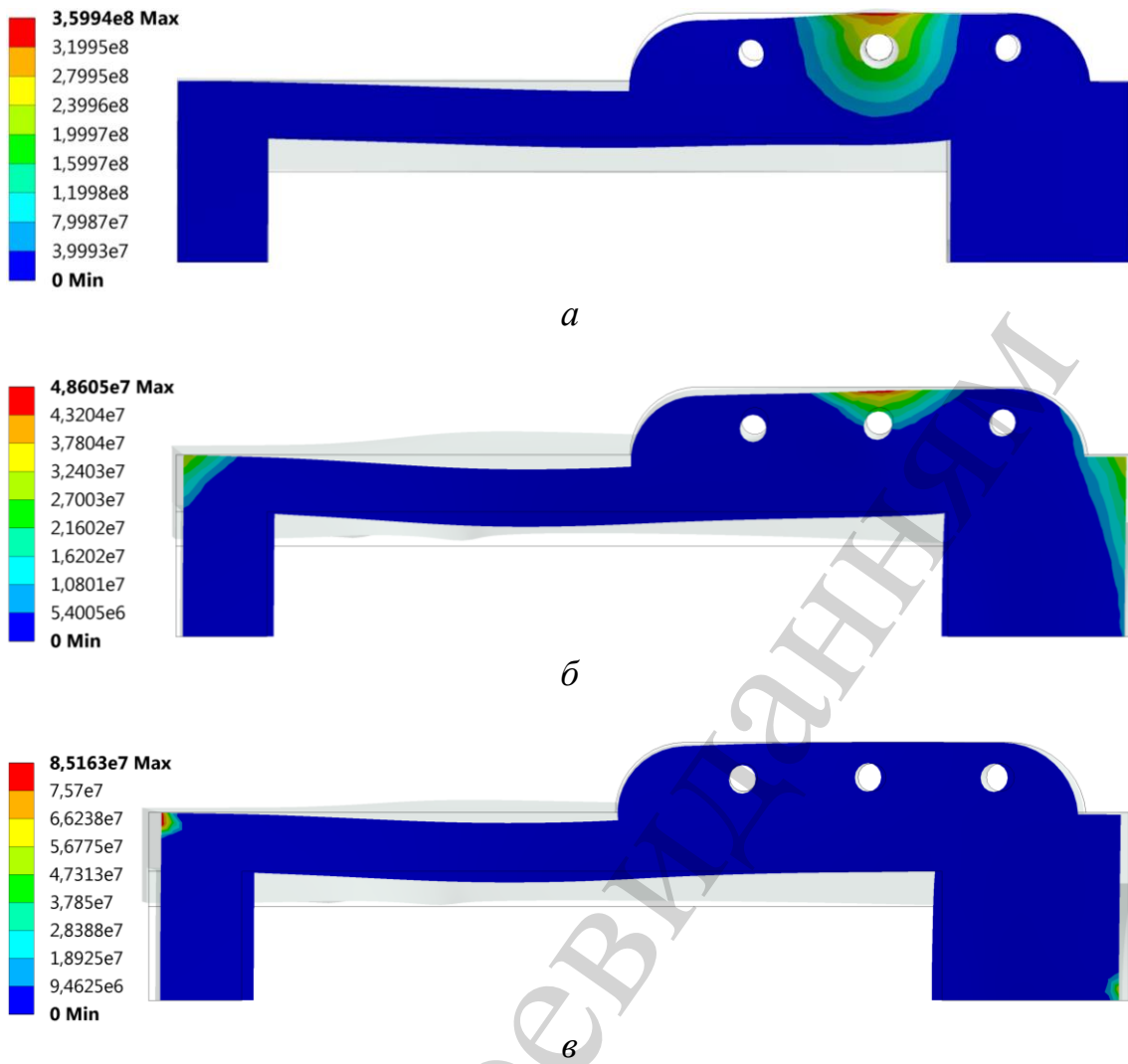


Рис. 10. Картини розподілу контактної тиску для різних варіантів варіювання  
*a* –  $\tau_F=10, \tau_Q=0,1$ ; *б* –  $\tau_F=1, \tau_Q=1$ ; *в* –  $\tau_F=0,1, \tau_Q=10$

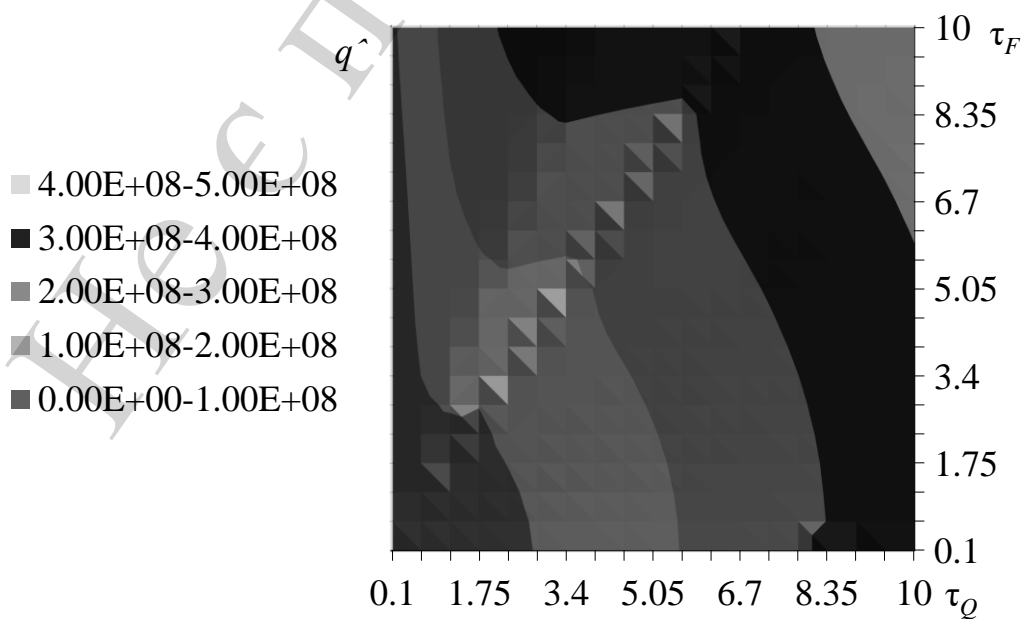


Рис. 11. Залежність  $\hat{q}$  від  $\tau_Q, \tau_F$

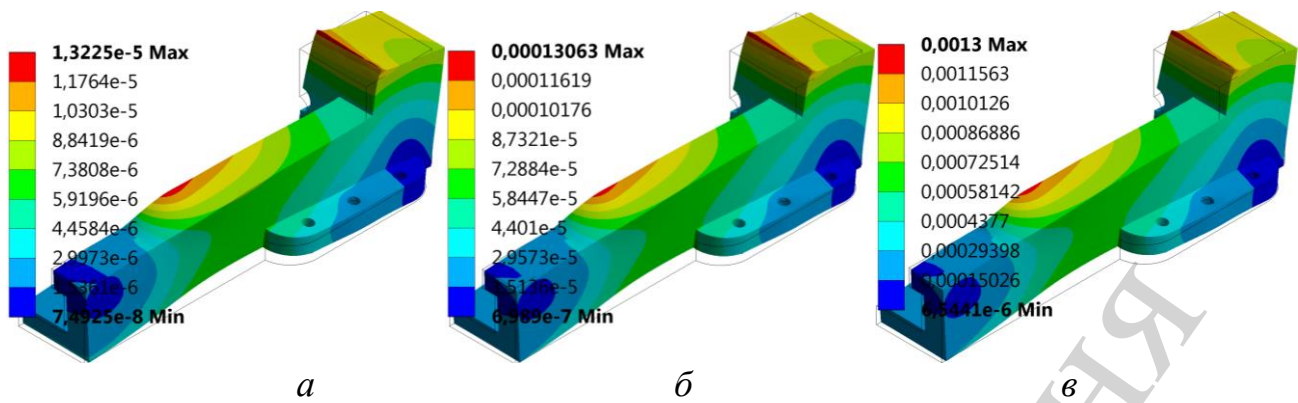


Рис. 12. Картини розподілу переміщень при узгодженому варіюванні  $\tau_Q = \tau_N = \tau_F = \tau$ : а –  $\tau = 0,1$ ; б –  $\tau = 1$ ; в –  $\tau = 10$

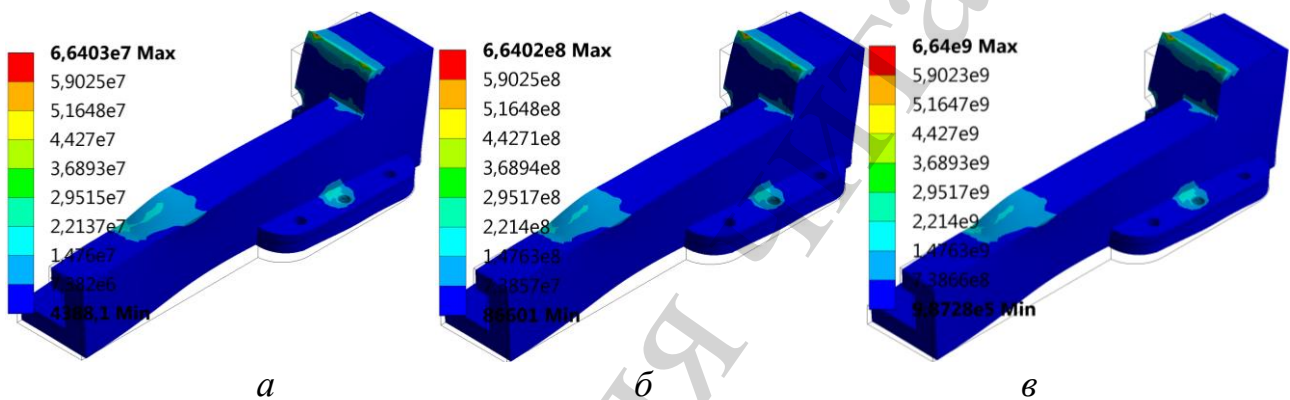
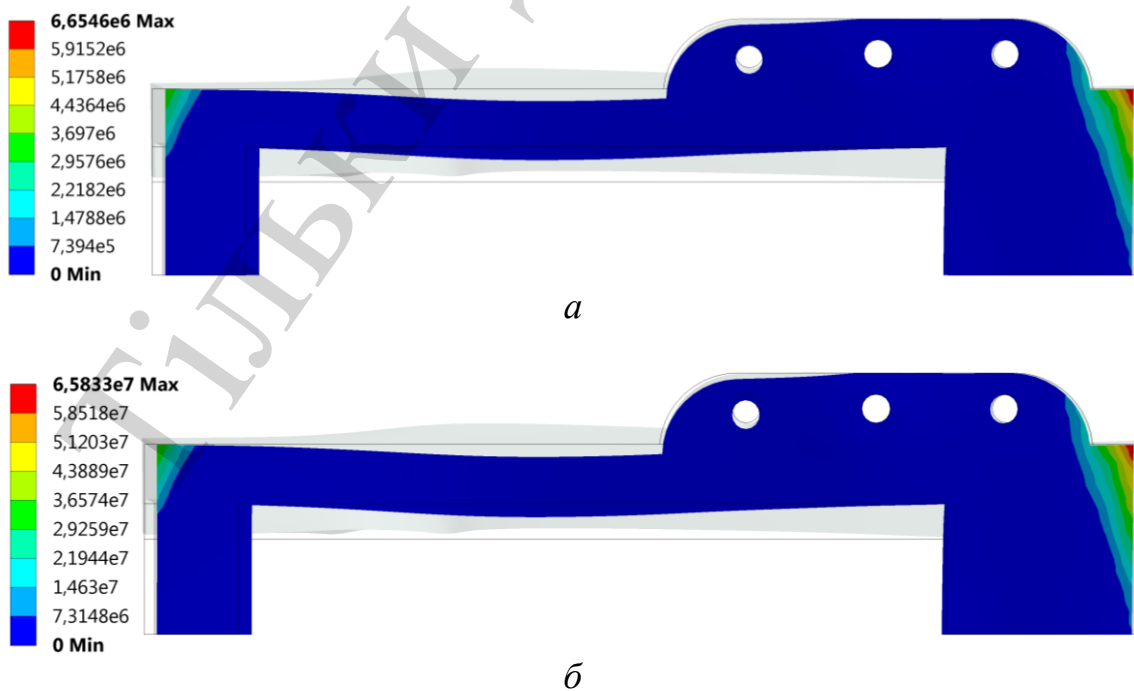
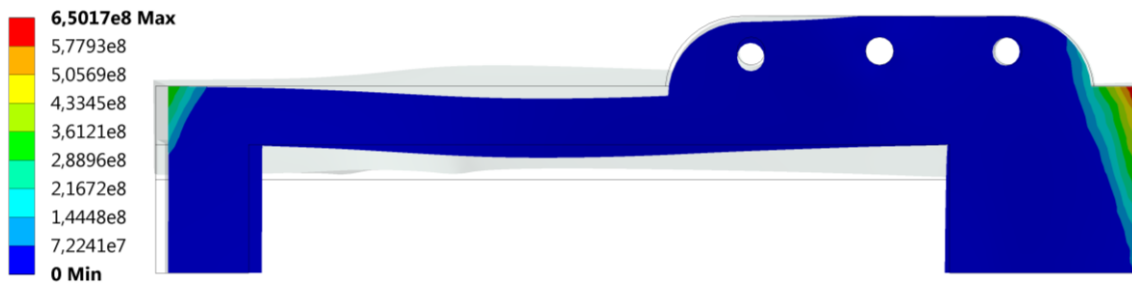


Рис. 13. Картини розподілу напружень при узгодженому варіюванні  $\tau_Q = \tau_N = \tau_F = \tau$ : а –  $\tau = 0,1$ ; б –  $\tau = 1$ ; в –  $\tau = 10$





6

Рис. 14. Картини розподілу контактного тиску при узгодженому варіюванні  $\tau_Q=\tau_N=\tau_F=\tau$ : а –  $\tau=0,1$ ; б –  $\tau=1$ ; в –  $\tau=10$

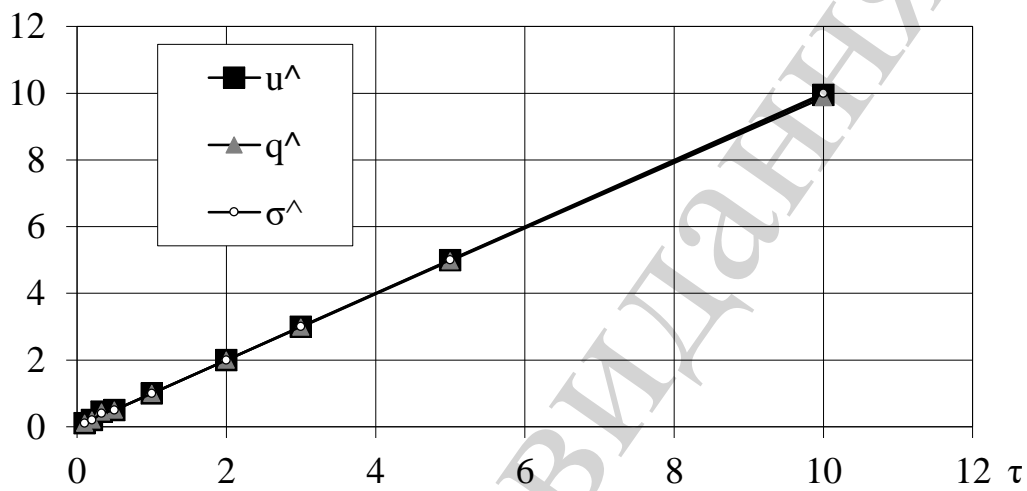


Рис. 15. Залежність зміни безрозмірних характеристик  $q^{\wedge}$ ,  $\sigma^{\wedge}$ ,  $u^{\wedge}$  від ступеня варіювання  $\tau_Q=\tau_N=\tau_F=\tau$

3. При узгодженому варіюванні  $\tau_Q=\tau_N=\tau_F=\tau$  спостерігається лінійна картина розподілу контактного тиску, напружень і переміщень при зміні  $\tau$  (рис. 12–14). Величини  $q^{\wedge}$ ,  $\sigma^{\wedge}$ ,  $u^{\wedge}$  прямо пропорційно залежать від  $\tau$  (рис. 15). Область контакту незмінна.

### 6. Обговорення результатів аналізу тенденцій зміни розподілів компонент НДС та контактного тиску у досліджених об'єктах

Для аналізу НДС системи пружних тіл, які контактують за узгодженими поверхнями, розроблено чисельну модель на основі методу скінченних елементів. Контактна задача зводиться до мінімізації квадратичної форми, яка апроксимує функціонал повної енергії досліджуваної системи на множині вузлових переміщень. У просторі цих вузлових переміщень контактні обмеження є гіперплощинами, які проходять через початок координат. Завдяки таким особливостям розв'язок задачі, як видно із рис. 2, є прямо пропорційним діючим силам. Тобто, якщо досягається безумовний мінімум квадратичної форми, то він збільшується прямо пропорційно діючим силам у силу лінійності системи рівнянь  $\partial I/\partial U_e=0$ ,  $\partial I/\partial U_g=0$ . Якщо ж виконується умова  $U_e=U_g$ , тобто випадок рівності у

співвідношенні (7), то залишається інше, проте лінійне рівняння  $\delta I / \delta U_g = 0$ . І у першому, і у другому випадку, розв'язок прямо пропорційний силам  $f$ .

Таким чином, базуючись на визначеній особливості чисельної моделі контактної взаємодії тіл із поверхнями, що співпадають, запропоновано напіваналітичний метод аналізу контактної взаємодії елементів конструкцій за узгодженими поверхнями. Він полягає у встановленні розв'язку подібних контактних задач при довільному рівні діючих сил на основі розв'язку при певному рівні цих сил шляхом прямо пропорційного масштабування.

Одержані результати розв'язання тестових задач підтверджують прогнозовані залежності розподілів контактного тиску, напружень та переміщень від діючих сил. Так, при неузгодженому варіюванні окремих компонент системи діючих сил спостерігаються різкі зміни картин розподілу НДС (рис. 11). Якщо ж діючі сили прямо пропорційні одному параметру, то характеристики НДС прямо пропорційні цьому параметру – рис. 7, 15.

Запропонований метод має переваги перед традиційними чисельними постановками, оскільки різко обмежує необхідну кількість розв'язань задач аналізу контактної взаємодії при багатоваріантних дослідженнях із варіюванням рівня діючих сил.

Визначені особливості розподілів контактного тиску і компонент НДС (рис. 4–6, 8–10, 12–14) мають велике значення при аналізі балансу переміщень у технологічних системах (типу «деталь-верстат-інструмент-пристосування», яка була досліджена у цій роботі). Для таких систем стає можливим лінеаризувати розв'язки задач про переміщення точок пристосувань за певних співвідношень між силами: закріплення на столі верстата, затискання деталей та різання. Постановка задачі здійснена у загальному вигляді (без прив'язки до кількості компонент множини діючих сил), а чисельні розв'язки розглянуті тільки для трикомпонентної системи сил. Це обмеження передбачається зняти у подальших дослідженнях. Крім того, передбачається визначити чутливість розв'язку задачі про контактну взаємодію при варіюванні геометричної форми поверхонь досліджуваних тіл.

## 7. Висновки

1. Запропоновано модель напружено-деформованого стану із урахуванням контактної взаємодії тіл за узгодженими поверхнями. Ця модель базується на варіаційному формулюванні. При цьому враховуються особливості, які полягають у нульовому зазорі між контактуючими тілами. Дискретизація задачі за методом скінченних елементів зводить задачу до проблеми мінімізації квадратичної форми на односторонніх обмеженнях у вигляді лінійних однорідних співвідношень.

2. Дискретизована модель контактної взаємодії тіл із узгодженими поверхнями дає можливість прогнозувати прямо пропорційну залежність компонент напружено-деформованого стану цих тіл від рівня діючих сил, якщо їх компоненти пропорційні одному параметру. Відповідно, на етапі проектних досліджень елементів конструкцій, коли потрібні багатоваріантні дослідження напружено-деформованого стану із урахуванням їх контактної взаємодії, можна зменшити обсяг розрахунків. Розраховується НДС цих тіл при певному наборі



сил. При варіюванні рівня сил відповідно змінюються результати розрахунків, незважаючи на нелінійність задач аналізу у загальному випадку.

3. На прикладі верстатних пристосувань лещатного типу підтверджені залежності компонент напружено-деформованого стану від рівня діючих сил, які прогнозовані на основі аналізу структури математичної та чисельної моделі напружено-деформованого стану. Області контакту залишаються незмінними при зміні рівня діючих сил. Величини контактного тиску та компоненти НДС зростають прямо пропорційно діючим силам.

### Литература

1. Johnson, K. L. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press. doi: <https://doi.org/10.1017/cbo9781139171731>
2. Rogovyi, A. (2018). Energy performances of the vortex chamber supercharger. *Energy*, 163, 52–60. doi: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.08.075>
3. Rogovyi, A., Khovanskyi, S. (2017). Application of the similarity theory for vortex chamber superchargers. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 233, 012011. doi: <https://doi.org/10.1088/1757-899x/233/1/012011>
4. Rogovyi, A., Khovanskyi, S., Grechka, I., Pitel, J. (2019). The Wall Erosion in a Vortex Chamber Supercharger Due to Pumping Abrasive Mediums. *Advances in Design, Simulation and Manufacturing II*, 682–691. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-22365-6\\_68](https://doi.org/10.1007/978-3-030-22365-6_68)
5. Gaydamaka, A., Kulik, G., Frantsuzov, V., Hrechka, I., Khovanskyi, S., Rogovyi, A. et. al. (2019). Devising an engineering procedure for calculating the ductility of a roller bearing under a no-central radial load. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3 (7 (99)), 6–10. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.168145>
6. Syomin, D., Rogovyi, A. (2012). Features of a Working Process and Characteristics of Irrotational Centrifugal Pumps. *Procedia Engineering*, 39, 231–237. doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.07.029>
7. Panchenko, A., Voloshina, A., Boltynskiy, O., Milaeva, I., Grechka, I., Khovanskyi, S. et. al. (2018). Designing the flow-through parts of distribution systems for the PRG series planetary hydraulic motors. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3 (1 (93)), 67–77. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.132504>
8. Panchenko, A., Voloshina, A., Kiurchev, S., Titova, O., Onoprychuk, D., Stefanov, V. et. al. (2018). Development of the universal model of mechatronic system with a hydraulic drive. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4 (7 (94)), 51–60. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139577>
9. Panchenko, A., Voloshina, A., Milaeva, I., Panchenko, I., Titova, O. (2018). The Influence of the form Error after Rotor Manufacturing on the Output Characteristics of an Orbital Hydraulic Motor. *International Journal of Engineering & Technology*, 7 (4.3), 1. doi: <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.3.19542>
10. Voloshina, A., Panchenko, A., Boltynskiy, O., Panchenko, I., Titova, O. (2018). Justification of the Kinematic Diagrams for the Distribution System of a

Planetary Hydraulic Motor. *International Journal of Engineering & Technology*, 7 (4.3), 6. doi: <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.3.19544>

11. Voloshina, A., Panchenko, A., Boltyansky, O., Titova, O. (2019). Improvement of Manufacture Workability for Distribution Systems of Planetary Hydraulic Machines. *Advances in Design, Simulation and Manufacturing II*, 732–741. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-22365-6\\_73](https://doi.org/10.1007/978-3-030-22365-6_73)

12. Martynyak, R. M., Slobodyan, B. S. (2009). Contact of elastic half spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid. *Materials Science*, 45 (1), 66–71. doi: <https://doi.org/10.1007/s11003-009-9156-9>

13. Slobodyan, B. S., Lyashenko, B. A., Malanchuk, N. I., Marchuk, V. E., Martynyak, R. M. (2016). Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip. *Journal of Mathematical Sciences*, 215 (1), 110–120. doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-016-2826-x>

14. Kravchuk, A. S., Neittaanmäki, P. J. (2007). *Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics*. Springer. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6377-0>

15. Vollebregt, E., Segal, G. (2014). Solving conformal wheel–rail rolling contact problems. *Vehicle System Dynamics*, 52 (sup1), 455–468. doi: <https://doi.org/10.1080/00423114.2014.906634>

16. Kalker, J. J. (1977). Variational Principles of Contact Elastostatics. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 20 (2), 199–219. doi: <https://doi.org/10.1093/imamat/20.2.199>

17. Papangelo, A., Hoffmann, N., Ciavarella, M. (2017). Load-separation curves for the contact of self-affine rough surfaces. *Scientific Reports*, 7 (1). doi: <https://doi.org/10.1038/s41598-017-07234-4>

18. Ciavarella, M. (2015). Adhesive rough contacts near complete contact. *International Journal of Mechanical Sciences*, 104, 104–111. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.10.005>

19. Ciavarella, M., Joe, J., Papangelo, A., Barber, J. R. (2019). The role of adhesion in contact mechanics. *Journal of The Royal Society Interface*, 16 (151), 20180738. doi: <https://doi.org/10.1098/rsif.2018.0738>

20. Li, Q., Popov, V. L. (2018). Adhesive force of flat indenters with brush-structure. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*, 16 (1), 1. doi: <https://doi.org/10.22190/fume1712200051>

21. Li, S., Yao, Q., Li, Q., Feng, X.-Q., Gao, H. (2018). Contact stiffness of regularly patterned multi-asperity interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 111, 277–289. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.10.019>

22. Popov, V. L., Pohrt, R., Li, Q. (2017). Strength of adhesive contacts: Influence of contact geometry and material gradients. *Friction*, 5 (3), 308–325. doi: <https://doi.org/10.1007/s40544-017-0177-3>

23. Ciavarella, M. (2017). A very simple estimate of adhesion of hard solids with rough surfaces based on a bearing area model. *Meccanica*, 53 (1-2), 241–250. doi: <https://doi.org/10.1007/s11012-017-0701-6>



24. Ciavarella, M. (2017). On Pastewka and Robbins' Criterion for Macroscopic Adhesion of Rough Surfaces. *Journal of Tribology*, 139 (3). doi: <https://doi.org/10.1115/1.4034530>
25. Argatov, I., Li, Q., Pohrt, R., Popov, V. L. (2016). Johnson–Kendall–Roberts adhesive contact for a toroidal indenter. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 472 (2191), 20160218. doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0218>
26. Ciavarella, M. (2018). An approximate JKR solution for a general contact, including rough contacts. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 114, 209–218. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.03.005>
27. Li, Q., Pohrt, R., Lyashenko, I. A., Popov, V. L. (2019). Boundary element method for nonadhesive and adhesive contacts of a coated elastic half-space. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 234 (1), 73–83. doi: <https://doi.org/10.1177/1350650119854250>
28. Li, Q., Popov, V. L. (2017). Boundary element method for normal non-adhesive and adhesive contacts of power-law graded elastic materials. *Computational Mechanics*, 61 (3), 319–329. doi: <https://doi.org/10.1007/s00466-017-1461-9>
29. Rey, V., Anciaux, G., Molinari, J.-F. (2017). Normal adhesive contact on rough surfaces: efficient algorithm for FFT-based BEM resolution. *Computational Mechanics*, 60 (1), 69–81. doi: <https://doi.org/10.1007/s00466-017-1392-5>
30. Atroshenko, O., Tkachuk, M. A., Martynenko, O., Tkachuk, M. M., Saverska, M., Hrechka, I., Khovanskyi, S. (2019). The study of multicomponent loading effect on thin-walled structures with bolted connections. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1 (7 (97)), 15–25. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.154378>
31. Atroshenko, O., Bondarenko, O., Ustinenko, O., Tkachuk, M., Diomina, N. (2016). A numerical analysis of non-linear contact tasks for the system of plates with a bolted connection and a clearance in the fixture. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1 (7 (79)), 24. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.60087>
32. Tkachuk, M. M., Skripchenko, N. B., Tkachuk, M. A. (2016). Solving of problems on contact interaction of rough bodies using model of nonlinear winkler layer. *Mekhanika ta mashynobuduvannia*, 1, 3–14.
33. Tkachuk, M. (2018). A numerical method for axisymmetric adhesive contact based on Kalker's variational principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3 (7 (93)), 34–41. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.132076>
34. Tkachuk, M. M., Skripchenko, N., Tkachuk, M. A., Grabovskiy, A. (2018). Numerical methods for contact analysis of complex-shaped bodies with account for non-linear interface layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5 (7 (95)), 22–31. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.143193>
35. Tkachuk, M., Bondarenko, M., Grabovskiy, A., Sheychenko, R., Graborov, R., Posohov, V. et. al. (2018). Thin-walled structures: analysis of the stressed-strained state and parameter validation. *Eastern-European Journal of Enter-*

prise Technologies, 1 (7 (91)), 18–29. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.120547>

36. Ткачук, Н. А., Кравченко, С. А., Пылев, В. А., Парсаданов, И. В., Грабовский, А. В., Веретельник, О. В. (2019). Дискретно-континуальное упрочнение контактирующих элементов конструкций: концепция, математическое и численное моделирование. Наука и техника, 18 (3), 240–247. doi: <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-3-240-347>

37. Bondarenko, M., Tkachuk, M., Grabovskiy, A., Hrechka, I. (2019). Substantiation of Thin-Walled Structures Parameters Using Nonlinear Models and Method of Response Surface Analysis. International Journal of Engineering Research in Africa, 44, 32–43. doi: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/jera.44.32>

38. Washizu, K. (1982). Variational Methods in Elasticity & Plasticity. Oxford-New York: Pergamon Press, 630.

39. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu, J. Z. (2013). The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Butterworth-Heinemann, 756. doi: <https://doi.org/10.1016/c2009-0-24909-9>

40. Карманов, В. Г. (2004). Математическое программирование. М.: ФИЗМАТЛИТ, 264.

41. Tkachuk, M. M., Grabovskiy, A., Tkachuk A., M., Hrechka, I., Ishchenko, O., Domina, N. (2019). Investigation of multiple contact interaction of elements of shearing dies. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 4 (7 (100)), 6–15. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.174086>

42. Ткачук, М. А., Грабовський, А. В., Ткачук, М. М., Зарубіна, А. О., Саверська, М. С., Мухін, Д. С., Куценко, С. В. (2019). Контактна взаємодія елементів прес-форм та проектно-технологічне забезпечення їх технічних характеристик. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», 1, 58–66. doi: <https://doi.org/10.20998/2079-0775.2019.1.07>

43. Сеа, Ж. (1973). Оптимизация. Теория и алгоритмы. Москва: Мир, 244.

44. Химмельблау, Д. М. (1975). Прикладное нелинейное программирование. Москва, 534.