УДК 514.18
DOI: 10.15587/1729-4061.2018.139595

Геометричне моделювання розкриття у невагомості стержневої конструкції у вигляді подвійного сферичного маятника

Л. М. Куценко, О. М. Семків, В. В. Асоцький, Л. Л. Запольський, О. В. Шоман, Н. П. Ісмаілова, В. Я. Даниленко, С. А. Виноградов, Е. М. Сівак

Досліджено геометричну модель нового способу розкриття в умовах невагомості стержневої конструкції, подібної подвійному сферичному маятнику. Переміщення елементів конструкції відбуваються завдяки дії імпульсів піротехнічних реактивних двигунів на кінцеві точки ланок. Опис руху одержаного інерційного розкриття стержневої конструкції виконано за допомогою рівняння Лагранжа другого роду, і, зважаючи на умови невагомості, побудованого з використанням лише кінетичної енергії системи.

На актуальність обраної теми вказує необхідність вибору та дослідження процесу активізації розкриття просторової стержневої конструкції. В якості рушіїв пропонується використати імпульсні піротехнічні реактивні двигуни, встановлені на кінцевих точках ланок конструкції. Легші і дешевші порівняно, наприклад, з електродвигунами або пружинними пристроями. А також економічно вигідніші, коли процес розкриття конструкції на орбіті планується виконати лише один раз.

Запропоновано спосіб визначення параметрів та початкових умов ініціювання коливань подвійної стержневої конструкції з метою одержання циклічної траєкторії кінцевої точки другої ланки. Це дозволяє при розрахунках процесу трансформування уникати хаотичних рухів елементів конструкції. Побудовано графіки зміни у часі функцій узагальнених координат, а також перших та других похідних цих функцій. Тому з'явилася можливість оцінити силові характеристики системи в момент гальмування (стопоріння) процесу розкриття.

Результати можуть використовуватися як геометричні моделі варіантів розкриття великогабаритних об'єктів в умовах невагомості, наприклад, силових каркасів космічних антен чи фермених конструкцій, а також інших орбітальних інфраструктур

Ключові слова: стержнева конструкція, процес розкриття у космосі, дволанкова сферична конструкція, рівняння Лагранжа другого роду

1. Вступ

Спорудження каркасів орбітальних космічних інфраструктур пов'язано з трансформуванням стержневих конструкцій з метою надання їм необхідного просторового розташування. Компоненти конструкцій доставляються на орбіту у згорнутому вигляді. Після чого необхідно використати певну технологію трансформування розташування стержнів з метою надання всій конструкції запланованої просторової форми. Такі перетворення здійснюються за допомогою механічної операції розкриття [1, 2]. При транспортуванні з Землі заготовки конструкцій виглядають, переважно, як прямолінійні стержні, скріплені між собою подібно елементам багатоланкового маятника. Розкриття подвійної стержневої конструкції доцільно розглядати як аналог «коливання» подвійного сферичного маятника у невагомості. Керування розкриттям великогабаритних конструкцій у просторі є складною науково-технічною задачею механіки, яка не має аналогів у наземній техніці. Порівняно просто це можливо реалізувати для подвійної (двохланкової) стержневої конструкції. Зазначимо, що термін «маятник» у випадку невагомості застосовувати не коректно. Тому далі частіше вживатимемо термін «подвійна сферична стержнева конструкція (або система)».

При реалізації розкриття подвійної сферичної стержневої конструкції у невагомості виникають дві ключові технологічні проблеми – вибору способів активізації її руху, а також механізму фіксації (стопоріння) процесу розкриття. Перша проблема пов'язана з вибором рушійних сил для ініціювання розкриття стержневих конструкцій. Не менш важливою є проблема фіксації кутів між ланками з використанням спеціальних пристроїв, вмонтованих у сферичні шарніри. При цьому необхідні дані про величину сил, які виникають у вузлах в момент фіксації. В якості засобів ініціювання розкриття конструкції пропонується використовувати імпульсні реактивні двигуни (типу піропатронів), встановлених на кінцевих точках ланок стержневої конструкції. А також розглядається спосіб визначення величин сил в вузлах конструкції в момент закінчення розкриття.

Динаміку процесу розкриття конструкції у вигляді подвійної сферичної стержневої системи доцільно досліджувати на основі варіаційного принципу Лагранжа. Виникає питання про адаптування до невагомості «коливання» подвійної сферичної стержневої системи як основи геометричної моделі розкриття орбітального об'єкта. Відповідь на це питання можна знайти у роботах, присвячених застосуванню рівнянь Лагранжа другого роду для механічних систем у невагомості [3–5]. Формально вважається, що розрахунки стосовно трансформування у часі механічних стержневих конструкцій у невагомості можна виконувати, користуючись лише поняттями кінетичних енергій. Тобто при складанні рівнянь Лагранжа другого роду потенціальну енергію консервативної механічної системи можна вважати «близькою до нуля». Після ініціювання коливань піротехнічними імпульсами, величина кінетичної енергії для малого проміжку часу має залишатися незмінною. При подальших дослідженнях такі умови можна зняти.

Зазначені припущення дозволяють розробити формальний (ідеалізований) підхід до геометричного моделювання розкриття стержневих конструкцій – аналогів подвійних сферичних маятників. До цього в процесі розрахунків ще необхідно запобігати хаотичним рухам стержневих конструкцій. Для уникнення хаотичності при формоутворенні конструкції необхідно параметри підібрати так, щоб кінцева точка другої ланки рухалась по циклічній траєкторії.

Цінність геометричного моделювання проявляється у створених комп'ютерних анімаційних фільмах, де унаочнюється взаємне переміщення ланок подвійних сферичних стержневих конструкцій в процесі розкриття. Використання розроблених моделей допоможе на етапі проектування розрахувати компоновку та параметри функціонування конструкції в цілому.

Отже, на актуальність обраної теми вказує необхідність дослідження і запровадження імпульсного пристрою як легкого і дешевого рушія процесу розкриття стержневої конструкції типу подвійного сферичного маятника. Це буде економічно оправдано, коли на орбіті процес розкриття конструкції планується здійснити лише один раз. В якості такого рушія пропонується використати імпульсні піротехнічні реактивні двигуни, встановлені на кінцевих точках ланок подвійної сферичної стержневої конструкції. Піротехнічні пристрої набагато легші і дешевші порівняно з відомими засобами ініціювання розкриття конструкції. Наприклад, порівняно з електродвигунами або пружинними пристроями з термопам'яттю. Все це вказує на доцільність дослідження геометричних моделей розкриття стержневих конструкцій в умовах невагомості з імпульсними реактивні вигунами на кінцевих точках ланок.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Для розрахунків на площині геометричної форми послідовних фаз розкриття «маятникоподібних» стержневих конструкцій доцільно використати дослідження динаміки багатоланкових маятників. На практиці це виглядає [6] як складання та розв'язання рівнянь Лагранжа другого роду руху механічної системи відносно узагальнених координат. А також дослідження динаміки багатоланкового маятника, виконаного, наприклад, методами дробного числення [7]. Але в цих (і аналогічних) роботах не достатньо уваги приділено графічному трактуванню одержаних розв'язків.

Для розкриття стержневих конструкцій використовують переважно каркасні тросові системи. У роботах [8–10] наведені математичні моделі процесу розкриття багатоланкової каркасної конструкції із тросовою системою синхронізації. Але застосування тросової системи розкриття на практиці обмежено розмірами конструкції та необхідністю синхронізувати дію електродвигунів, що є самостійною задачею при великій кількості ланок. Каркасну тросову систему можна вважати прототипом розглянутого у роботі способу розкриття багатоланкової стержневої конструкції.

Для чисельного аналізу процесу розкриття конструкцій, що трансформуються, використовують можливості сучасних пакетів моделювання динаміки механічних систем. Робота [11] присвячена методу розрахунку великогабаритних конструкцій, що розкриваються, з використанням програмних комплексів MSC.Software. В роботі [12] наведено приклад розрахунку розкриття за допомогою комплексу автоматизованого динамічного аналізу багатокомпонентних механічних систем EULER. Але зазначені програмні продукти не розраховані без відповідних надбудов на реалізацію «імпульсних» способів розкриття багатоланкових конструкцій. Інші варіанти систем розкриття наведені у огляді літератури [13], але там відсутня інформація про «імпульсні» способи розкриття багатоланкових стержневих конструкцій і перевага віддається тросовим системам, про недоліки який йшлося раніше.

Теоретичне значення для моделювання розкриття просторових подвійних стержневих конструкцій мають роботи, присвячені дослідженню коливань сферичних та подвійних сферичних маятників. У роботі [14] виконується моделювання руху сферичного маятника, закріпленого на обертовій платформі. У роботі [15] аналізується динаміка коливань сферичного маятника з тривимірною періодичною вібрацією точки підвісу. Питання динаміки сферичного маятника з вібруючою точкою підвісу розглянуто в роботі [16]. У роботі [17] чисельним інтегруванням рівняння руху досліджено динамічний режим повороту гнучкої ланки маятника з метою збільшення плавності приводного зусилля.

Багато робіт, спрямованих на дослідження просторових маятників, спираються на дослідження сферичного маятника і його варіантів. В роботі [18] вивчаються нові моделі маятників, які вважаються твердими тілами з трьома обертовими ступенями свободи. Іноді зручно для цього використовувати єдину модель циліндра твердого тіла [19]. В роботі [20] розглянуто 3D-маятник як тверде тіло, яке тримається на фіксованому шарнірі з трьома обертовими степенями свободи. Особливості просторових математичних маятників розглянуто у роботах [21, 22]. Але результати зазначених робіт є скоріше теоретичними, адже складно покласти в основу алгоритму моделювання коливань. Більш складні просторові маятникові конфігурації вивчаються як об'єкти нелінійного аналізу, а також для тестування або розробки методів керування й стабілізації різноманітними об’єктами. Наприклад, у роботі [23] розглядається загальна модель інвертованого множинного керування маятником з використанням одиночного крутного моменту. Аналогічне питання стосувалося і задачі про маятник з візком, що рухається [24]. В роботі [25] розглянуто інвертований подвійний твердотільний маятник, який контролюється чотирма зовнішніми моментами. Ще одна широка область застосування маятникових моделей стосується демпфування й стабілізації явищ, які можна інтерпретувати за допомогою математичної подвійної маятникової моделі [26]. В роботі [27] представлено результати чисельних розрахунків складної механічної системи, аналогічної подвійному сферичному маятнику. Цікаво, що результати тут пояснюються з використанням множинної графічної інтерпретації. У роботі [28] досліджується модельне відображення й візуалізація орбіт подвійного сферичного маятника. В роботі [29] параметри коливань подвійного сферичного маятника обчислюються на базі лагранжевої механіки. У роботі [30] подвійні маятникові конфігурації динамічної системи також моделюються лагранжевою механікою, використовуючи математичні пакети MapleTM і Matlab. На сайті [31] наведено коди мовою Matlab для моделювання коливань подвійного сферичного маятника. Але в зазначених роботах не надано графічне підтвердження результатів моделювання.

У роботах [32–35] започатковано геометричну модель розкриття на уявній площині у невагомості стержневої конструкції як багатоланкового маятника. Вважалося, що рушіями розкриття є імпульсні піротехнічні реактивні двигуни, встановлені на кінцевих точках ланок. Проведені тестові розрахунки показали можливості застосування багатоланкових стержневих конструкцій з спільною точкою кріплення. На сайті [36] наведено компютерні анімаційні зображення для ілюстрації основних положень даної роботи.

В результаті огляду літературних джерел [8–30] були виявлені питання, ще не досліджені іншими авторами, що дозволило сформулювати наступну проблему досліджень. Для реалізації ідеї розкриття сферичних двохланкових конструкцій у невагомості імпульсами реактивних двигунів ще не розв'язаними залишаються питання поєднання величин імпульсів з узагальненими координатами подвійних сферичних стержневих конструкцій. А також зі схемою ініціювання руху елементів конструкції шляхом впливу імпульсів двигунів на кінцеві точки ланок. Також не вирішеним є питання оцінки величини сили, яка виникає у вузлових елементах в момент фіксації (стопоріння) елементів двохланкової конструкції в наперед розрахованому розкритому стані.

3. Ціль та задачі дослідження

Метою роботи є демонстрація на конкретних прикладах геометричної моделі розкриття в умовах невагомості стержневої конструкції, аналогічної подвійному сферичному маятнику. Для ініціювання руху конструкції пропонується використати імпульсні піротехнічні реактивні двигуни, встановлені на кінцевих точках ланок конструкції.

Для досягнення поставленої мети вирішувалися наступні задачі:

– скласти та розв'язати систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду для опису в невагомості фаз руху елементів подвійних сферичних стержневих конструкцій;

– для моделювання дії імпульсних реактивних двигунів розробити схему ініціювання руху подвійних сферичних стержневих конструкцій шляхом впливу імпульсів двигунів на кінцеві точки ланок;

– за допомогою комп'ютерної анімації спрогнозувати у часі взаємне розташування у просторі ланок подвійних сферичних стержневих конструкцій та визначити на цій базі необхідний для експерименту момент фіксації (стопоріння) розкриття;

– для запобігання хаотичних рухів в процесі розкриття розробити спосіб визначення параметрів та початкових умов ініціювання коливань подвійної стержневої конструкції для одержання циклічної траєкторії кінцевої точки другої ланки;

– побудувати графіки зміни у часі функцій узагальнених координат, а також перших та других похідних цих функцій; на базі цього оцінити силові характеристики системи в момент фіксації (стопоріння) розкриття;

– навести тестові приклади розкриття подвійних сферичних стержневих конструкцій у невагомості.

4. Розробка геометричної моделі процесу розкриття у невагомості стержневої конструкції, аналогічної подвійному сферичному маятнику

4. 1. Пояснення принципу розкриття стержневої конструкції, подібної сферичному та подвійному сферичному маятникам

При реалізації будь-якої схеми розкриття стержневої конструкції у невагомості виникає проблема вибору рушійних сил як засобів активізації цього процесу. Тобто вибір технічних пристроїв або технологічних процесів для ініціювання розкриття стержневих конструкцій на орбіті. На практиці найбільш ймовірним є одноразове розкриття, коли стержнева конструкція набуває геометричної форми і фіксується відразу після доставки на орбіту. Тоді електродвигуни або інші технічні пристрої після розкриття і фіксування конструкції становитимуть зайвий вантаж. Альтернативу цьому можуть скласти піротехнічні імпульсні реактивні двигуни.

Для пояснення ідеї виникнення руху розглянемо невагомий нерозтяжний стержень довжини *r* з точкою кріплення *O,* до кінцевої точки *C* якого приєднано вантаж масою *m* (рис. 1). Нерухомість точки кріплення забезпечується завдяки її приєднанню до космічного апарату, маса якого на порядки більша маси вантажу маятника.

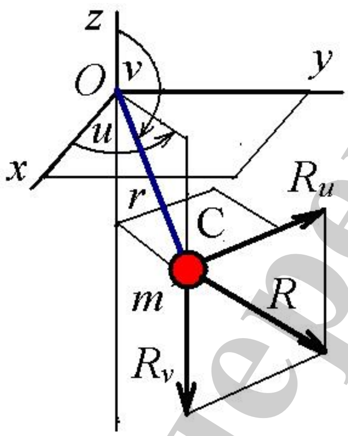


Рис. 1. Схема сферичного маятника

Ініціювання коливань у невагомості сферичного стержня (назва за аналогією зі сферичним маятником) здійснюється шляхом вибору напрямку дії та величини імпульсу, наданих кінцевій точці стержня за допомогою реактивного двигуна імпульсного типу. Узагальненими координатами вважатимемо кути $u(t)$ і $v(t)$, утворені горизонтальною проекцією стержня з віссю *Ox* і стержнем з віссю *Oz*. Позначимо віртуальний вектор $\mathbf{R}_V$ дії імпульсу за напрямком розкриття кута *v* і віртуальний вектор $\mathbf{R}_U$ дії імпульсу за напрямком розкриття кута *u*. Шуканий напрямок дії імпульсу реактивного двигуна визначатиме сумарний реальний вектор $\mathbf{R}=\mathbf{R}_U+\mathbf{R}_V$. Розташування реактивного двигуна пов'яжемо з точкою *C* і вважатимемо вантажем стержневої конструкції масою *m.*

Початкове положення стержня будемо визначати координатами вектора $\mathbf{U_0}=\{u(0), v(0)\}$. Виразом $\mathbf{\dot{U}_0}=\{\dot{u}(0), \dot{v}(0)\}$ позначимо величини швидкостей ініціювання коливань. Цей вираз означає, що вантажу масою *m* надано імпульс величиною $m\dot{u}(0)$ за напрямком розкриття кута *u*, та одночасно з цим імпульс величиною $m\dot{v}(0)$ за напрямком розкриття кута *v*. Тобто кутам розкриття $u(0)$ і $v(0)$ надано початкові швидкості $\dot{u}(0)$ і $\dot{v}(0)$, відповідно. З врахуванням цього маятникова система далі має розкриватися за інерцією, що пояснює термін «інерційна система розкриття». У якості піротехнічного імпульсного реактивного двигуна можна використати довільний пристрій, здатний забезпечити наперед розраховану величину імпульсу (наприклад, піропатрон). Отже, можливість використання розрахункових величин імпульсів реактивних двигунів базується на зв'язку з числовими значеннями миттєвих швидкостей $u'(0)$ і $v'(0)$.

Розрахунки коливання сферичної стержневої конструкції виконаємо за допомогою лагранжіана [18], опис якого співпадає з виразом для кінетичної енергії

$$L = 0{,}5rm\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right), \tag{1}$$

де

$$x(t) = r\cos\left(u(t)\right)\sin\left(v(t)\right);$$

$$y(t) = r\sin\left(u(t)\right)\sin\left(v(t)\right);$$

$$z(t) = r\cos\left(v(t)\right). \tag{2}$$

З врахуванням (2) вираз для лагранжіана набуде вигляду

$$L = 0{,}5mr^2\left(u'^2 - u'^2\cos^2 v + v'^2\right). \tag{3}$$

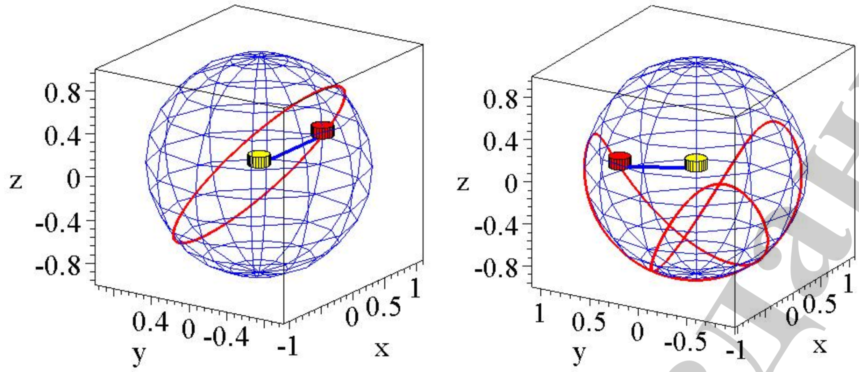
Тут $u\,' = \dfrac{d}{dt}u\left(t\right)$; $v\,' = \dfrac{d}{dt}v\left(t\right)$ – похідні функції опису узагальнених координат. З використанням виразу (3) одержуємо систему двох рівнянь Лагранжа другого роду:

$$u'' - u''\cos^2 v + u'v'\sin 2v = 0;$$

$$v'' - u'^2\cos v\sin v = 0. \tag{4}$$

При розв'язанні системи рівнянь (4) крім довжини стержня r і маси вантажу m слід враховувати значення початкових кутів відхилень $\mathbf{U_0}$={{$u(0)$, $v(0)$}, а також значень швидкостей, наданих кутам відхилень: $\mathbf{U_0}'$={$u'(0)$, $v'(0)$}. З виконанням початкових умов систему рівнянь (4) розв'язано наближено методом Рунге-Кутти в середовищі математичного пакету maple. Одержані розв'язки умовно позначено символами $U(t)$, $V(t)$. Це дозволяє у просторовій системі координат $Oxyz$ за допомогою формул (2) визначити координати кінцевої точки (x_C, y_C, z_C) ланки в момент часу t. Для обчислення цих координат у виразах функцій (2) опису координат необхідно формально замінити малі літери u і v на великі U і V. Наближений вигляд траєкторії переміщення кінцевої точки C одержимо, сполучивши близькі точки відрізками.

Наведемо приклади зображення результатів руху сферичного стержня у невагомості (рис. 2, a). Для порівняння траєкторій переміщення кінцевої точки стержня зобразимо результати коливання також і у полі земного тяжіння (рис. 2, *б*) з тими ж початковими умовами. Параметри руху такі: r=1; m=1; $\mathbf{U_0}$={0, □/2}, $\mathbf{U_0}$□={1.56, 2}. Час інтегрування T=5.



а *б*

Рис. 2. Траєкторія руху точки C: *а* – в невагомості; *б* – в полі земного тяжіння

Далі розглянемо рух у невагомості подвійної сферичної стержневої конструкції. Вважається, що подвійна стержнева конструкція приєднується до сферичного шарніру, закріпленого на космічному апараті. Маса апарату на порядки більша сумарної маси елементів конструкції, тому вузол кріплення вважається нерухомим. Також вважатимемо, що стержні виготовлено з легкого та міцного вуглепластика, тому вся маса стержневої конструкції буде зосереджена у вантажах вузлових точок. Початок першої ланки закріплено до нерухомої точки O, а початок другої ланки приєднано до кінцевої точки першої ланки з координатами (x_1, y_1, z_1) (рис. 3). Узагальненими координатами вважатимемо кути $u_1(t)$ і $v_1(t)$, а також $u_2(t)$ і $v_2(t)$, утворені відповідними горизонтальними проекціями стержнів з віссю Ox, а також відповідними стержнями з віссю Oz (рис. 3).

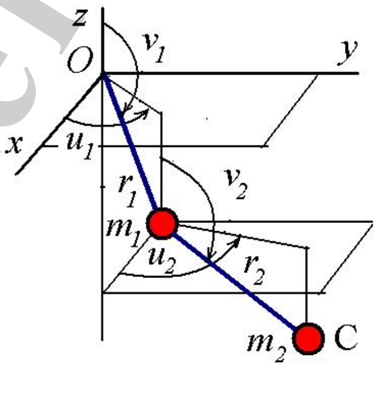


Рис. 3. Схема подвійної сферичної стержневої конструкції

Ініціювання коливань подвійної сферичної стержневої конструкції у невагомості здійснюється аналогічно сферичному стержню попереднього прикладу. А саме – шляхом вибору напрямку дії та величини імпульсів, наданих прикінцевим точкам ланок маятника за допомогою реактивних двигунів імпульсного типу. Віртуальний вектор $\mathbf{R}_{V1}$ одержуємо внаслідок дії імпульсу за напрямком розкриття кута v_1, а віртуальний вектор $\mathbf{R}_{U1}$ одержуємо внаслідок дії імпульсу за напрямком розкриття кута u_1. Сумарний реальний вектор $\mathbf{R}_1=\mathbf{R}_{U1}+\mathbf{R}_{V1}$ визначає необхідний напрямок дії імпульсу першого реактивного двигуна. Аналогічно, віртуальний вектор $\mathbf{R}_{V2}$ одержуємо внаслідок дії імпульсу за напрямком розкриття кута v_2, а віртуальний вектор $\mathbf{R}_{U2}$ одержуємо внаслідок дії імпульсу за напрямком розкриття кута u_2. Сумарний реальний вектор $\mathbf{R}_2=\mathbf{R}_{U2}+\mathbf{R}_{V2}$ визначає необхідний напрямок дії імпульсу другого реактивного двигуна.

Початкове положення подвійної стержневої конструкції будемо визначати координатами вектора $\mathbf{U_0}=\{u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)\}$. Виразом $\mathbf{U_0}$□$=\{u_1$□$(0), v_1$□$(0), u_2$□$(0), v_2$□$(0)\}$ позначимо величини швидкостей ініціювання коливань. Цей вираз означає, що вантажу масою m_1 надано імпульс величиною m_1u_1□(0) за напрямком розкриття кута u_1, та одночасно з цим імпульс величиною m_1v_1□(0) за напрямком розкриття кута v_1. Теж саме стосується і другої пари кутів та маси m_2. Звідси слідує, що кутам розкриття $u_1(0)$ і $v_1(0)$ надано початкові швидкості u_1□(0) і v□$_1(0)$, а кутам розкриття $u_2(0)$ і $v_2(0)$ – швидкості u_2□(0) і v□$_2(0)$, відповідно. Отже, можливість використання розрахункових величин імпульсів реактивних двигунів також базується на зв’язку з числовими значеннями миттєвих швидкостей u□(0) і v□(0).

Вимоги до організацій дії піротехнічних рушіїв стержневої конструкції висуває конкретні умови до конструкції сферичного шарніру, розташованого між ланками конструкції. А саме, сферичний шарнір у вузлі повинен забезпечувати розкриття його ланок за умови існування двох осей обертання, яка проходить через центральну точку шарніру. Цього можна досягти завдяки належній конструкції сферичного шарніру вузла маятника, описаній, наприклад, в роботах [37, 38].

До важливих моментів організації руху стержневої конструкції належить можливість запобігти хаотичних рухам стержневих конструкцій. Зазначене досягається за допомогою належного вибору величин піротехнічних рушіїв для забезпечення рухів елементів, зрозумілих для розрахунків. Це можна досягти організацію циклічних нехаотичних траєкторій кінцевої точки другої ланки.

4. 2. Визначення нехаотичної циклічної траєкторії переміщення кінцевої точки другої ланки стержневої сферичної конструкції

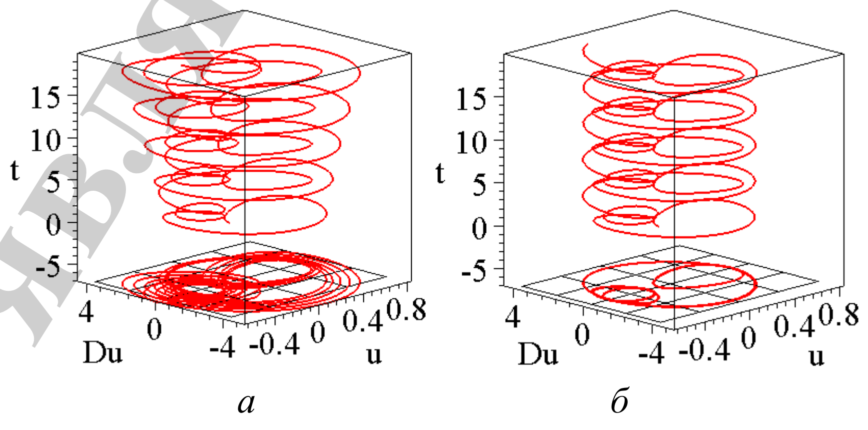
Для розуміння характеру коливань двохланкових сферичних стержневих конструкцій необхідно мати прогнозовану траєкторію переміщення кінцевої вузлової точки другої ланки маятника. Прийнятною кривою при цьому буде нехаотична циклічна траєкторія. Циклічною назвемо траєкторію переміщення кінцевої точки $C(x_C, y_C, z_C)$ двохланкової конструкції, геометрична форма якої періодично повторюється (можливо і наближено). Циклічність траєкторії забезпечується належним вибором параметрів двохланкової сферичної конструкції та початкових умов її руху.

Умовою $\mathbf{U_0}=\{u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)\}$ забезпечуються «стартова» геометрична форма конструкції. У нашому випадку вона повинна мати «складений» вигляд, зручний для доставки на орбіту. Наприклад, в подальших прикладах буде застосована така умова $\mathbf{U_0}=\{0, \pi/2, -\pi, \pi/2\}$. Для коригування форми траєкторії залишається умова $\mathbf{U_0}'=\{u_1'(0), v_1'(0), u_2'(0), v_2'(0)\}$, що визначає величини швидкостей ініціювання коливань. З цими швидкостями слід погоджувати величини піротехнічних зарядів.

Таким чином, виникає питання: як для значень початкових кутів відхилень $\mathbf{U_0}=\{u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)\}$, довжин ланок: $\mathbf{L}=\{r_1, r_2,\}$ та значень мас вантажів $\mathbf{m}=\{m_1, m_2\}$ знайти такі значення швидкостей відхилень $\mathbf{U_0}'=\{u_1'(0), v_1'(0), u_2'(0), v_2'(0)\}$, щоб траєкторія кінцевої точки другої ланки мала б циклічний характер.

У роботі [39] наведено спосіб визначення набору параметрів коливань маятників (в полі земного тяжіння, що не позбавляє узагальнення), які б забезпечили циклічну траєкторію переміщення другого вантажу, наприклад, подвійного маятника. Наведемо інтерпретацію способу на рівні графічних пояснень. Головна ідея полягає у наступному. Нехай маємо консервативну коливальну систему, до опису якої серед інших входить і узагальнена координата – позначимо її як функцію $u(t)$. Чисельно розв’яжемо диференціальні рівняння Лагранжа другого роду та побудуємо наближене зображення інтегральної кривої у фазовому просторі $\{u, Du, t\}$ узагальненої змінної $u(t)$. Зображення складатиметься із множини відрізків, що з’єднують послідовні точки, одержані в результаті наближеного розв’язання рівняння. Це унаочнення залежатиме від певного значення «керуючого» параметра задачі або значення початкової умови (позначимо його як p). При випадкових значеннях p у фазовому просторі $\{u, Du, t\}$ утвориться «плутана» інтегральна крива, проекція якої на фазову площину $\{u, Du\}$ також буде «плутаною» фазовою траєкторією (рис. 4, а). Вибір випадкового значеннях p при розрахунках призведе до хаотичних коливань вантажу маятника.

У разі зміни значень «керуючого» параметра p має змінюватися і характер фазової траєкторії. При критичному значенні $p=p_0$ характер фазової траєкторії зміниться на якісному рівні – вона перетвориться у «сфокусовану» криву (рис. 4, б). На фазовій площині $\{u, Du\}$ ніби відбудеться оптичний ефект «наведення на різкість» плутанини фазових траєкторій (в роботі [39] цей феномен названо проекційним фокусуванням).



а *б*

Рис. 4. Інтегральні криві і фазові траєкторії для: *а* – випадкового значення p; *б* – обчисленого значення $p=p_0$

Урахування значення параметра $p=p_0$ у процесі розв'язання рівняння Лагранжа другого роду дозволяє обчислити координати точок, які мають розташуватися на нехаотичній траєкторії сліду маятника. Отже, нехаотичні технологічні траєкторії коливання елементу маятникової механічної системи проявляються на зображеннях фазових траєкторій у вигляді «сфокусованих» кривих. Інакше це можна сформулювати так: критичне значення параметра p одержимо в момент, коли зображення проекції інтегральної кривої на фазову площину (тобто фазової траєкторії) набуде мінімальної площі (у піксельному вимірі).

На практиці наведений підхід було реалізовано з застосуванням бібліотеки обробки графічної інформації ImageTools пакету maple. Наведемо відповідний текст фрагменту програми.

Нехай маємо S масивів точок за умови, що s-тий з них визначає сім'ю кривих, **x[i] := solu(w); y[i] := dsolu(w),** коли параметри s і w змінюється з одиничним кроком від нуля до S і W, відповідно. Для формування зображення та його аналізу використаємо maple програму, фрагменти якої наведено на рис. 5, *а–в*.

```
for s from 0 to S do:
Gr[s] := pointplot({seq([x[i],
y[i]], i = 0..W)}, axes = NONE,
color = black, symbol = point);
end do:
```

а

```
for i from 0 to S do
plotsetup(bmp, plotoutput =
cat(`C://TEMP//`,i,`.`,bmp));
display(Gr[i]);
plotsetup(default)
end do;
```

б

```
for i from 0 to S do
img[i] := Read(cat(cat(cat
("C://TEMP/"), i), ".bmp"))
end do:
for s from 0 to S do;
R := 1:G := 1:B := 1:kk := 0:
for i to N do for j to M do
if`and`(`and`(img[s][i,j,1] =
R, img[s][i, j, 2] = G),
img[s][i, j, 3] = B)
then kk := kk+1 end if
end do end do;
K[s] := N*M - kk;
end do:
min([seq(K[s],s=0..S)]).
```

в

Рис. 5. Блоки програми для формування зображення та його аналізу: *а* – формування точкового зображення кривої; *б* – перетворення точкового зображення кривої в графічний файл; *в* – визначення значення s, яке відповідає мінімальній кількості пікселів зображення

В результаті виконання програми буде визначено значення параметра *s*, що відповідатиме мінімальній кількості пікселів в прямокутнику з пікселів розміром *N* на *M*. З використанням знайденого параметра *s* можливо обчислити значення керуючого параметра та зобразити циклічну нехаотичну траєкторію другого вантажу маятника. Значення всіх параметрів в умовних величинах.

4. 3. Геометричне моделюванні коливань у невагомості подвійного сферичного маятника

Розрахунки коливання подвійної сферичної стержневої конструкції виконаємо за допомогою лагранжіана [28], опис якого співпадає з виразом для кінетичної енергії

$$\begin{aligned} L = 0{,}5 r_1 m_1 \left(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 \right) + \\ +0{,}5 r_2 m_2 \left(x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2 \right), \end{aligned} \tag{5}$$

де

$$x_1(t) = r_1 \cos\left(u_1(t)\right) \sin\left(v_1(t)\right);$$

$$y_1(t) = r_1 \sin\left(u_1(t)\right) \sin\left(v_1(t)\right);$$

$$z_1(t) = r_1 \cos\left(v_1(t)\right);$$

$$x_C(t) = r_1 \cos\left(u_1(t)\right) \sin\left(v_1(t)\right) + r_2 \cos\left(u_2(t)\right) \sin\left(v_2(t)\right);$$

$$y_C(t) = r_1 \sin\left(u_1(t)\right) \sin\left(v_1(t)\right) + r_2 \sin\left(u_2(t)\right) \sin\left(v_2(t)\right);$$

$$z_C(t) = r_1 \cos\left(v_1(t)\right) + r_2 \cos\left(v_2(t)\right). \tag{6}$$

З використанням лагранжіану (5) та формул (6) складаємо систему чотирьох рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u_1'}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_1} = 0; \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_1'}\right) - \frac{\partial L}{\partial v_1} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u_2'}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_2} = 0; \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_2'}\right) - \frac{\partial L}{\partial v_2} = 0. \tag{7}$$

Тут $u_1' = \frac{d}{dt}u_1(t)$; $v_1' = \frac{d}{dt}v_1(t)$; $u_2' = \frac{d}{dt}u_2(t)$; $v_2' = \frac{d}{dt}v_2(t)$ – похідні функції опису узагальнених координат. З причини громіздкості рівняння (7) в розгорнутому вигляді не наводяться. Було використано математичний пакет maple, спроможний оперувати з інформацією у вигляді аналітичних виразів. Наприклад, оперувати з одержаним «комп'ютерним» наближеним розв'язком диференціального рівняння як зі звичайною функцією.

При розв'язанні системи рівнянь Лагранжа другого роду слід враховувати координати таких векторів: довжин ланок: **L**={r_1, r_2,}; значень мас вантажів: **m**={m_1, m_2}; значень початкових кутів відхилень: $\mathbf{U_0}$={$u_1(0)$, $v_1(0)$, $u_2(0)$, $v_2(0)$}, а також значень швидкостей, наданих кутам відхилень: $\mathbf{U_0'}$={$u_1'(0)$, $v_1'(0)$, $u_2'(0)$, $v_2'(0)$}.

З виконанням початкових умов систему рівнянь Лагранжа другого роду (7) розв'язано наближено методом Рунге-Кутти в середовищі математичного пакету maple. Одержані розв'язки умовно позначено символами $U_1(t)$, $V_1(t)$, $U_2(t)$, $V_2(t)$. Це дозволяє у просторовій системі координат $Oxyz$ за допомогою формул (6) визначити «реальні» координати кінцевої вузлової точки (x_C, y_C, z_C) другої ланки маятника в момент часу t. Для обчислення цих координат у виразах функцій (6) опису координат вузлових елементів маятників необхідно формально замінити малі літери u і v на великі U і V [34]. Наближений вигляд траєкторії переміщення прикінцевої точки C одержимо, сполучивши близькі точки відрізками.

Далі наведено приклади геометричного моделювання розкриття двохланкових сферичних стержневих механізмів. Значення всіх параметрів наведено в умовних величинах. Враховуючи те, що двохланкова конструкція доставлятиметься на орбіту у складеному вигляді, то у всіх прикладах одна з початкових умов матиме вигляд $\mathbf{U_0}$={0, π/2, –π, π/2}. Також вважатимемо, що m_1=1 і m_2=1. Силові характеристики обчислюються як добуток маси на значення другої похідної (прискорення). У наведених прикладах було розраховано системи з шести подвійних сферичних стержневих конструкцій у межах площини зі спільною нерухомою точкою [32]. Кути між початковими розташуваннями стержневих конструкцій складають π/3 (рис. 6).

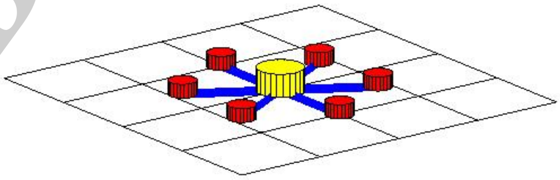


Рис. 6. Початкове положення шести двохланкових конструкцій у межах площини

Для кожного з прикладів було обчислено і побудовано:

– значення швидкостей, наданих кутам відхилень, які забезпечують циклічну нехаотичну траєкторію кінцевої точки другої стержневої конструкції та її зображення;

– деякі фази розташування ланок двохланкових стержневих механізмів в процесі розкриття;

– фазові траєкторії функцій узагальнених координат, які відповідають циклічній нехаотичній траєкторії кінцевої точки другої ланки;

– графіки зміни у часі величин кутів як функцій узагальнених координат, а також перших (швидкості) та других (прискорення) похідних цих функцій;

– з графіків прискорення визначено графіки силових характеристик, які виникають у момент стопоріння розкриття конструкції:

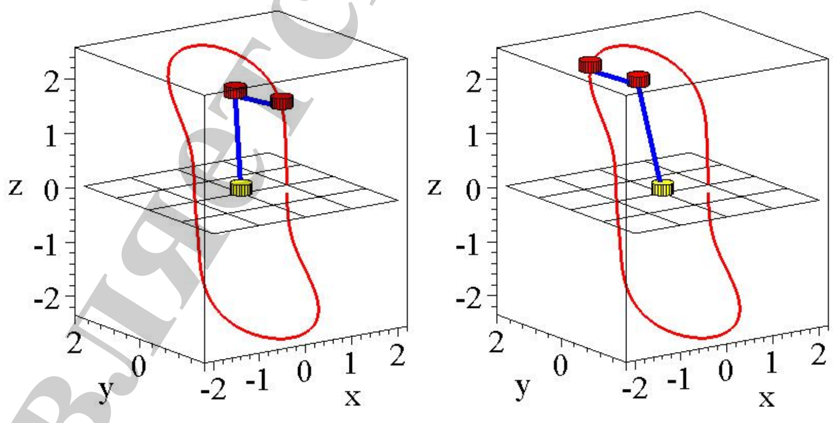
$$Fu_1=m_1 d^2 u_1(t)dt^2;\ Fv_1=m_1 d^2 v_1(t)dt^2;$$

$$Fu_2=m_2 d^2 u_2(t)dt^2;\ Fv_2=m_2 d^2 v_2(t)dt^2;$$

– варіанти розкриття шести двохланкових стержневих механізмів зі спільною нерухомою точкою.

На сайті [36] наведено анімаційні зображенн процесів розкриття подвійних сферичних стержневих конструкцій.

Приклад 1. $r_1=2$; $r_2=1$; $\mathbf{U_0}$□={1, –1.024, 1.9, 0.5}. Час інтегрування T = 6,6. На рис. 7 наведено циклічну траєкторію руху кінцевої точки C та положення подвійної конструкції в деякі моменту часу. На рис. 8 зображено фазові траєкторії функцій узагальнений координат, які відповідають циклічній нехаотичній траєкторії кінцевої точки другої ланки.



а *б*

Рис. 7. Циклічна траєкторія руху точки C для прикладу 1: *а* – t=0.858; *б* – t=1.98

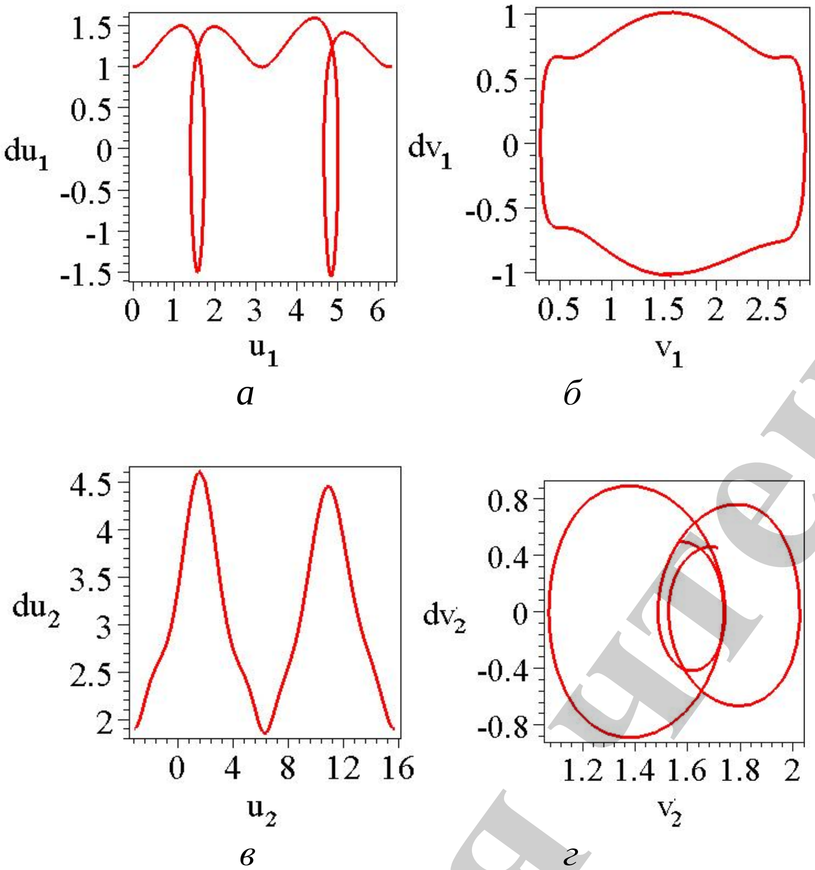


Рис. 8. Фазові траєкторії узагальнених координат для прикладу 1:
а – $u_1(t)$; *б* – $v_1(t)$; *в* – $u_2(t)$; *г* – $v_2(t)$

На рис. 9–12 зображені графіки зміни у часі величин кутів як функцій узагальнених координат, перших похідних цих функцій, а також графіки силових характеристик, які виникають у момент стопоріння розкриття конструкції.

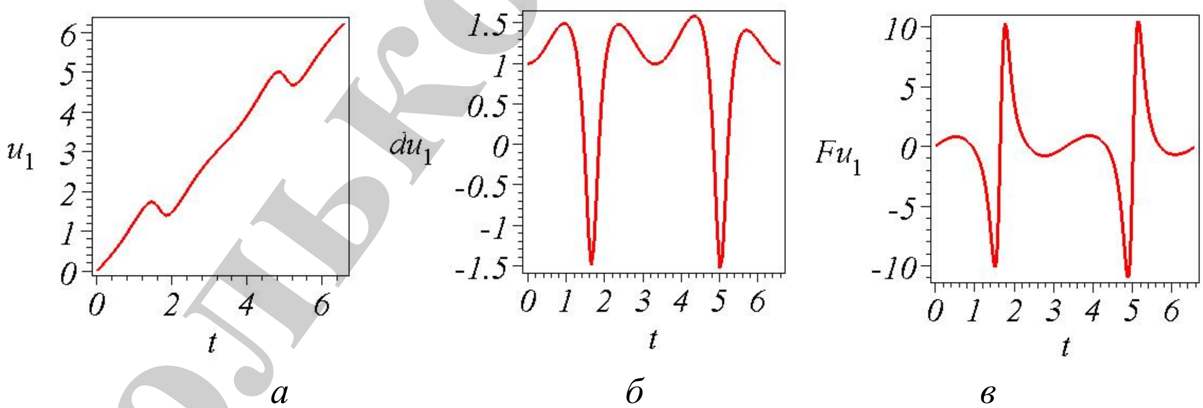


Рис. 9. Графіки узагальненої координати $u_1(t)$ першої ланки:
а – $u_1(t)$; *б* – $du_1(t)/dt$; *в* – Fu_1

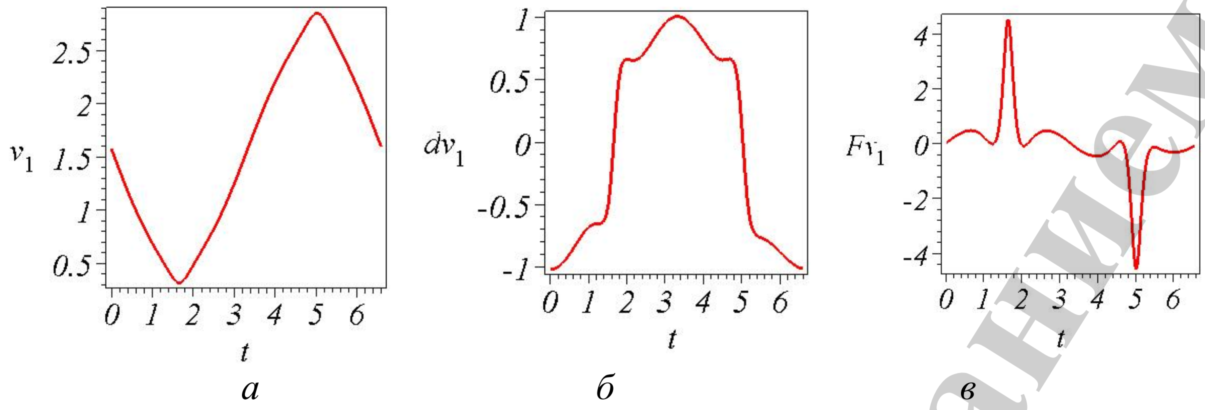


Рис. 10. Графіки узагальненої координати $v_1(t)$ першої ланки:
а – $v_1(t)$; *б* – $dv_1(t)/dt$; *в* – Fv_1

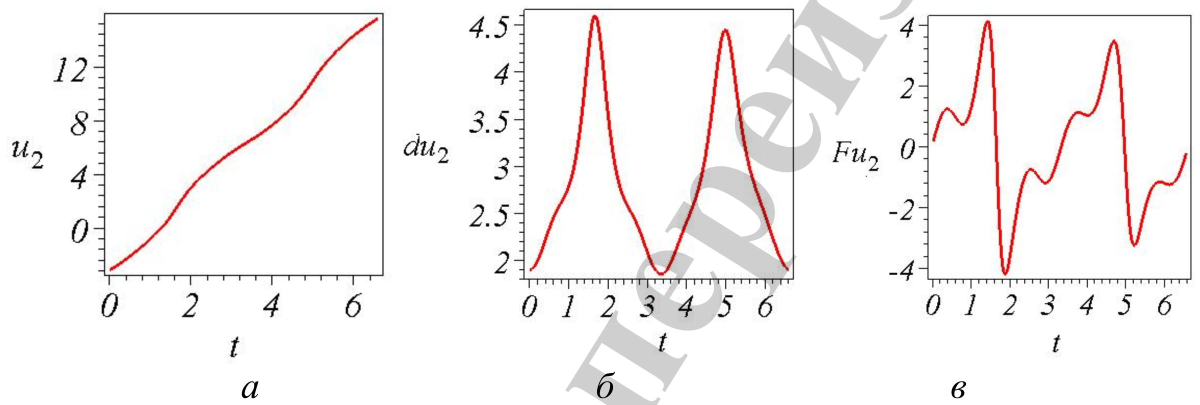


Рис. 11. Графіки узагальненої координати $u_2(t)$ другої ланки:
а – $u_2(t)$; *б* – $du_2(t)/dt$; *в* – Fu_2

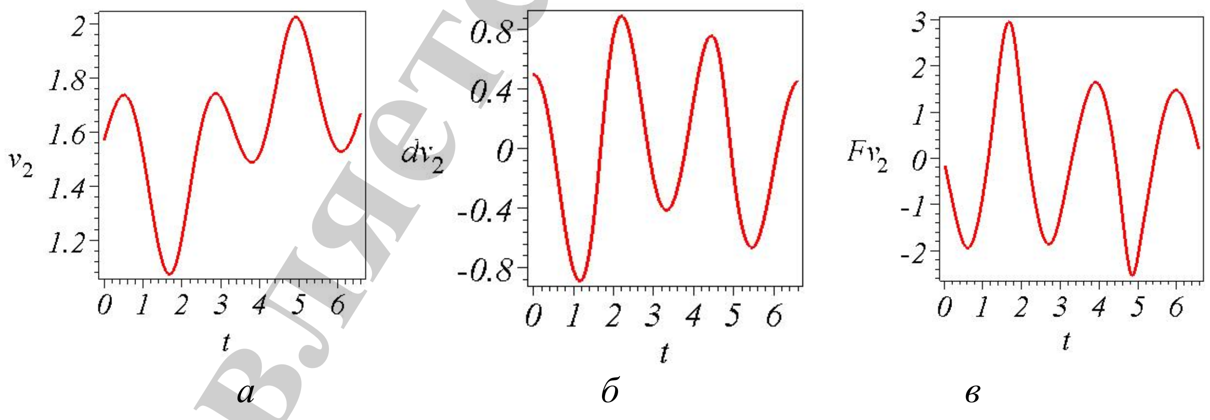
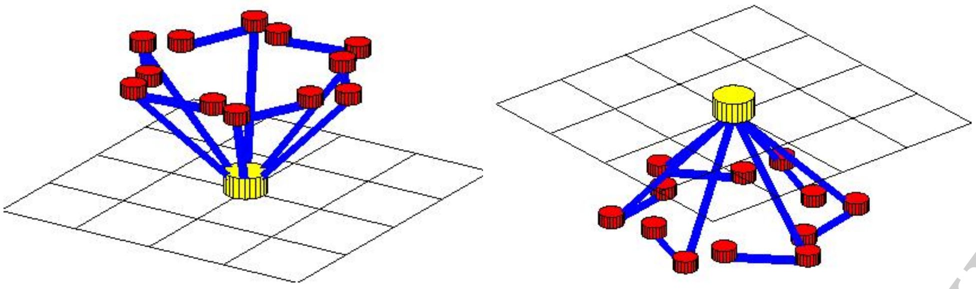


Рис. 12. Графіки узагальненої координати $v_2(t)$ другої ланки:
а – $v_2(t)$; *б* – $dv_2(t)/dt$; *в* – Fv_2

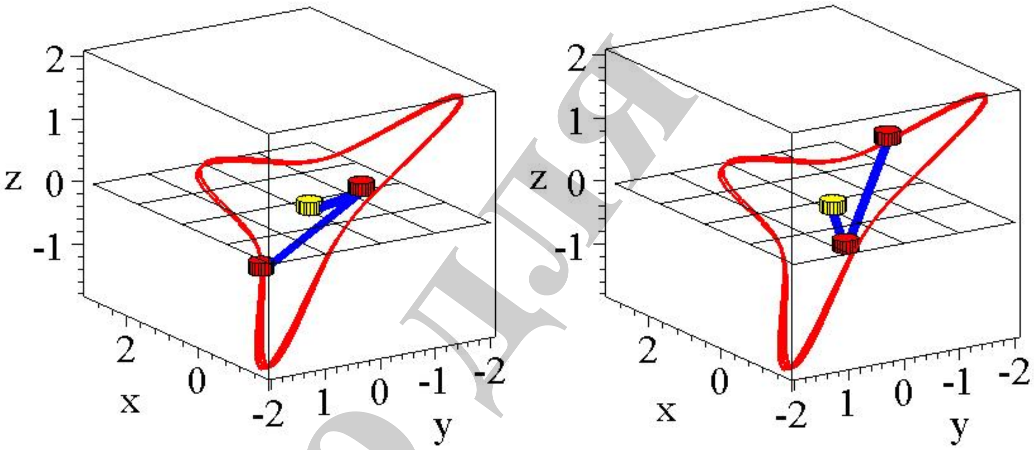
На рис. 13 наведено варіанти залежно від часу розкриття шести двохланкових стержневих механізмів зі спільною нерухомою точкою для прикладу 1.



а *б*

Рис. 13. Деякі просторові конструкції залежно від часу розкриття:
а – t=2,4; *б* – t=4,1

Приклад 2. r_1=1; r_2 =2; U_0={3, 3, –0.5, 0.5}. Час інтегрування T=2.95. На рис. 14 наведено циклічну траєкторію руху кінцевої точки C, а також положення подвійної конструкції в деякі моменту часу, а на рис. 15 зображено фазові траєкторії функцій узагальнений координат.



а *б*

Рис. 14. Циклічна траєкторія руху точки C для прикладу 2: *а* – t=0.9; *б* – t=2.44

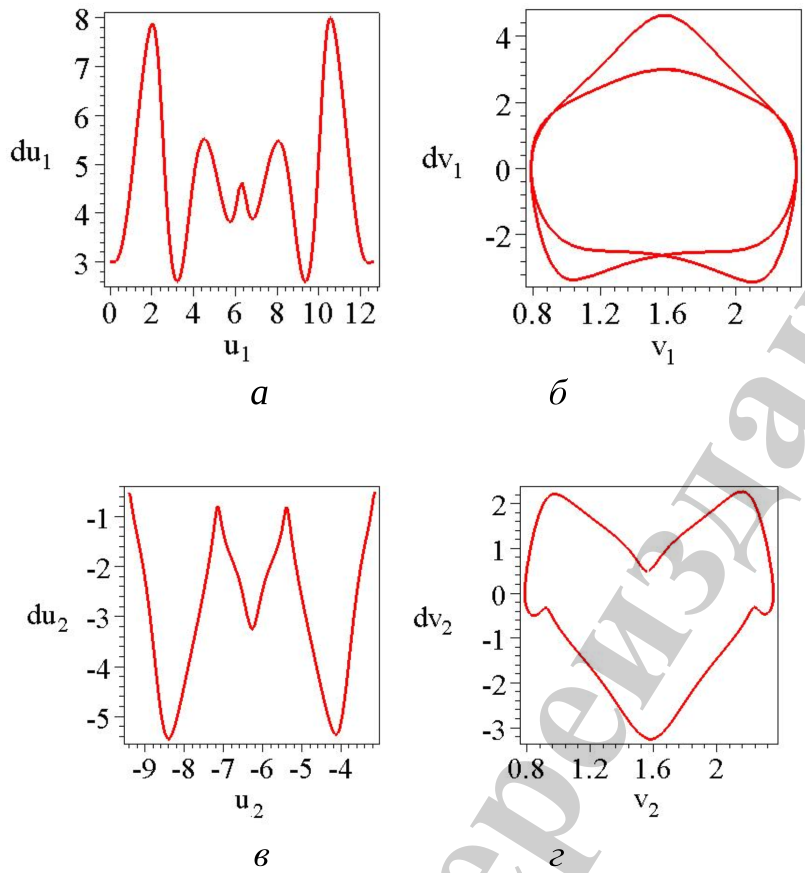


Рис. 15. Фазові траєкторії узагальнених координат для прикладу 2:
а – $u_1(t)$; *б* – $v_1(t)$; *в* – $u_2(t)$; *г* – $v_2(t)$

На рис. 16–19 зображені графіки зміни у часі величин кутів як функцій узагальнених координат, перших похідних цих функцій, а також графіки силових характеристик, які виникають у момент стопоріння розкриття конструкції.

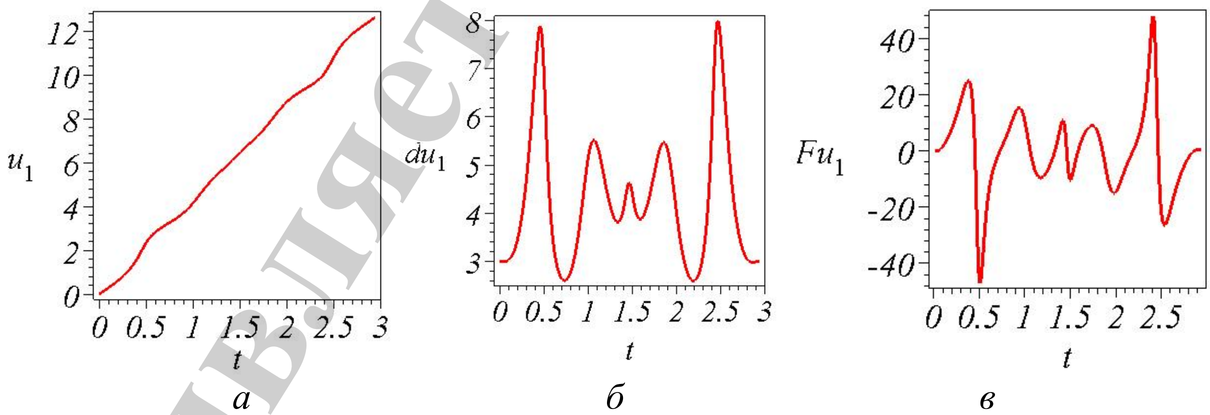
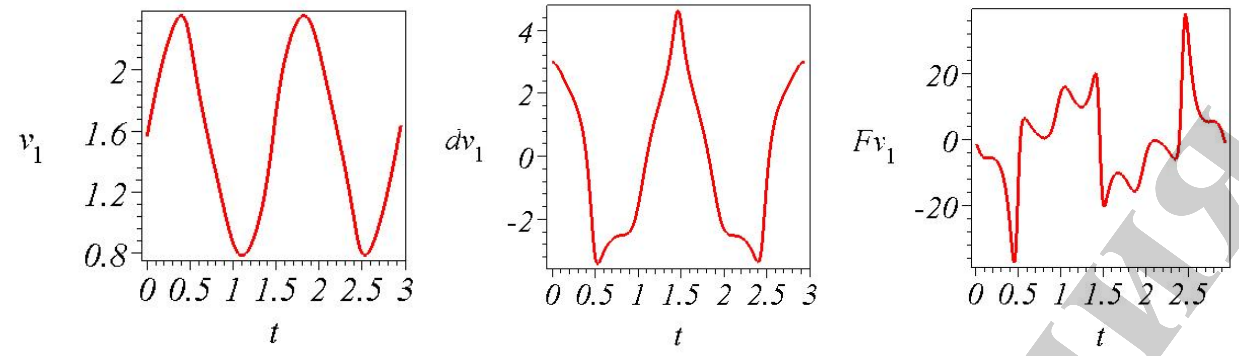
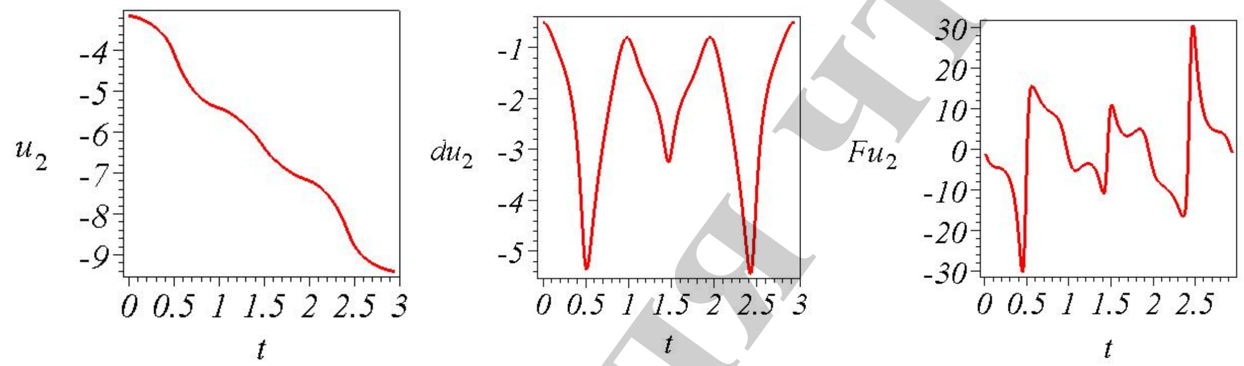


Рис. 16. Графіки узагальненої координати $u_1(t)$ першої ланки:
а – $u_1(t)$; *б* – $du_1(t)/dt$; *в* – Fu_1



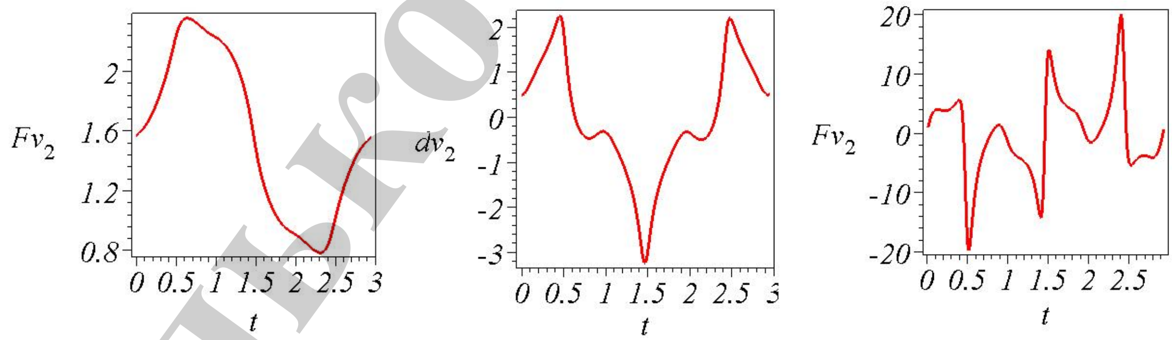
а *б* *в*

Рис. 17. Графіки узагальненої координати $v_1(t)$ першої ланки:
$а - v_1(t)$; $б - dv_1(t)/dt$; $в - Fv_1$



а *б* *в*

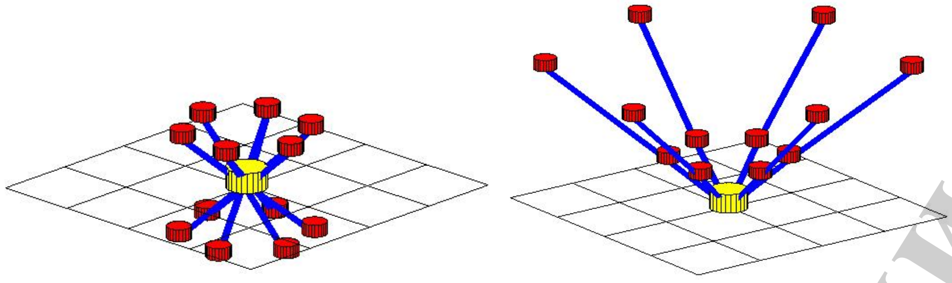
Рис. 18. Графіки узагальненої координати $u_1(t)$ першої ланки:
$а - u_2(t)$; $б - du_2(t)/dt$; $в - Fu_2$



а *б* *в*

Рис. 19. Графіки узагальненої координати $v_1(t)$ першої ланки:
$а - v_2(t)$; $б - dv_2(t)/dt$; $в - Fv_2$

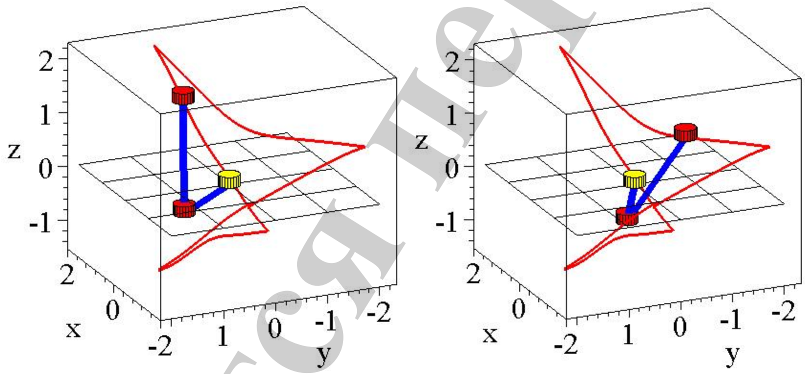
На рис. 20 наведено варіанти залежно від часу розкриття шести двохланкових стержневих механізмів зі спільною нерухомою точкою для прикладу 2.



а *б*

Рис. 20. Деякі просторові конструкції залежно від часу розкриття:
а – t=2; *б* – t=2,45

Приклад 3. Наведемо формування багатоланкових конструкцій, подібних геометричним моделям секцій ферм, що розкриваються [1,2] Оберемо r_1=1; r_2=2; U_0={1, –4.9, –1, 3}. Час інтегрування T=6.2. На рис. 21 наведено циклічну траєкторію руху кінцевої точки C, а також положення подвійної конструкції в деякі моменту часу, а на рис. 22 зображено фазові траєкторії функцій узагальнений координат.



а *б*

Рис. 21. Циклічна траєкторія руху точки C для прикладу 2:
а – t= 3.5; *б* – t=4.8

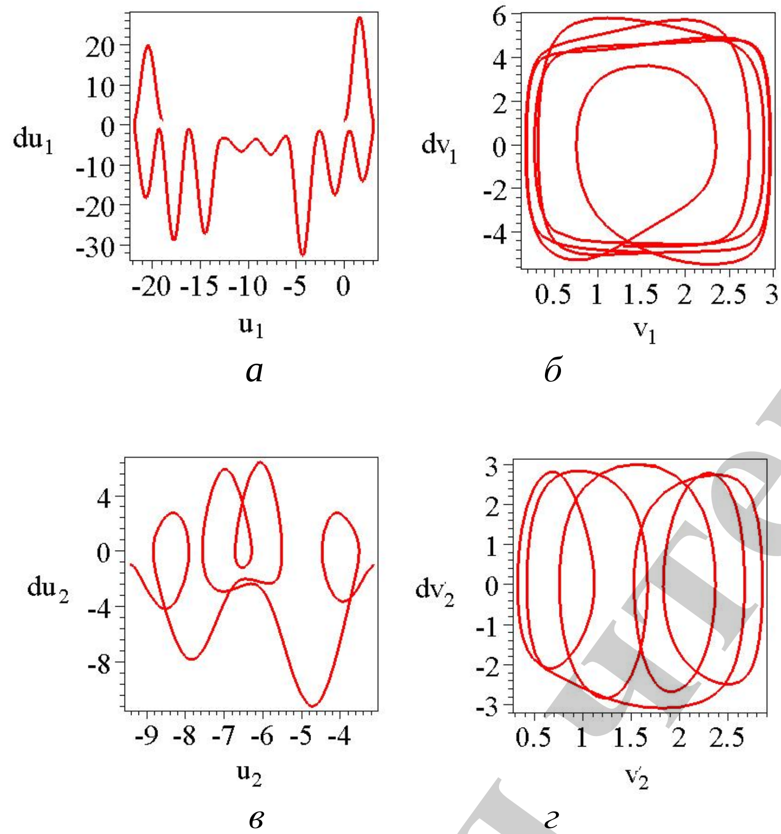


Рис. 22. Фазові траєкторії узагальнених координат для прикладу 2:
$a - u_1(t)$; $б - v_1(t)$; $в - u_2(t)$; $г - v_2(t)$

На рис. 23–26 зображені графіки зміни у часі величин кутів як функцій узагальнених координат, перших похідних цих функцій, а також графіки силових характеристик, які виникають у момент стопоріння розкриття конструкції.

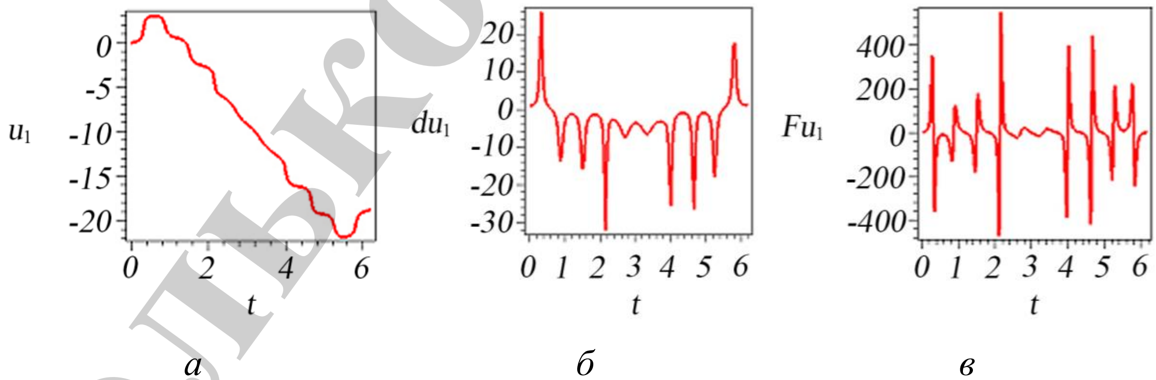
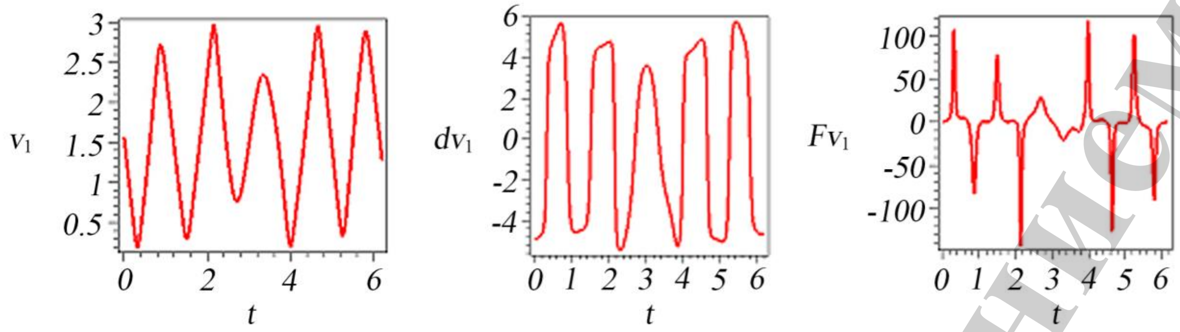
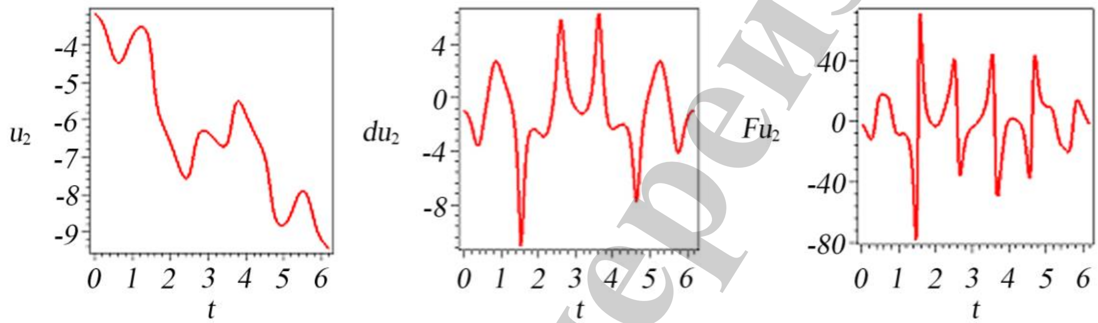


Рис. 23. Графіки узагальненої координати $u_1(t)$ першої ланки:
$a - u_1(t)$; $б - du_1(t)/dt$; $в - Fu_1$



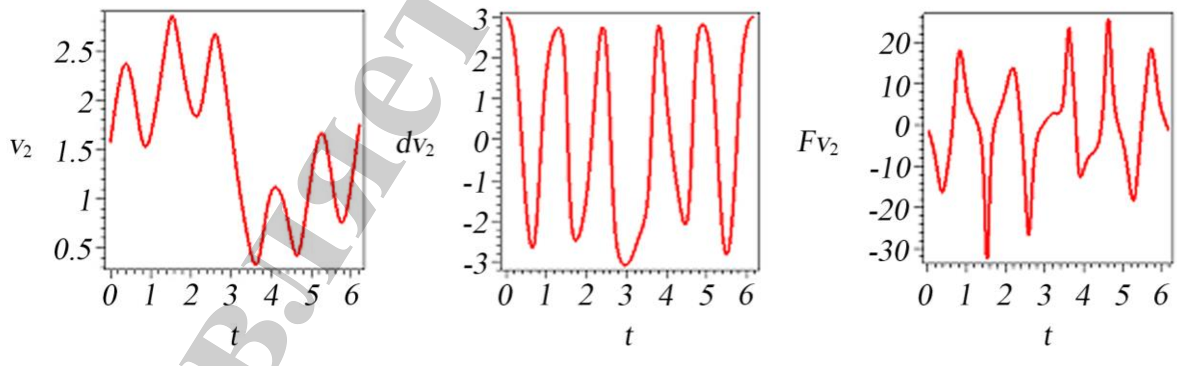
а *б* *в*

Рис. 24. Графіки узагальненої координати $v_1(t)$ першої ланки:
$а – v_1(t)$; $б – dv_1(t)/dt$; $в – Fv_1$



а *б* *в*

Рис. 25. Графіки узагальненої координати $u_1(t)$ першої ланки:
$а – u_2(t)$; $б – du_2(t)/dt$; $в – Fu_2$

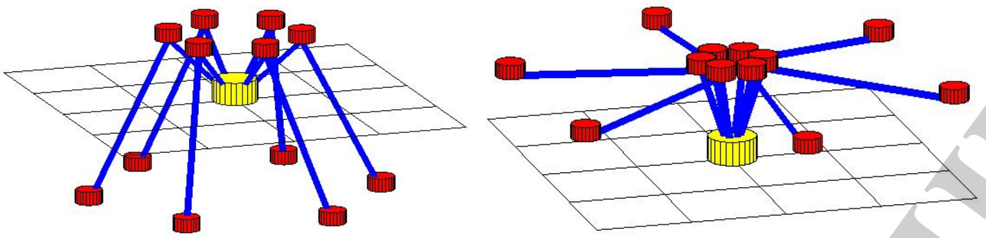


а *б* *в*

Рис. 26. Графіки узагальненої координати $v_1(t)$ першої ланки:
$а – v_2(t)$; $б – dv_2(t)/dt$; $в – Fv_2$

На рис. 27 наведено варіанти залежно від часу розкриття шести двохланкових стержневих механізмів зі спільною нерухомою точкою для прикладу 3.

Одержані конструкці за формою подібні моделям секцій ферм, що розкриваються [1, 2]



а *б*

Рис. 27. Деякі просторові конструкції залежно від часу розкриття:
а – t=2,6; *б* – *t*=5,2

На рисунках, де зображені графіки функцій узагальнених координат, звертаємо увагу на графіки силових характеристик, які виникають у момент стопоріння розкриття конструкції. Для цього слід проаналізувати значення графіків функцій

$Fu_1=m_1d^2u_1(t)dt^2$; $Fv_1=m_1d^2v_1(t)dt^2$;

$Fu_2=m_2d^2u_2(t)dt^2$; $Fv_2=m_2d^2v_2(t)dt^2$

у кінцевій точці інтервалу інтегрування t=6,2. Після обчислень одержано значення

$Fu_1(6,2)=2,63$; $Fv_1(6,2)=–1,54$;

$Fu_2(6,2)=0,63$; $Fv_2(6,2)=–1,24$.

Значення цих функцій у кінцевій точці інтервалу інтегрування визначатиме силу, яка діятиме на вузловий елемент стержневої конструкцій в момент стопоріння її розкриття. У достовірності наведених результатів можна переконатися після перегляду компютерних анімаційних зображень на сайті [36].

5. Обговорення результатів моделювання розкриття у невагомості стержневих конструкцій аналогічних двохланковим сферичним маятникам

В роботі одержано ідеалізовані геометричні моделі розкриття стержневих конструкцій, подібних до подвійних сферичних маятників. В якості рушіїв процесу розкриття запропоновано імпульсні піротехнічні реактивні двигуни, встановлені на кінцевих точках ланок стержневої конструкції. Піротехнічні двигуни набагато легші і дешевші порівняно з іншими рушіями. Такі двигуни доцільно застосовувати тоді, коли розкриття конструкції на орбіті необхідно виконати лише один раз – як найчастіше це і потрібно. Доставка з Землі на орбіту піротехнічних двигунів буде економічно вигіднішою порівняно з електродвигунами або пружинними пристроями з термопамяттю.

Перевага розглянутого інерційного способу розкриття у невагомості стержневої конструкції, подібної подвійному сферичному маятнику, полягає у наступному:

– технологія інерційного способу розкриття стержневих конструкцій принципово не є критичною до розмірів ланок конструкції;

– на базі схеми розкриття однієї стержневої конструкції можна утворювати багатопроменеві схеми з багатьма сферичними конструкціями зі спільним нерухомим вузлом кріплення;

– нема потреби створювати та синхронізувати між собою засоби керування величинами кутів в окремих вузлах багатоланкової конструкції.

Отримані результати можна пояснити можливістю застосування варіаційного принципу Лагранжа до розрахунку механічних конструкцій з урахуванням зазначених вище особливостей. Це дозволило використати рівняння Лагранжа другого роду для опису руху аналогу подвійного сферичного маятника у невагомості незалежно від розташування ланок стержневої конструкції.

Зрозуміло, що наведена геометрична модель подвійної сферичної стержневої конструкції в невагомості потребує подальших досліджень для її наближення до реальної конструкції. Необхідно враховувати моменти інерції стержнів при обертанні елементів конструкції. Розвиток даного напрямку досліджень полягатиме у використанні інших варіантів подвійних сферичних стержневих конструкцій. Також необхідні детальні дослідження конструкції сферичного шарніра.

Труднощі розвитку досліджень в цьому напрямку виникнуть при розв'язанні оберненої задачі компоновки. Тобто по заданому кінцевому розташуванню елементів маятника необхідно визначити раціональний набір параметрів подвійної сферичної стержневої конструкції та початкових умов її руху, які забезпечать таке розкриття. Складності додасть і врахування того, що обернена задача має декілька розв'язків.

7. Висновки

1. Одержані розв'язки системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду дозволили наближено описати рух у невагомості стержневої конструкції, подібної подвійному сферичному маятнику. Це дало можливість реалізувати конкретні геометричні моделі розкриття двохланкових сферичних стержневих конструкцій та спостерігати за ними в режимі комп'ютерної анімації.

2. Для моделювання дії імпульсного піротехнічного реактивного двигуна розроблено схему ініціювання руху двохланкової сферичної стержневої конструкції шляхом впливу імпульсами на кінцеві точки її ланок.

Імпульс дії на ланку стержневої конструкції буде чисельно пропорційний значенню першої похідної функції, яка описує зміну величини відповідного кута як узагальненої координати. Це дало можливість продемонструвати геометричні моделі дій імпульсних реактивних двигунів у якості рушіїв процесу розкриття двохланкових стержневих конструкцій.

3. За допомогою комп’ютерної анімації спрогнозовано у часі взаємне розташування ланок подвійних сферичних стержневих конструкцій, одержаних в результаті інерційного розкриття ланок за допомогою імпульсних реактивних двигунів. Це дає можливість визначати поточні значення кутів між ланками. Аналіз послідовних анімаційних кадрів дозволяє визначити момент фіксації (стопоріння) розкриття, коли ланки подвійних сферичних стержневих конструкцій займуть необхідне просторове положення.

4. Запропоновано спосіб визначення параметрів та початкових умов ініціювання коливань подвійної стержневої конструкції для одержання нехаотичної циклічної траєкторії кінцевої точки другої ланки. Наприклад, обрання початкових швидкостей U_0={1, –4.9, –1, 3} при r_1=1 і r_2=2 дозволяє запобігти хаотичним рухам ланок подвійної сферичної стержневої конструкції в процесі розкриття.

5. В результаті досліджень було побудовано графіки зміни у часі функцій узагальнених координат, а також перших та других похідних цих функцій; на базі цього з’явилася можливість оцінити силові характеристики системи в момент фіксації (стопоріння) розкриття. Одержані фазові траєкторії процесу розкриття дозволяють оцінити швидкості елементів конструкцій в момент гальмування розкриття.

6. Кількісні характеритики наведених покоординатних графічних побудов підтверджують комп’ютерні анімації розкриття у невагомості деяких варіантів подвійних сферичних стержневих конструкцій.

Література

1. A new family of deployable mechanisms based on the Hoekens linkage / Lu S., Zlatanov D., Ding X., Molfino R. // Mechanism and Machine Theory. 2014. Vol. 73. P. 130–153. doi: https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2013.10.007

2. Tibert G. Deployable tensegrity structures for space applications. Stockholm, 2002. 242 p.

3. Szuminski W. Dynamics of multiple pendula. University of Zielona Gora, Olsztyn, 2012. 57 p.

4. Szuminski W. Dynamics of multiple pendula. University of Zielona Gora, Olsztyn, 2013. 32 p.

5. Szuminski W. Dynamics of multiple pendula without gravity // Conference: Conference: Chaos 2013, Volume: Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM). 2014. Issue 1. P. 57–67. URL: https://www.researchgate.net/publication/285143816_Dynamics_of_multiple_pendula_without_gravity

6. Martınez-Alfaro H. Obtaining the dynamic equations, their simulation, and animation for N pendulums using Maple. URL: http://www2.esm.vt.edu/~anayfeh/conf10/Abstracts/martinez-alfaro.pdf

7. Lopes A. M., Tenreiro Machado J. A. Dynamics of the N-link pendulum: a fractional perspective // International Journal of Control. 2016. Vol. 90, Issue 6. P. 1192–1200. doi: https://doi.org/10.1080/00207179.2015.1126677

8. Kinematic analysis of the deployable truss structures for space applications / Yan X., Fu-ling G., Yao Z., Mengliang Z. // Journal of Aerospace Technology and Management. 2012. Vol. 4, Issue 4. P. 453–462. doi: https://doi.org/10.5028/jatm.2012.04044112

9. Deployable Perimeter Truss with Blade Reel Deployment Mechanism. NASA's Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, 2016. URL: https://www.techbriefs.com/component/content/article/tb/techbriefs/mechanics-and-machinery/24098

10. Бушуев А. Ю., Фарафонов Б. А. Математическое моделирование процесса раскрытия солнечной батареи большой площади // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 2. С. 101–114.

11. Щесняк С., Романов А. Проектирование и расчет крупногабаритных раскрывающихся конструкций с помощью программных комплексов MSC.Software // CADmaster. 2009. № 2-3. С. 28–36.

12. Бойков В. Г. Программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER // САПР и графика. 2009. № 9. С. 17–20.

13. Особенности расчета раскрытия крупногабаритных трансформируемых конструкций различных конфигураций / Зимин В. Н., Крылов А. В., Мешковский В. Е., Сдобников А. Н., Файзуллин Ф. Р., Чурилин С. А. // Наука и Образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2014. № 10. С. 179–191. doi: https://doi.org/10.7463/1014.0728802

14. Зельдович Б. Я., Суало М. Дж. Двухчастотный маятник на вращающейся платформе: моделирование оптических явлений // Успехи физических наук. 2004. Т. 174, № 12. С. 1337–1354. doi: https://doi.org/10.3367/ufnr.0174.200412e.1337

15. Петров А. Г. Асимптотическое интегрирование гамильтоновых систем // Механика твердого тела. 2005. Вып. 35. С. 84–91.

16. Глухих Ю. Д. Колебания сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса // Механика твердого тела. 2005. Вып. 35. С. 109–114.

17. Ловейкін В. С., Рибалко В. М., Мельніченко В. В. Дослідження коливань вантажу на гнучкому підвісі при роботі механізму повороту стрілового крану // Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. 2011. Вип. 166. С. 115–121.

18. Dynamics and control of a 3D pendulum / Shen J., Sanyal A. K., Chaturvedi N. A., Bernstein D., McClamroch H. // 2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601). 2004. doi: https://doi.org/10.1109/cdc.2004.1428650

19. Chaturvedi N. A., McClamroch N. H. Asymptotic stabilization of the hanging equilibrium manifold of the 3D pendulum // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2007. Vol. 17, Issue 16. P. 1435–1454. doi: https://doi.org/10.1002/rnc.1178

20. Nonlinear Dynamics of the 3D Pendulum / Chaturvedi N. A., Lee T., Leok M., McClamroch N. H. // Journal of Nonlinear Science. 2010. Vol. 21, Issue 1. P. 3–32. doi: https://doi.org/10.1007/s00332-010-9078-6

21. Náprstek J., Fischer C. Types and stability of quasi-periodic response of a spherical pendulum // Computers & Structures. 2013. Vol. 124. P. 74–87. doi: https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.11.003

22. Consolini L., Tosques M. On the exact tracking of the spherical inverted pendulum via an homotopy method // Systems & Control Letters. 2009. Vol. 58, Issue 1. P. 1–6. doi: https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2008.06.010

23. Anan’evskii I. M., Anokhin N. V. Control of the spatial motion of a multilink inverted pendulum using a torque applied to the first link // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2014. Vol. 78, Issue 6. P. 543–550. doi: https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2015.04.001

24. Lee T., Leok M., McClamroch N. H. Dynamics and control of a chain pendulum on a cart // 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2012. doi: https://doi.org/10.1109/cdc.2012.6427059

25. Xinjilefu, Hayward V., Michalska H. Hybrid Stabilizing Control for the Spatial Double Inverted Pendulum // Advances in Intelligent and Soft Computing. 2010. P. 201–215. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-16259-6_16

26. Egger P., Caracoglia L. Analytical and experimental investigation on a multiple-mass-element pendulum impact damper for vibration mitigation // Journal of Sound and Vibration. 2015. Vol. 353. P. 38–57. doi: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.05.003

27. Ludwicki M., Kudra G., Awrejcewicz J. Axially excited spatial double pendulum nonlinear dynamics. URL: https://www.researchgate.net/profile/Jan_Awrejcewicz/publication/288669893_Axially_excited_spatial_double_pendulum_nonlinear_dynamics/links/568b788908ae051f9afb07e4/Axially-excited-spatial-double-pendulum-nonlinear-dynamics.pdf

28. Marsden J., Scheurle J., Wendlandt J. Visualization of Orbits and Pattern Evocation for the Double Spherical Pendulum. URL: https://authors.library.caltech.edu/20096/1/MaScWe1996(2).pdf

29. Marsden J. E., Scheurle J. Lagrangian reduction and the double spherical pendulum // ZAMP Zeitschrift for angewandte Mathematik und Physik. 1993. Vol. 44, Issue 1. P. 17–43. doi: https://doi.org/10.1007/bf00914351

30. Dehlin F., Askolsson J. Modelling and Simulation of Conservative Dynamical Systems by Computer Algebra Assisted Lagrangian Mechanics. Sweden, 2017. 80 p.

31. Double spherical pendulum. URL: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37363-double-spherical-pendulum

32. Geometrical modeling of the inertial unfolding of a multi-link pendulum in weightlessness / Kutsenko L., Shoman O., Semkiv O., Zapolsky L., Adashevskay I., Danylenko V. et. al. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2017. Vol. 6, Issue 7 (90). P. 42–50. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.114269

33. Куценко, Л. М. Ілюстрації до геометричного моделювання інерційного розкриття багатоланкового стержневої конструкції у невагомості. URL: http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/4868

34. Geometrical modeling of the shape of a multilink rod structure in weightlessness under the influence of pulses on the end points of its links / Kutsenko

L., Semkiv O., Zapolskiy L., Shoman O., Ismailova N., Vasyliev S. et. al. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 2, Issue 7 (92). P. 44–58. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.126693

35. Куценко Л. М. Ілюстрації до геометричного моделювання коливань багатоланкових стержневих конструкцій в невагомості під впливом імпульсів на прикінцеві точки ланок. URL: http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/6335

36. Куценко Л. М. Ілюстрації до геометричного моделювання розкриття у невагомості стержневої конструкції у вигляді подвійного сферичного маятника під впливом імпульсів на кінцеві точки його ланок. URL: http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/6864

37. Navarro Heredia A. L. Spatial Operator Algebra in Modeling and Properties of 3D Inverted Pendulae. McGill University Montreal, Canada, 2017. 121 p.

38. Ludwicki M., Awrejcewicz J., Kudra G. Spatial double physical pendulum with axial excitation: computer simulation and experimental set-up // International Journal of Dynamics and Control. 2014. Vol. 3, Issue 1. P. 1–8. doi: https://doi.org/10.1007/s40435-014-0073-x

39. Development of projection technique for determining the non-chaotic oscillation trajectories in the conservative pendulum systems / Semkiv O., Shoman O., Sukharkova E., Zhurilo A., Fedchenko H. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2017. Vol. 2, Issue 4 (86). P. 48–57. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.95764