

УДК 621.926:34.16

DOI: 10.15587/1729-4061.2018.124057

## Дослідження процесів поширення хвиль Лемба по пластині, що контактує із випадково неоднорідним гетерогенним середовищем

В. С. Моркун, Н. В. Моркун, В. В. Тронь, С. Н. Грищенко

*Представлені результати дослідження впливу характеристик неоднорідною гетерогенного середовища на параметри процесу поширення хвиль Лемба по пластині, що контактує з цим середовищем. Розглянуто вплив параметрів досліджуваного середовища на величину загасання хвиль Лемба. Встановлено, що в'язкість рідини і швидкість потоку не впливають на процес поширення хвиль Лемба. Отримані результати можуть бути використані при розробці методів і засобів контролю параметрів газовмісних суспензій.*

*Ключові слова: газовмісна суспензія, хвилі Лемба, згасання ультразвуку, в'язкість рідини*

### 1. Введение

В практике контроля характеристик технологических сред широкое применение нашли ультразвуковые поверхностные волны [1–9]. Причиной этого являются следующие особенности ультразвуковых волн. Первой такой особенностью является относительно большая концентрация энергии в волне вследствие малой величины слоя ее локализации. Второй – возможность получения ультразвукового сигнала из любой точки поверхности (в том числе криволинейной), по которой она распространяется [2].

Наиболее изученными и используемыми из всех известных на сегодняшний день поверхностных волн являются ультразвуковые волны Релея [1–3]. Волны данного типа распространяются вдоль границы твердого пространства. Рэлеевская волна состоит из двух плоских неоднородных волн – продольной и поперечной, которые, как и составленная из них рэлеевская волна, характеризуются вертикальной поляризацией. Волны Рэлея обладают наибольшей концентрацией энергии на поверхности твердого тела. Однако характеристики процесса распространения существенно зависят от состояния поверхности распространения. Возможно отражение, рассеивание, вызванное даже микродефектами этой поверхности.

Аналогичны по своей природе рэлеевским, но с горизонтальной поляризацией, волны Лява [4, 5]. Волны Лява, как поверхностные волны, получают возможность существования из-за добавления к полупространству твердого слоя, являющегося нагрузкой для полупространства. Волны Лява отличаются сильной зависимостью от состояния неоднородности поверхностного слоя, благодаря которому они и существуют, что делает весьма уязвимыми и потому “нестабильными” измерительные поверхности, по которым они распространяются.

Третьим основным типом ультразвуковых поверхностных волн являются волны на границе двух полупространств – волны Стоунли [1]. Для волны Стоунли характерна эллиптическая поляризация, ориентированная по нормали к границе полупространств. Волны Стоунли распространяются как в жидком, так и в твердом полупространствах. Поэтому их составляющая, распространяющаяся в жидком полупространстве, подвержена воздействию тех же возмущающих факторов, что и обычные объемные ультразвуковые колебания. Например, следует ожидать сильную зависимость величины их затухания от содержания газовых пузырьков в промышленных суспензиях.

К поверхностным волнам относятся также волны в пластинах: нормальные волны с горизонтальной поляризацией (поперечные нормальные волны) и нормальные волны с вертикальной поляризацией – волны Лэмба [1, 6–9]. Учитывая, что стенки технологических емкостей и ряда промышленных агрегатов, как правило, изготавливаются из листового металла при реализации ультразвукового контроля параметров сред, которые с ними контактируют, удобно использовать волны Лэмба. Эти волны характеризуются достаточно большой концентрацией энергии и в меньшей степени, чем волны Рэлея и Лява, подвержены воздействию возмущающих факторов. Вместе с тем, при разработке методов и средств контроля параметров газосодержащих суспензий важной задачей является определение степени влияния параметров исследуемой среды на величину затухания волн Лэмба.

В большом количестве случаев при разработке методов ультразвукового контроля характеристик технологических сред используют ультразвуковые волны Рэлея, Лява и Стоунли. Следует отметить, что использование данных типов волн является целесообразным при выполнении ряда существенных ограничений. Такие ограничения связаны с состоянием поверхности распространения волн, а также с наличием газовых пузырьков в исследуемой среде. В противном случае, при невыполнении ограничений, возрастает погрешность измерений. Устранить указанные недостатки можно, применив волны Лэмба. Данный тип волны гораздо менее чувствителен к состоянию поверхности распространения, наличию газовых пузырьков в исследуемых средах. Таким образом, исследование процессов распространения волн Лэмба по пластине, контактирующей со случайно неоднородной гетерогенной средой, является перспективным и актуальным направлением исследования.

## **2. Анализ литературных данных и постановка проблемы**

Исследования проблем оптимизации процесса обогащения железорудного сырья, результаты которых изложены в работах [10, 11], позволили сделать следующий вывод. Эффективность управления технологическими процессами обогащения руд зависит от точности оперативной информации о состоянии технологических процессов.

Закономерности распространения ультразвуковых колебаний в жидкости в кавитационном режиме рассмотрены в работе [12]. На базе численных методов рассчитана рассеиваемая пузырьками энергия. Получена прямая зависимость между энергией, которую теряют газовые пузырьки и затуханием ультра-

звуковых колебаний, что приводит к формированию бегущих волн. На основе описанных выше результатов в [13] выполнен расчет величины силы Бьеркнеса и спрогнозированы формируемые вследствие воздействия бегущих волн структуры пузырьков газа.

Исследование диссипации акустических колебаний в жидкостях в условиях наличия пузырьков представлено в [14]. Сформированная модель позволяет прогнозировать нелинейное затухание ультразвуковых волн. Отмечается, что прогнозируемые значения демпфирования намного выше, чем числа, оцененные аналогичными моделями.

Метод моделирование распространения ультразвуковых волн в условиях неоднородных гетерогенных сред рассмотрен в работах [15, 16]. Для формирования управляемых ультразвуковых волн при контроле характеристик рудной пульпы предложено использовать фазированные решетки.

Теоретические и экспериментальные исследования распространения ультразвука в пузырьковых жидкостях выполнены в работе [17]. Предложен подход к моделированию процесса распространения ультразвука, предполагающий рассмотрение неравномерного поля давления вне пузырьков. Для количественной оценки неустойчивости пузырьков применены аналитические методы.

Численный подход для описания процесса распространения ультразвука в пузырьковых жидкостях представлен в работе [18]. Данная модель основана на методах конечного объема и конечных разностей. Такой подход позволяет решить дифференциальную систему, образованную волновым уравнением и уравнение Рэлея-Плессета, которая связывает поле звукового давления с колебаниями пузырьков. Полученные результаты позволяют наблюдать физические эффекты вызванные наличием пузырьков в жидкости: нелинейность, дисперсия, затухание.

Результаты исследования нелинейных процессов распространения ультразвуковых волн в воде при неоднородном распределении пузырьков представлены в работе [19]. Математическая модель синтезирована с помощью набора дифференциальных уравнений, который описывает связь акустического поля и вибрации пузырьков. Предполагается, что затухание и нелинейные эффекты обусловлены исключительно наличием пузырьков. Следует отметить, что неоднородность распределения пузырьков представлена в виде скоплений пузырьков, которые могут действовать как акустические экраны, и влияют на поведение ультразвуковых волн.

Необходимость применения средства неразрушающего контроля в процессе обогащения минералого-технологических разновидностей рудного сырья обоснована в работах [20–22]. В частности, средства ультразвукового контроля позволяют получить необходимую информацию для оперативного управления технологическими процессами.

В качестве средства неразрушающего контроля в работе [23] использованы многомодовые волны Лэмба. Посредством измерения характеристик различных мод в экспериментальных кривых дисперсии волн Лэмба и сопоставления их с теоретическими кривыми получены оценки ряда физических параметров исследуемой среды. Отмечается, что кривые дисперсии волн Лэмба зависят

только от параметров пластины, частоту и фазовую скорость можно нормировать относительно скорости сдвиговой волны и толщины слоя исследуемой среды.

Использование управляемого ультразвукового воздействия на рудное сырье в процессе обогащения для повышения эффективности данного процесса исследовано в работах [24–25]. Представлено математическое описание кавитационных процессов в неоднородной гетерогенной среде и обобщенная модель динамики газовых пузырьков. Предложена методика определения оптимальных параметров источника ультразвуковых колебаний.

Преимущество волны Лэмба в сфере неразрушающего контроля, как отмечено в работе [26], среди множества ультразвуковых волн заключается в том, что они могут проверять большую площадь с минимальным количеством приемников. Поскольку волны Лэмба являются диспергирующими, рекомендуется использовать синусоидальный сигнал эмиссии. Моделирование волн Лэмба было выполнено с использованием программного обеспечения ATILA.

В работе [27] также отмечено, что волны Лэмба являются наиболее широко используемыми ультразвуковыми волнами для контроля различных сред. Однако теоретический анализ распространения управляемой волны представляет собой сложную задачу. Рассмотрен метод моделирования локального взаимодействия при распространении волн в металлических структурах. Следует отметить, что использование предложенного метода усложняется сосуществованием по крайней мере двух высокодисперсионных мод на любой заданной частоте.

Метод контроля параметров жидких сред с применением ультразвуковых волн Лэмба представлен в работе [28]. Показано, что изменение характеристик волн может быть использовано как функция, зависящая от уровня жидкости. Отмечается, что для определения оптимальных условий измерения параметров жидкой среды с использованием волн Лэмба необходимо провести дополнительные исследования.

Развитие подходов к использованию средств ультразвукового контроля при оптимизации управления технологическими обогатительными процессами представлено в работах [29–31]. Полученные результаты позволяют сделать вывод о целесообразности применения ультразвукового контроля характеристик рудного материала в технологических потоках линии обогащения.

Выполненный анализ литературных источников показал, что в большинстве случаев при разработке методов ультразвукового контроля характеристик неоднородных гетерогенных сред используются определенные типы волн. Наиболее часто для этих целей используются поверхностные волны Лява, Стоунли, Рэлея и Лэмба. Выбор конкретного типа волн для решения поставленных задач требует учёта ряда строгих требований и ограничений, налагаемых как на характеристики поверхности распространения, так и на свойства контролируемой среды. Для определения характеристик газосодержащих суспензий перспективным является использование волн Лэмба. Вместе с тем, нерешённой остаётся проблема оценки степени влияния возмущающих факторов на результаты измерений параметров распространения этих волн.

### 3. Цель и задачи исследования

Целью исследования является уточнение закономерностей распространения волн Лэмба по пластине, контактирующей со случайно неоднородной гетерогенной средой, и оценка степени влияния вязкости и скорости движения газосодержащей суспензии на величину затухания волн Лэмба.

Сформулированная цель исследования обусловила необходимость решения таких задач:

- сформировать математическое описание процесса распространения волн Лэмба в металлической пластине;
- исследовать зависимость затухания волн Лэмба от характеристик жидкости, контактирующей со средой распространения.

### 4. Математическое описание и моделирование процесса распространения волн Лэмба в металлической пластине

Рассмотрим плоскую гармоническую волну Лэмба, распространяющуюся в пластине толщиной  $2d$  в положительном направлении оси  $X$ . Введем для области, занятой пластиной, скалярный  $\varphi$  и векторный  $\psi$  потенциалы смещений, описывающие соответственно продольные и поперечные волны. Значения  $\varphi$  и  $\psi$  могут быть представлены в следующей форме [1, 2]

$$\varphi = A_s chqze^{ikx} + B_a shqze^{ikx}; \quad (1)$$

$$\psi = D_s shsze^{ikx} + C_a chsze^{ikx}, \quad (2)$$

где  $A_s$ ,  $B_a$ ,  $C_a$ ,  $D_s$  – произвольные постоянные;  $k$  – волновое число волн Лэмба;  $q = \sqrt{k^2 - k_l^2}$ ;  $s = \sqrt{k^2 - k_t^2}$ .

Значения волнового числа  $k$  определяются из характеристических уравнений

$$(k^2 + s^2)^2 ch \cdot qh \cdot sh \cdot sd - 4k^2 qs \cdot sh \cdot qd \cdot ch \cdot sd = 0; \quad (3)$$

$$(k^2 + s^2)^2 sh \cdot qd \cdot ch \cdot sd - 4k^2 qs \cdot ch \cdot qd \cdot sh \cdot sd = 0. \quad (4)$$

После выполнения математических преобразований можно получить для вычисления искомых потенциалов следующие выражения

$$\phi = A_s ch \cdot q_s ze^{ik_s x} + B_a sh \cdot q_a ze^{ik_a x}; \quad (5)$$

$$\psi = \frac{2ik_s q_s sh \cdot q_s d}{(k_s^2 + s_s^2) sh s_s d} A_s sh \cdot s_s ze^{ik_s x} + \frac{2ik_a q_a ch \cdot q_a d}{(k_a^2 + s_a^2) ch \cdot s_a d} B_a ch s_a ze^{ik_a x}, \quad (6)$$

где

$$q_{s,a} = \sqrt{k_{s,a}^2 - k_l^2}; \quad S_{s,a} = \sqrt{k_{s,a}^2 - k_t^2}.$$

Выражения (5) и (6) позволяют вычислять компоненты смещений  $U$  и  $W$

$$U = U_s + U_a; \quad (7)$$

$$W = W_s + W_a; \quad (8)$$

$$U_s = Ak_s \left( \frac{ch \cdot q_s z}{sh \cdot q_s d} - \frac{2q_s s_s}{k_s^2 + s_s^2} \frac{sh \cdot s_a z}{ch \cdot s_a d} \right) \times e^{i(k_s x - \omega t - \frac{\pi}{2})}; \quad (9)$$

$$U_a = Bk_a \left( \frac{sh \cdot q_a z}{ch \cdot q_a d} - \frac{2q_a s_a}{k_a^2 + s_a^2} \frac{sh \cdot s_s z}{ch \cdot s_s d} \right) \times e^{i(k_a x - \omega t - \frac{\pi}{2})}; \quad (10)$$

$$W_s = -Aq_s \left( \frac{sh \cdot q_s z}{sh \cdot q_s d} - \frac{2k_s^2}{k_s^2 + s_s^2} \frac{sh \cdot s_s z}{sh \cdot s_s d} \right) \times e^{i(k_s x - \omega t - \frac{\pi}{2})}; \quad (11)$$

$$W_a = -Bq_a \left( \frac{ch \cdot q_a z}{ch \cdot q_a d} - \frac{2k_a^2}{k_a^2 + s_a^2} \frac{ch \cdot s_a z}{ch \cdot s_a d} \right) \times e^{i(k_a x - \omega t - \frac{\pi}{2})}; \quad (12)$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные.

Анализируя выражения (5)–(12), можно заметить, что в первой группе волн, отмеченных индексом  $s$ , движение происходит симметрично относительно плоскости  $Z=0$ . То есть в верхней и нижней части пластины смещение  $U$  имеет одинаковые знаки, а смещение  $W$  – противоположные. Во второй группе волн, отмеченных индексом  $a$ , движение происходит антисимметрично относительно  $Z=0$ . То есть в верхней и нижней части пластины смещение  $U$  имеет противоположные знаки, а смещение  $W$  – одинаковые. Волны первой группы являются симметричными волнами Лэмба, а волны второй группы – антисимметричными.

В пластине толщиной  $2d$  при частоте  $\omega$  может существовать определенное конечное число симметричных и антисимметричных волн Лэмба. Упомянутые волны отличаются одна от другой фазовыми и групповыми скоростями, а также распределением смещений и напряжений по толщине пластины.

На рис. 1–4 приведены результаты моделирования процесса распространения волн Лэмба в алюминиевой пластине с использованием программного пакета LAMSS [34].

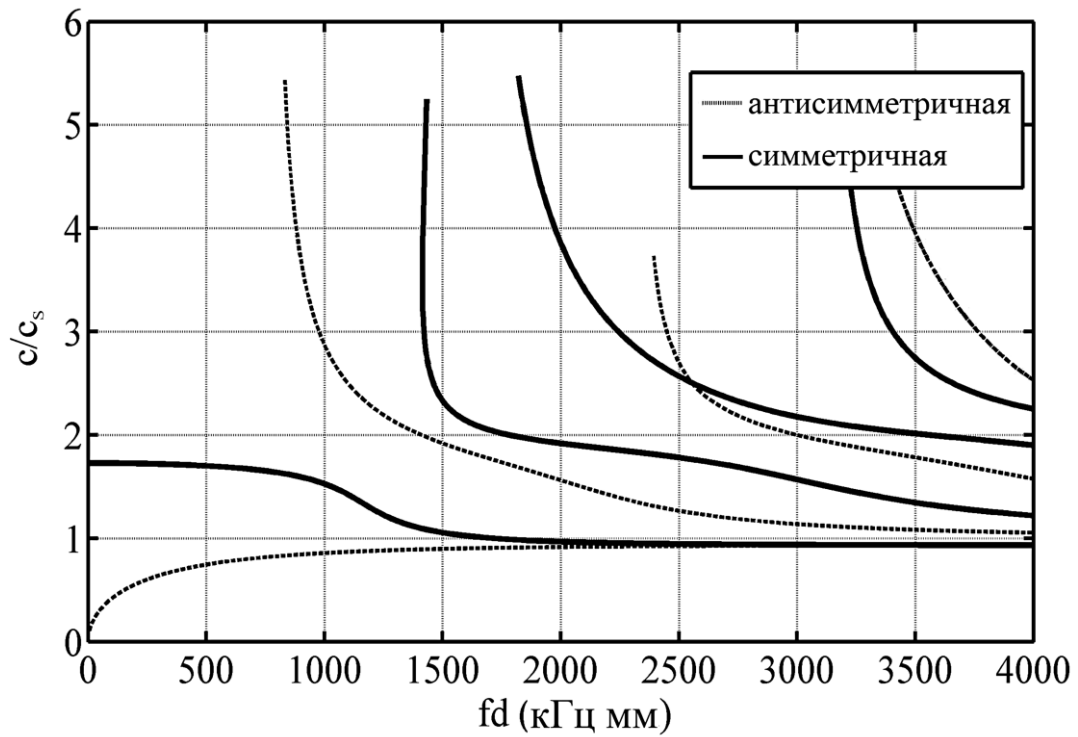


Рис. 1. Фазовая скорость волны Лэмба в Алюминии-2024-Т3

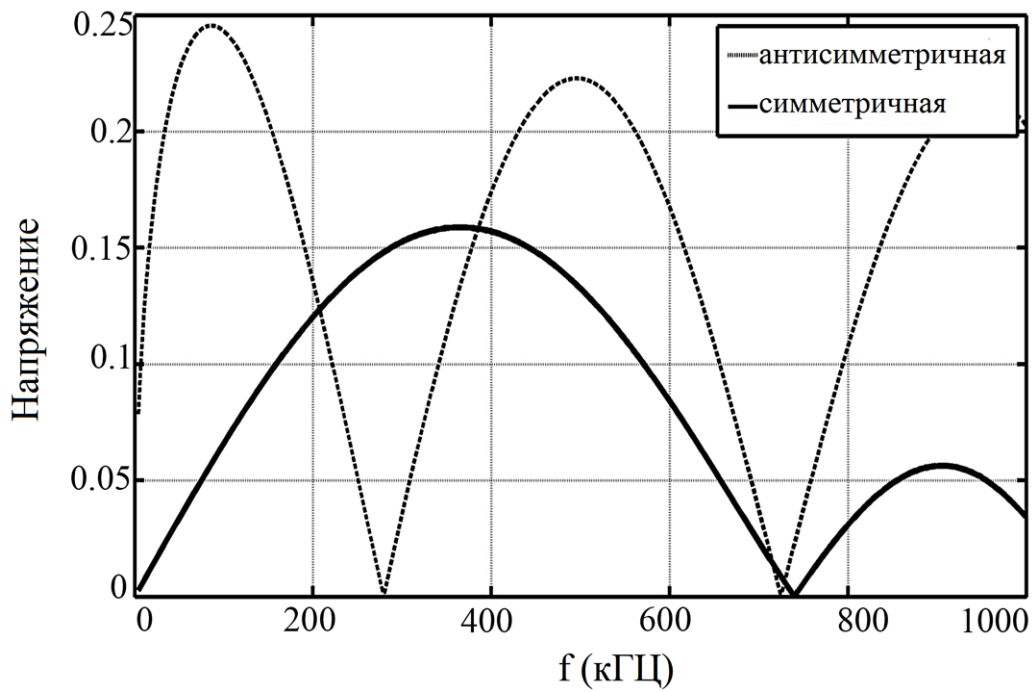


Рис. 2. Напряжения по толщине пластины из Алюминия-2024-Т3

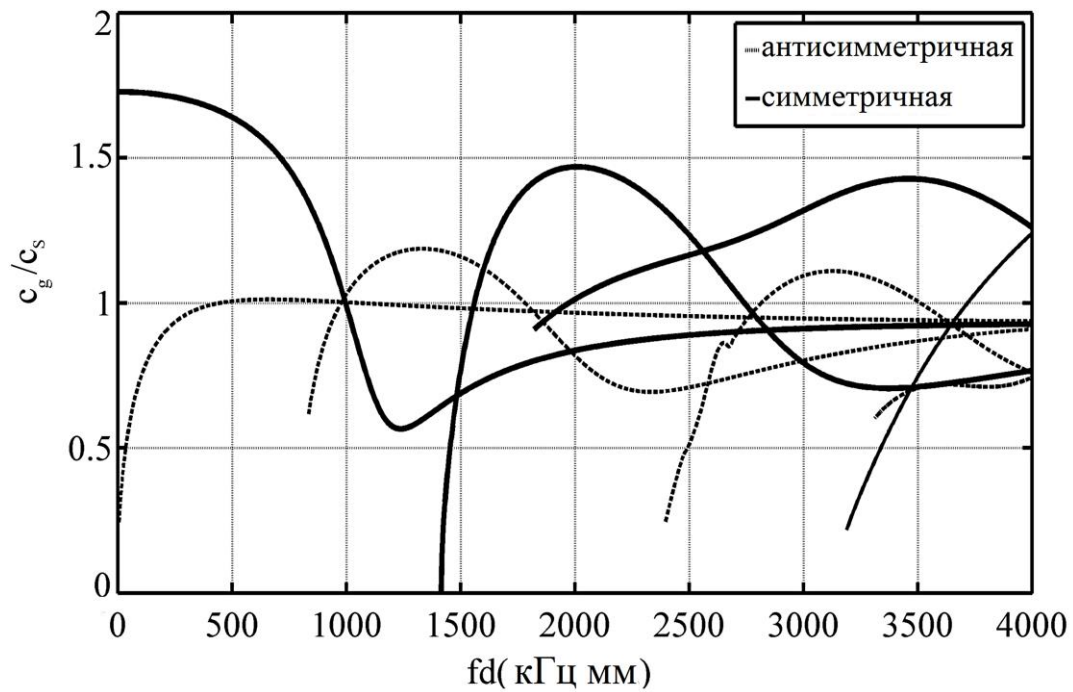


Рис. 3. Групповая скорость волны Лэмба

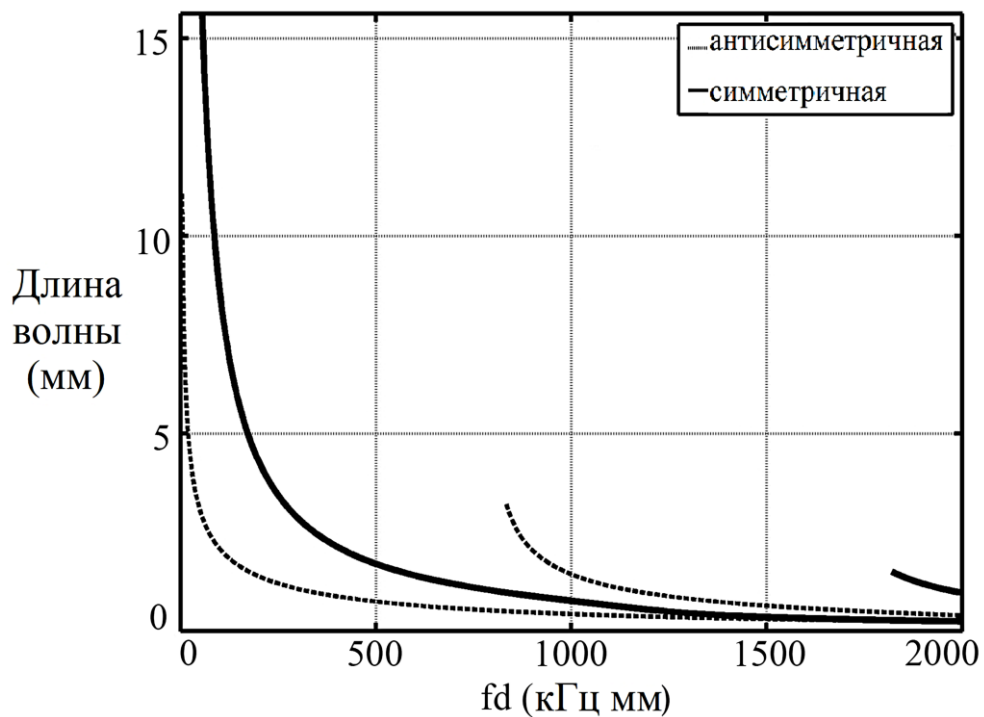


Рис. 4. Длина волны Лэмба

Полученные выше формулы (7)–(12) математического описания процесса распространения волн Лэмба позволяют перейти к исследованию факторов, влияющих на степень затухания данного типа волн.



## 5. Исследование зависимости затухания волн Лэмба от характеристик контактирующей со средой распространения жидкости

Если пластина, в которой распространяется волна Лэмба, граничит с жидкостью, и скорость звука в жидкости  $C_l$  меньше скорости  $C$  волны в пластине, то волна Лэмба будет затухать, излучая энергию в жидкость. Коэффициент затухания волн Лэмба на единице длины определяется по формуле [1, 15]

$$k_2 = -i \frac{\rho_l}{\rho} k_1 \cdot A_{s,a}, \quad (13)$$

где  $\rho_l$  – плотность жидкости, граничащей с поверхностью пластины;  $\rho$  – плотность материала пластины;

$$A_{s,a} = -\frac{ik_l^4 h S_{s,a} \cdot d}{8k_{s,a}^2 \cdot S_{s,a} \sqrt{k_c^2 - k_{s,a}^2}} \left[ 1 + \frac{k_{s,a}^2}{2S_{s,a}^2} + \frac{k_{s,a}^2}{2q_{s,a}^2} - \frac{4k_{s,a}^2}{k_{s,a}^2 + S_{s,a}^2} + \frac{k_{s,a}^2 \cdot d}{2S_{s,a}^2} (thS_{s,a}d - cthS_{s,a}d) - \frac{k_{s,a}^2 \cdot d}{2q_{s,a}^2} (thq_{s,a}d - cthq_{s,a}d) \right]^{-1}, \quad (14)$$

где  $k_{s,a}$  – волновое число симметричных и антисимметричных волн Лэмба;  $q_{s,a} = \sqrt{k_{s,a}^2 - k_l^2}$ ;  $S_{s,a} = \sqrt{k_{s,a}^2 - k_t^2}$ ;  $k_l$  и  $k_t$  – волновые числа продольных и поперечных волн материала пластины.

Следует отметить, что коэффициент  $k_2$  затухания волн Лэмба монотонно возрастает при увеличении  $\rho_l \cdot \rho^{-1}$ , а это означает, что  $k_2$  можно представить в виде

$$k_2 = \frac{\rho_l}{\rho} C_v, \quad (15)$$

где  $C_v$  – величина, практически не зависящая от плотности жидкости.

На рис. 5 приведена зависимость коэффициента затухания на длину волны Лэмба от параметров среды: 1 –  $c_t \cdot c_l^{-1} = 1,5$ ; 2 –  $c_t \cdot c_l^{-1} = 2$ ; 3 –  $c_t \cdot c_l^{-1} = 3$ . Коэффициент Пуассона материала пластины равен 0,3.

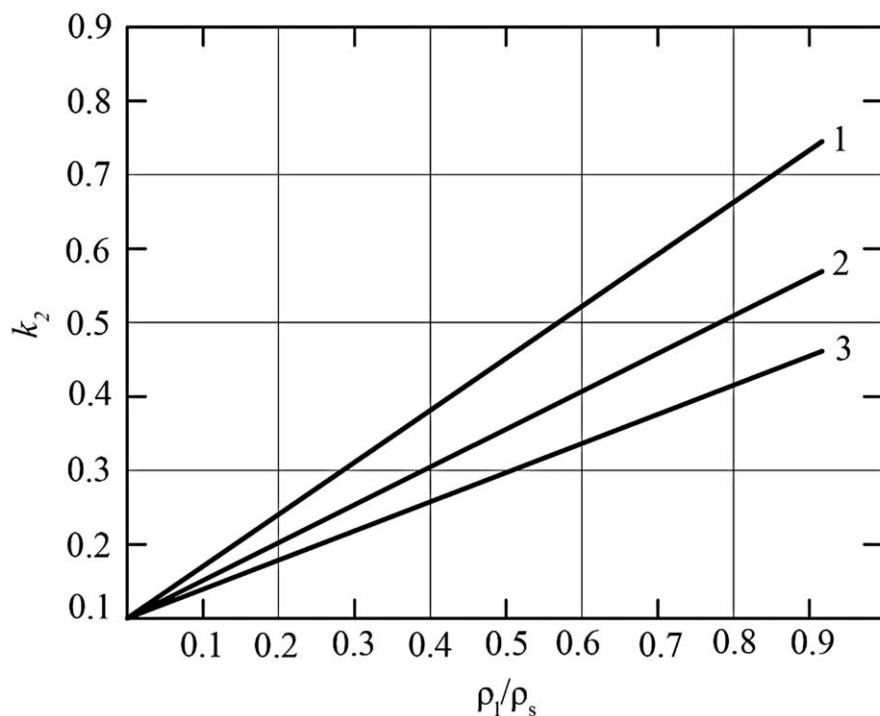


Рис. 5. Зависимость коэффициента затухания на длину волны Лэмба от параметров среды 1 –  $c_t \cdot c_l^{-1} = 1,5$ ; 2 –  $c_t \cdot c_l^{-1} = 2$ ; 3 –  $c_t \cdot c_l^{-1} = 3$

На рис. 6 показана зависимость величины относительного изменения скорости волн Лэмба от параметров среды при тех же условиях.

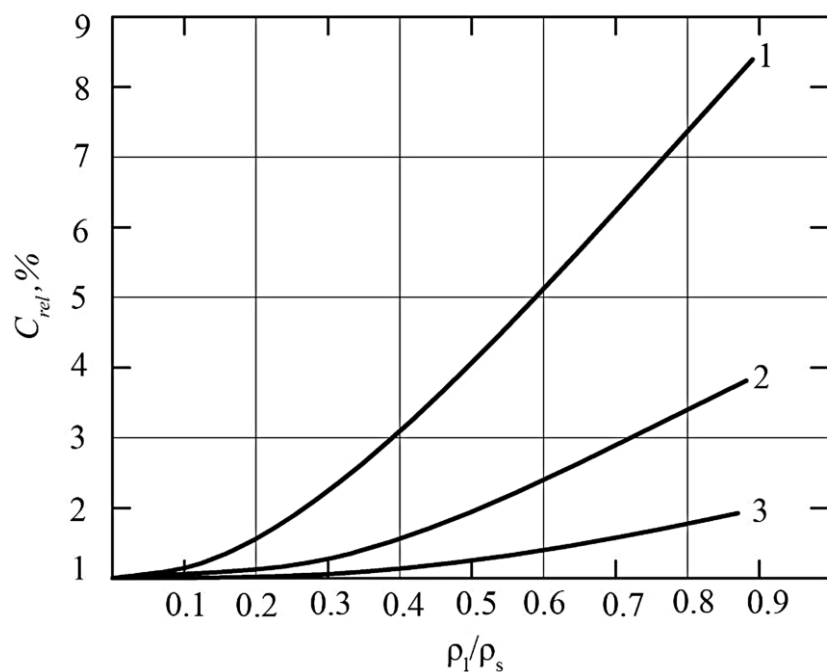


Рис. 6. Зависимость величины относительного изменения скорости волн Лэмба от параметров среды 1 –  $c_t \cdot c_l^{-1} = 1,5$ ; 2 –  $c_t \cdot c_l^{-1} = 2$ ; 3 –  $c_t \cdot c_l^{-1} = 3$

Рассмотрим случай, когда пластина контактирует с водой, в которой находятся частицы твёрдой фазы различного размера (суспензией) и газовые пузырьки, т. е. случайно неоднородной гетерогенной средой. Примером такой среды может служить железорудная пульпа. Так как газовая фаза пульпы практически не влияет на ее плотность, то газовые пузырьки не оказывают влияние на ослабление волн Лэмба. В этом случае плотность суспензии  $\rho_l$  определяется объемной долей частиц твердой фазы  $W$ , их средней плотностью  $\rho_s$  и плотностью воды  $\rho_w$

$$\rho_l = (1-W)\rho_w + W\rho_s. \quad (16)$$

Коэффициент затухания  $k_2$  волн Лэмба в этом случае можно представить в виде

$$k_2 = \left[ (1-W)\frac{\rho_w}{\rho} + W\frac{\rho_s}{\rho} \right] C_v. \quad (17)$$

Таким образом, интенсивность волн Лэмба на расстоянии  $l$  от источника волн можно определить по формуле

$$\begin{aligned} I_{l,v} &= I_{0,v} \exp\{-k_2 l\} = \\ &= I_{0,v} \exp\left\{-\left[(1-W)\frac{\rho_w}{\rho} + W\frac{\rho_s}{\rho}\right] C_v l\right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Если в формуле (18) положить  $W=0$ , то получим выражение, которое будет определять интенсивность волн Лэмба при соприкосновении пластины с чистой водой.

$$I_{l,v}^* = I_{0,v} \exp\left\{-\frac{\rho_w}{\rho} C_v l\right\}. \quad (19)$$

Рассмотрим влияние вязкости исследуемой среды и скорости ее движения на величину затухания волн Лэмба.

На границе жидкой и твердой сред возникают вытекающие волны, распространяющиеся вдоль границы и непрерывно переизлучающие энергию в жидкость. Это обстоятельство и приводит к затуханию волн Лэмба.

Так как движение жидкости может оказывать воздействие на параметры волн Лэмба только посредством сил внутреннего трения (вязкости), исследование этого фактора дает представление не только о степени влияния скорости потока жидкости, но и ее вязкости.

Для теоретического анализа указанной ситуации целесообразно рассматривать вытекающую волну рэлеевского типа на границе твердого и жидкого полупространств. С математической точки зрения эта задача значительно проще, а с физической – аналогична, поэтому количественные соотношения такой задачи будут правильно отражать влияние рассматриваемых факторов.

Пусть полупространство твердой среды занимает область  $Z > 0$  и жидкости  $Z < 0$ . Как известно, в общем случае уравнение движения упругой среды записывается в следующем виде

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}_i}{\partial t^2} - \mu \Delta \vec{U}_i + (\lambda + 2\mu) \text{grad} \vec{U}_i, \quad (20)$$

где  $\vec{U}$  – вектор смещения частиц среды;  $\rho$  – плотность;  $\lambda$  и  $\mu$  – упругие постоянные среды (параметры Ламе);  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Представим вектор смещения в виде

$$\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_r,$$

где  $\vec{U}_1 = \text{grad} \phi$ ;  $\vec{U}_r = \text{rot} \psi$ ;  $\phi$  и  $\psi$  – скалярный и векторные потенциалы.

Тогда уравнение (20) можно свести к двум независимым уравнениям

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}_1}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \Delta \vec{U}_1 = 0; \quad (21)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}_r}{\partial t^2} - \mu \Delta \vec{U}_r = 0. \quad (22)$$

Первое из них описывает распространение продольных, второе – поперечных волн.

Рассмотрим плоскую рэлеевскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $X$  вдоль границы полупространства с жидкостью.

В этом случае движение не зависит от координаты  $Y$ . Тогда у векторного потенциала  $\vec{\psi}$  будет отлична от нуля только компонента, которую обозначим через  $\psi$ . Перейдем от  $\vec{U}_1$  и  $\vec{U}_r$ , к скалярному и векторному потенциалам  $\phi$  и  $\psi$ . Для плоской гармонической волны уравнения движения (21) и (22) будут удовлетворены, если  $\phi$  и  $\psi$  являются решениями волновых уравнений вида

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} + k_i^2 \phi = 0; \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + k_i^2 \psi = 0 \quad (24)$$

для твердого полупространства и

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial Z^2} + k_i^2 \phi' = 0, \quad (25)$$

для жидкого полупространства.

Здесь  $k_l = \omega \sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}$ ,  $k_t = \sqrt{\rho/\mu}$  – волновые числа соответственно продольных и поперечных волн твердого полупространства;  $k_c = \sqrt{\rho/\lambda_l}$  – волновое число продольных волн, распространяющихся в жидком полупространстве.

Решениями уравнений (23), (24) и (25) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\phi &= A \exp[-qZ] \exp[i(kx - \omega t)]; \\ \psi &= B \exp[-SZ] \exp[i(kx - \omega t)]; \\ \phi' &= C \exp[q_l Z] \exp[i(kx - \omega t)],\end{aligned}\tag{26}$$

где  $q^2 = k^2 - k_t^2$ ;  $S^2 = k^2 - k_c^2$ ;  $q_l = k^2 - k_t^2$ ;  $A$ ,  $B$  и  $C$  – произвольные постоянные.

Компоненты смещения частиц в волне по осям  $X$  и  $Z$  выражаются через потенциалы  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\phi'$  следующим образом

$$\begin{aligned}U_x^{(1)} &= \frac{\partial \phi}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial Z}, \\ U_x^{(2)} &= \frac{\partial \phi'}{\partial X}, \\ U_z^{(1)} &= \frac{\partial \phi}{\partial Z} + \frac{\partial \psi}{\partial X}, \\ U_z^{(2)} &= \frac{\partial \phi'}{\partial Z}.\end{aligned}\tag{27}$$

Здесь индексы (1) и (2) относятся к среде с твердым и жидким полупространствами, соответственно.

Через  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\phi'$  можно выразить компоненты  $T_{xx}$ ,  $T_{zz}$ ,  $T_{xz}$ , тензора напряжений

$$\begin{aligned}T_{xx} &= \lambda \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Z} \right), \\ T_{zz} &= \lambda \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Z} \right), \\ T_{xz} &= \lambda \left( 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial X \partial Z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right).\end{aligned}\tag{28}$$

Выражения (26)–(28) являются исходными для определения произвольных постоянных  $A$ ,  $B$  и  $C$  и нахождения волнового числа  $k$ . Для этого используются граничные условия при  $Z=0$ . При этом исходим из равенства компонент смещения вдоль оси  $Z$  частиц твердого и жидкого полупространств. То есть

$$U_z^{(1)}(Z=0) = U_z^{(2)}(Z=0),$$

а при  $Z=0$  компонент  $T_{xz}$  и  $T_{zz}$  тензоров напряжений обеих сред равны.

В выражении (26) при записи скалярного потенциала  $\phi'$  не отражен факт движения жидкости. Поэтому, прежде чем перейти к граничным условиям для получения характеристического уравнения для  $k$ , выясним, как изменится величина  $\phi'$  при учете движения жидкости.

Пусть жидкая среда течет вдоль оси  $X$  справа налево (рис. 7) со скоростью  $V$ .

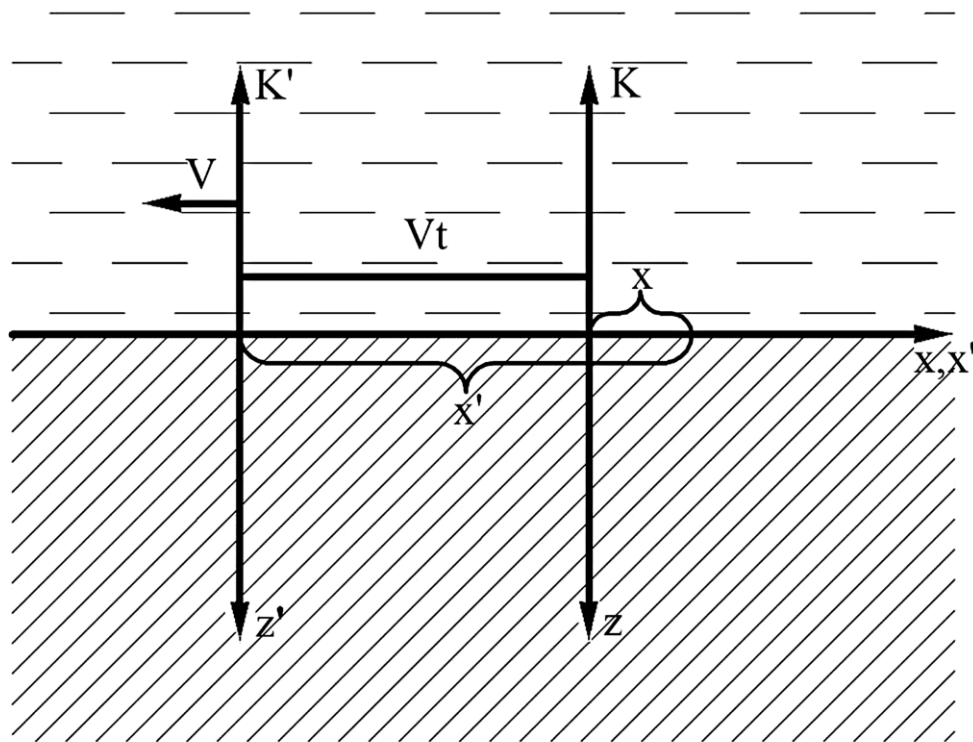


Рис. 7. Геометрическая интерпретация моделируемого пространства

Перейдем в систему координат  $k'$ , в которой жидкость покоится, это означает, что система  $k'$  движется вдоль отрицательного направления оси  $X$  со скоростью  $V$ . Если рэлеевская волна частоты  $\omega$  распространяется вдоль положительного направления оси  $X$  со скоростью  $c$ , то частота и скорость этой волны в системе  $k$  будет равна  $\omega' = \omega(1+V/c)$  согласно эффекту Доплера, и  $c' = c+V$ , согласно классическому закону сложения скоростей. Волновые числа  $k'$  и  $q'_i$  в системе  $k'$  не изменяются, так как

$$k' = \frac{\omega'}{c'} = \frac{\omega(1+V/c)}{c(1+V/c)} = \frac{\omega}{c} = k.$$

То же относится к  $q'_i$ , поэтому скалярный потенциал  $\phi'$  будет иметь вид

$$\phi^l = C \exp(q_l z) \exp[i(kx' - \omega't)]. \quad (29)$$

Наличие внутреннего трения (вязкости) жидкости приводит к появлению касательных сил, которые можно описать заданием тензора напряжений

$$T_{xy}^{(2)} = -\eta \frac{\partial V_x^l}{\partial z} = -\eta \frac{\partial V_x^l}{\partial z} = -\eta \frac{\partial^2 V_x^l}{\partial t \cdot \partial t}, \quad (30)$$

где  $\eta$  – коэффициент вязкости;

$$U_x^l = \frac{\partial \phi^l}{\partial x^l} ik \phi^l.$$

Из условия равенства компонент тензора напряжений твердой среды и жидкости с учетом координатных преобразований Галилея  $X' = X + Vt$ , получим уравнение

$$2ikq_1 A + (k^2 + S_1^2) B - \frac{\eta}{\lambda_1} q_c \omega' k C = 0. \quad (31)$$

В дальнейшем величину  $\eta/\lambda_1$  будем обозначать через  $\beta$ . Второе граничное условие равенства

$$T_{zz}^{(0)}(X, Z=0) = T_{zz}^l(X' = X + Vt, Z=0)$$

приводит к уравнению:

$$(k^2 + S_1^2) A + 2iS_1 k B - k_{v_1}^2 \frac{\rho_l}{\rho_1} C = 0. \quad (32)$$

И, наконец, условие равенства компонент  $Z$  смещения

$$U_z^{(0)}(X, Z) = 0 = U_z^l(X' = X + Vt, Z=0)$$

дает уравнение

$$q_1 A - ikB + q_l C = 0. \quad (33)$$

Таким образом, получаем систему линейных однородных уравнений относительно произвольных постоянных  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

$$2ikq_1 A + (k^2 + S_1^2) B - \beta q_l \omega' k C = 0;$$

$$(k^2 + S_1^2) A + 2iS_1 k B - k_{v_1}^2 \frac{\rho_l}{\rho_1} C = 0; \quad (34)$$

$$q_1 A - ikB + q_1 C = 0.$$

Условием существования нетривиального решения этой системы является равенство нулю ее определителя

$$\begin{vmatrix} 2ikq_1 & k^2 + S_1^2 & \beta q_1 \omega' k \\ k^2 + S_1^2 & 2iS_1 k & -k_i^2 \\ q_1 & -ik & q_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (35)$$

Это дает следующее характеристическое уравнение для нахождения волнового числа  $k$

$$\begin{aligned} 2k^2 q_1 S_1 + (k^2 + S_1^2) = \\ = \frac{\rho_i k_i^4 q_1}{\rho_1 q_1} + iBk^2 \omega' k [(k^2 + S_1^2) + 2q_1 S_1]. \end{aligned} \quad (36)$$

Можно показать, что при условии  $c > c_R$ , которое выполняется почти для всех реальных сред, уравнение (36) имеет комплексный корень  $k = k_R$ , соответствующий системе трех волн. При этом для данной волны под  $q_1$  в уравнении (36) следует понимать следующую ветвь корня

$$q_1 = \sqrt{k^2 - k_i^2} = -i\sqrt{k_i^2 - k^2}.$$

Комплексность  $k$  имеет простой физический смысл: поверхностная волна в этом случае непрерывно излучает энергию в жидкость, образуя в ней отходящую от границы неоднородную волну (вытекающая волна).

В характеристическом уравнении (36) перейдем к безразмерной переменной  $\mu^2 = k^2/k_i^2$ .

В результате получим

$$\begin{aligned} 4\mu^2 = \sqrt{\mu^2 - \zeta^2} \sqrt{\mu^2 - 1} + (2\mu^2 - 1) = \\ = i \frac{\rho_c \sqrt{\mu^2 - \zeta^2}}{\rho_1 \sqrt{v^2 - \mu^2}} + i\beta \omega \mu^2 (1 + \alpha \mu) \times \\ \times [(2\mu^2 - 1) + 2\sqrt{\mu^2 - \zeta^2} \sqrt{\mu^2 - 1}]. \end{aligned} \quad (37)$$

Так как  $k$  – комплексная величина, представим ее в виде  $k = k_1 + ik_2$ , где  $k_2 \ll k_1$ , потому что  $k \approx k_R$ .

Комплексная часть волнового числа представляет собой коэффициент затухания поверхностной волны рэлеевского типа, поэтому основной задачей является определение этой величины.

Метод ее определения будет заключаться в следующем: безразмерную переменную представим в виде



$$\mu = \mu_1 + i\mu_2,$$

где  $\mu_1 = k_1/k_i$ ;  $\mu_2 = k_2/k_i$ . Причем  $\mu_2 \ll \mu_1$ , так как  $k_2 \ll k_1$ . Далее, раскладывая в уравнении (37) все величины, содержащие  $\mu$ , в ряд и ограничиваясь членами первого порядка малости относительно  $\mu_2$ , получим уравнение, содержащее отдельно комплексную и действительную части

$$\begin{aligned} 4\mu_1^2 &= \sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2} \sqrt{\mu_1^2 - 1} + (2\mu_1^2 - 1) + i\mu_2 \left[ 8\mu_1(2\mu_1^2 - 1) + \right. \\ &+ 4\mu_1 \left( 2\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2} \sqrt{\mu_1^2 - 1} \right) + \mu_1^2 \frac{\sqrt{\mu_1^2 - 1}}{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}} + \mu_1^2 \frac{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}}{\sqrt{\mu_1^2 - 1}} \left. \right] = \\ &= \beta\omega\mu_1\mu_2 \left\{ (2 + 3\mu_1^2) \left[ (2\mu_1^2 - 1) + \sqrt{\mu_1^2 - 1} \cdot \sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2} \right] + \right. \\ &+ \mu_1^2 \left( 4 + \frac{\sqrt{\mu_1^2 - 1}}{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}} + \mu_1^2 \frac{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}}{\sqrt{\mu_1^2 - 1}} \right) \left. \right\} - \\ &- \frac{\rho_c}{\rho_1} \mu_1\mu_2 \times \left( \frac{1}{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}} + \mu_1^2 \frac{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}}{v^2 - \mu_1^2} \right) + \\ &+ i \left\{ \frac{\rho_c \sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}}{\rho_1 \sqrt{v^2 - \mu_1^2}} + \beta\omega \left[ (2\mu_1^2 - 1) + \sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2} \sqrt{\mu_1^2 - 1} \right] \mu_1 (1 + \alpha\mu) \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Затем, приравнявая мнимые и действительные выражения левой и правой части соотношения (38), получим два уравнения, решение которых дает информацию о  $\mu_1$  и  $\mu_2$

$$\begin{aligned} \mu_2 &\left[ 8\mu_1(2\mu_1^2 - 1) + 4\mu_1 \left( 2\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2} \sqrt{\mu_1^2 - 1} \right) + \right. \\ &+ \mu_1^2 \frac{\sqrt{\mu_1^2 - 1}}{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}} + \mu_1^2 \frac{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}}{\sqrt{\mu_1^2 - 1}} \left. \right] = \\ &= \frac{\rho_c \sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}}{\rho_1 \sqrt{v^2 - \mu_1^2}} + \beta\omega\mu_1(1 + \alpha\mu_1) \times \\ &\times \left[ (2\mu_1^2 - 1) + \sqrt{\mu_1^2 - 1} \cdot \sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2} \right]; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} 4\mu_1^2 \sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2} \sqrt{\mu_1^2 - 1} + (2\mu_1^2 - 1)^2 &= \\ = - \left[ \frac{\rho_c}{\rho_1} \mu_1 \left( \frac{1}{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}} + \frac{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}}{v^2 - \mu_1^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \beta\omega\mu_1\phi_1(\mu_1)(1 + \alpha\mu_1) \right] \mu_2, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_1(\mu_1) &= \left\{ (2 + 3\mu_1^2) \left[ (2\mu_1^2 - 1) + \sqrt{\mu_1^2 - 1} \cdot \sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2} \right] + \right. \\ &+ \mu_1^2 \left( 4 + \frac{\sqrt{\mu_1^2 - 1}}{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}} + \mu_1^2 \frac{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}}{\sqrt{\mu_1^2 - 1}} \right) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Из уравнения (40)  $\mu_2$  представим в виде

$$\mu_2 = \frac{\rho_l}{\rho_1} f_1(\mu_1) + \beta\omega(1 + \alpha\mu_1) f_2(\mu_1), \quad (42)$$

где

$$f_1(\mu_1) = \sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2} / \sqrt{v^2 - \mu_1^2} \left[ 8\mu_1(2\mu_1^2 - 1) + \right. \\ \left. + 4\mu_1 \left( 2\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2} \sqrt{\mu_1^2 - 1} + \mu_1^2 \frac{\sqrt{\mu_1^2 - 1}}{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}} + \mu_1^2 \frac{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}}{\sqrt{\mu_1^2 - 1}} \right) \right]; \\ f_1(\mu_1) = \left[ (2\mu_1^2 - 1) + \sqrt{\mu_1^2 - 1} \cdot \sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2} \right] \sqrt{v^2 - \mu_1^2} \cdot f_1(\mu_1) / \sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}.$$

В свою очередь,  $\mu_1$  находится из решения уравнения

$$4\mu_1^2 \sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2} \sqrt{\mu_1^2 - 1} + (2\mu_1^2 - 1)^2 = - \left( \frac{\rho_l}{\rho_1} \right)^2 \mu_1 \phi_2(\mu_1) f_1(\mu_1) - \\ - \frac{\rho_l}{\rho_1} \beta\omega\mu_1(1 + \alpha\mu_1) [\phi_1(\mu_1) f_1(\mu_1) + \phi_2(\mu_1) f_2(\mu_1)], \quad (43)$$

где

$$\phi_2(\mu_1) = \frac{1}{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}} + \frac{\sqrt{\mu_1^2 - \zeta^2}}{v^2 - \mu_1^2}.$$

Так как  $\mu_1 \approx \mu_R$  (анализ показывает, что различие между этими величинами не превышает 1–2 %), с хорошим приближением  $\mu_2$  можно оценить по формуле (42), положив при этом  $\mu_1 = \mu_R$ .

Как видно из выражения (42),  $\mu_2$  определяется двумя слагаемыми, причем второе оценивает вклад вязкости и движения жидкости на коэффициент затухания поверхностной волны. Множитель  $(1 + \alpha\mu_1)$  показывает влияние движения жидкости. Однако величина  $\alpha\mu_R \ll 1$  ( $\alpha\mu_R \sim 10^{-3}$ ).

## 6. Обсуждение результатов исследования процессов распространения волн Лэмба в металлической пластине

Рассмотрены результаты исследование процесса распространения волн Лэмба по пластине, контактирующей со случайно-неоднородной гетерогенной средой. Важность полученных результатов подчеркивается тем, что они могут быть использованы при разработке более совершенных методов и средств контроля параметров газосодержащих суспензий.

Существуют объективные сложности использования ультразвуковых методов контроля параметров газосодержащих суспензий, связанные с наличием микродефектов поверхности распространения и газовых пузырьков в исследуемой жидкости. В таком случае результаты измерения параметров ультразвукового поля будут содержать существенную погрешность. Исследование процесса распространения волн Лэмба в аналогичных условиях показали, что использо-

вание волн данного типа позволяет преодолеть указанные недостатки, что является преимуществом предложенного подхода. При этом значение погрешности измерений не выходит за допустимые пределы при различном состоянии поверхности распространения ультразвуковых волн и различном содержании газовых пузырьков в исследуемой среде.

Установлено, что затухание, обусловлено плотностью исследуемой среды. Вязкость и скорость движения газосодержащей суспензии, например, железорудной пульпы, на величину затухания волн Лэмба практически не влияют.

С практической точки зрения, полученные результаты могут быть использованы для расчета параметров измерительных каналов в системах ультразвукового контроля характеристик измельчённых материалов в потоке пульпы. Например, на горно-обогатительных комбинатах перерабатываемую руду классифицируют по основным химико-минералогическим и физико-механическим признакам. Полученное разделение руды на разновидности используют затем в процессе планирования и организации добычи руды. При этом, стремятся обеспечить постоянное значение характеристик руды на протяжении определенного интервала времени. Такой подход позволяет точнее придерживаться технологического регламента процесса обогащения и способствует повышению качества готовой продукции – концентрата. Однако система ведения горных работ, в настоящее время, не позволяет добывать однотипные руды достаточное количество времени для стабильной работы обогатительных агрегатов. Следовательно, приобретает актуальность задача оперативного контроля характеристик руды в технологических потоках обогатительной фабрики и распознавание ее минералого-технологических разновидностей. В данном случае ультразвуковые методы контроля позволяют решить важную задачу, состоящую в обеспечении систем управления процессом обогащением руды достоверной оперативной информацией о характеристиках перерабатываемого материала. Таким образом, открывается возможность повышения эффективности технологических процессов горно-металлургической отрасли, в частности, процессов обогащения руды.

К недостаткам предложенного подхода можно отнести отсутствие возможности осуществлять контроль характеристик частиц твердой фазы пульпы, относящихся к определенному классу крупности. То есть, при данных условиях не представляется возможным получить информацию о характеристиках частиц твердой фазы определенного класса крупности. А такая информация является важной при формировании управляющих воздействий в процессе обогащения руды.

Перспектива развития данного исследования заключается в исследовании возможности комбинирования средств ультразвуковых (с использованием поверхностных и объёмных волн) и ядернофизических измерений. Это позволит осуществлять контроль характеристик определенных классов крупности частиц, составляющих твердую фазу пульпы. При этом необходимо исследовать эффекты одновременного воздействия на рудную пульпу различных видов излучения. Развитие данного исследования в указанном направлении потребует учёта многочисленных возмущающих факторов, по разному влияющих на различные виды энергетического воздействия.

## 7. Выводы

1. Сформировано математическое описание процесса распространения волн Лэмба в металлической пластине. Получены аналитические выражения для определения потенциалов смещений, описывающие соответственно продольные и поперечные волны в пластине толщиной  $2d$  при частоте  $\omega$ . Показана возможность существования в данных условиях определенного конечного числа симметричных и антисимметричных волн Лэмба. Упомянутые волны отличаются одна от другой фазовыми и групповыми скоростями, а также распределением смещений и напряжений по толщине пластины

2. Исследована зависимость затухания волн Лэмба от характеристик жидкости, контактирующей со средой распространения. В случае, когда среда распространения волны Лэмба граничит с жидкостью и скорость звука в жидкости  $C_l$  меньше скорости  $C$  волны в пластине, волна Лэмба будет затухать, излучая энергию в жидкость. Установлено, что затухание обусловлено плотностью исследуемой среды. Вязкость и скорость движения газосодержащей суспензии, например железорудной пульпы, на величину затухания волн Лэмба практически не влияют.

## Литература

1. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твёрдых телах. М.: Наука, 1981. 286 с.
2. Lamb H. On Waves in an Elastic Plate // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1917. Vol. 93, Issue 648. P. 114–128. doi: 10.1098/rspa.1917.0008
3. Обогащаемость железных руд / Богданова И. П., Нестерова Н. А., Федорченко В. С., Грицай Ю. Л. М.: Недра, 1989. 158 с.
4. Ржевский В. В., Ямщиков В. С. Ультразвуковой контроль и исследования в горном деле. М.: Недра, 1968. 120 с.
5. Noninvasive real-time multipoint temperature control for ultrasound phased array treatments / Seip R., VanBaren P., Cain C. A., Ebbini E. S. // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. 1996. Vol. 43, Issue 6. P. 1063–1073. doi: 10.1109/58.542050
6. Использование волн Лэмба для сигнализации уровня жидких сред / Бражников Н. И., Шавыкина Н. С., Гордеев А. П., Скрипалёв В. С. // Приборы и системы управления. 1975. № 9. С. 31–32.
7. Гуманюк М. Н. Ультразвук в горной автоматике. К.: Техніка, 1970. 192 с.
8. Ямщиков В. С., Коробейников Н. С. Применение ультразвука в горной промышленности: Обзор. М.: Недра, 1967. 52 с.
9. Бражников Н. И. Ультразвуковые методы. М.: Энергия, 1975. 91 с.
10. Kupin A. Research of properties of conditionality of task to optimization of processes of concentrating technology is on the basis of application of neural networks // Metallurgical and Mining Industry. 2014. Issue 4. P. 51–55.

11. Kupin A. Application of neurocontrol principles and classification optimization in conditions of sophisticated technological processes of beneficiation complexes // *Metallurgical and Mining Industry*. 2014. Issue 6. P. 16–24.
12. Louisnard O. A simple model of ultrasound propagation in a cavitating liquid. Part I: Theory, nonlinear attenuation and traveling wave generation // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2012. Vol. 19, Issue 1. P. 56–65. doi: 10.1016/j.ultsonch.2011.06.007
13. Louisnard O. A simple model of ultrasound propagation in a cavitating liquid. Part II: Primary Bjerknes force and bubble structures // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2012. Vol. 19, Issue 1. P. 66–76. doi: 10.1016/j.ultsonch.2011.06.008
14. Jamshidi R., Brenner G. Dissipation of ultrasonic wave propagation in bubbly liquids considering the effect of compressibility to the first order of acoustical Mach number // *Ultrasonics*. 2013. Vol. 53, Issue 4. P. 842–848. doi: 10.1016/j.ultras.2012.12.004
15. Morkun V., Morkun N., Pikilnyak A. Simulation of the Lamb waves propagation on the plate which contacts with gas containing iron ore pulp in Waveform Revealer toolbox // *Metallurgical and Mining Industry*. 2014. Issue 5. P. 16–19.
16. Morkun V., Morkun N., Pikilnyak A. Modeling of ultrasonic waves propagation in inhomogeneous medium using fibered spaces method (k-space) // *Metallurgical and Mining Industry*. 2014. Issue 2. P. 43–48.
17. Zhang Y., Du X. Influences of non-uniform pressure field outside bubbles on the propagation of acoustic waves in dilute bubbly liquids // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2015. Vol. 26. P. 119–127. doi: 10.1016/j.ultsonch.2015.02.016
18. Tejedor Sastre M. T., Vanhille C. A numerical model for the study of the difference frequency generated from nonlinear mixing of standing ultrasonic waves in bubbly liquids // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2017. Vol. 34. P. 881–888. doi: 10.1016/j.ultsonch.2016.07.020
19. Vanhille C., Campos-Pozuelo C. Nonlinear ultrasonic waves in bubbly liquids with nonhomogeneous bubble distribution: Numerical experiments // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2009. Vol. 16, Issue 5. P. 669–685. doi: 10.1016/j.ultsonch.2008.11.013
20. Morkun V., Tron V. Automation of iron ore raw materials beneficiation with the operational recognition of its varieties in process streams // *Metallurgical and Mining Industry*. 2014. Issue 6. P. 4–7.
21. Morkun V., Morkun N., Pikilnyak A. Adaptive control system of ore beneficiation process based on Kaczmarz projection algorithm // *Metallurgical and Mining Industry*. 2015. Issue 2. P. 35–38.
22. Golik V., Komashchenko V., Morkun V. Innovative technologies of metal extraction from the ore processing mill tailings and their integrated use // *Metallurgical and Mining Industry*. 2015. Issue 3. P. 49–52.
23. Lamb wave analysis for non-destructive testing of concrete plate structures / Ryden N., B. Park C., Ulriksen P., D. Miller R. // 9th EAGE/EEGS Meeting. 2003. doi: 10.3997/2214-4609.201414477

24. Golik V., Komashchenko V., Morkun V. Feasibility of using the mill tailings for preparation of self-hardening mixtures // *Metallurgical and Mining Industry*. 2015. Issue 3. P. 38–41.
25. Morkun V., Tron V., Vita R. Optimization of high-energy ultrasound source parameters for cavitation disintegration of ore floccules before floatation // *2017 IEEE International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering (YSF)*. 2017. doi: 10.1109/ysf.2017.8126597
26. Debarnot M., Le Letty R., Lhermet N. Ultrasonic NDT based on Lamb waves: Development of a dedicated drive and monitoring electronic // *Proceedings of the 3rd European Workshop on Structural Health Monitoring*. 2006. P. 1207–1213.
27. Lee B. C., Staszewski W. J. Modelling of Lamb waves for damage detection in metallic structures: Part I. Wave propagation // *Smart Materials and Structures*. 2003. Vol. 12, Issue 3. P. 804–814. doi: 10.1088/0964-1726/12/5/018
28. Subhash N., Krishnan B. Modelling and experiments for the development of a guided wave liquid level sensor // *Proceedings of the National Seminar & Exhibition on Non-Destructive Evaluation*. 2011. P. 240–244.
29. Morkun V., Tron V. Ore preparation multi-criteria energy-efficient automated control with considering the ecological and economic factors // *Metallurgical and Mining Industry*. 2014. Issue 5. P. 4–7.
30. Morkun V., Morkun N., Tron V. Distributed closed-loop control formation for technological line of iron ore raw materials beneficiation // *Metallurgical and Mining Industry*. 2015. Issue 7. P. 16–19.
31. Metal deposits combined development experience / Golik V., Komashchenko V., Morkun V., Burdzieva O. // *Metallurgical and Mining Industry*. 2015. Issue 6. P. 591–594.
32. Tabei M., Mast T. D., Waag R. C. Ak-space method for coupled first-order acoustic propagation equations // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2002. Vol. 111, Issue 1. P. 53–63. doi: 10.1121/1.1421344
33. Church C. C. The effects of an elastic solid surface layer on the radial pulsations of gas bubbles // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1995. Vol. 97, Issue 3. P. 1510–1521. doi: 10.1121/1.412091
34. LAMSS Products: Software. Laboratory for active materials and smart structures. URL: <http://www.me.sc.edu/Research/lamss/html/software.html>