

# INTRODUCCIÓ A L'ACÚSTICA DE LA TENORA. PART II

per

*JOAQUIM AGULLÓ I BATLLE, SALVADOR CARDONA I FOIX  
I ANNA BARJAU I CONDOMINES*  
Càtedra de MECÀNICA de l'ETSEIB.  
Universitat Politècnica de Catalunya.

## RESUM

En aquest article és exposada la modelització matemàtica del comportament acústic de la tenora i dels instruments del mateix tipus, desenvolupada al Laboratori de Vibracions de l'ETSEIB. Aquesta modelització es limita a la columna d'aire de l'interior de l'instrument i es refereix al càlcul de la impedància acústica —a la secció on s'acobla amb la canya— a partir de la geometria del tub i dels forats. Els càlculs es basen en la teoria de la propagació d'ones longitudinals amb esmorteïment en tubs cilíndrics i cònics.

Hom presenta també un model simplificat previst per al càlcul de les freqüències de ressonància emprant recursos de càlcul reduïts. A partir d'aquest model hom obté resultats generals il·lustratius de la influència en les freqüències de ressonància del truncament del tub principal, de la posició i mida dels forats, i de la variació local del perfil del tub.

A l'últim apartat de l'article hom fa una introducció a la modelització de l'instrument complet, en la qual es planteja l'acoblament entre la columna d'aire i la canya. En aquesta modelització, que ha de permetre l'estudi tant del règim estacionari com del transitori, la columna d'aire és caracteritzada per la seva resposta impulsional.

## INTRODUCCIÓ

Aquesta segona part ve a completar un article previst com a punt de partida de l'estudi sobre el funcionament acústic de la tenora que hom duu a

terme al Laboratori de Vibracions de l'ETSEIB. La primera part [1], publicada al Vol. I/Núm. 4 del Butlletí, es referia als aspectes conceptuals, i aquesta segona es refereix a la modelització matemàtica. L'interval de temps transcorregut des de la publicació de la primera part ha permès d'aprofundir en la modelització que ara presentem, amb la incorporació de formulacions més acurades i amb contrastacions experimentals més precises.

El paper destacat que té la impedància acústica de la columna d'aire a l'extrem de l'instrument on es troba la canya, tal com és exposat a la Part I, ha fet que la modelització es referís al càlcul d'aquesta impedància acústica a partir de les mides geomètriques de l'instrument i de les propietats físiques de l'aire. Aquesta modelització es basa en la teoria de propagació d'ones longitudinals en tubs cilíndrics i en tubs cònics, mitjançant els quals hom representa la columna d'aire de l'instrument amb les ramificacions corresponents a les xemeneies dels forats.

La precisió en el càlcul de les freqüències de ressonància obtinguda amb els programes de càlcul desenvolupats a partir del model establert, és suficient per a fer d'aquests programes una eina útil en el projecte de tenores i d'altres instruments del mateix tipus.

Presentem també un model simplificat, el qual, a més d'ésser útil per preveure, mitjançant càlculs senzills, correccions en prototipus o en instruments ja construïts, forneix resultats generals il·lustratius de la influència en les freqüències de ressonància de diversos factors geomètrics, com ara el truncament del tub, la posició i mida dels forats, i la variació local del perfil del tub.

A la darrera part de l'article fem un introducció a la modelització de l'instrument complet, la qual porta a plantejar l'acoblament entre la columna d'aire i la canya. En l'estudi d'aquest aacoblament, la modelització del comportament de la columna d'aire en el camp temporal, per mitjà de la resposta impulsional, presenta certs avantatges.

## MODELITZACIÓ

La modelització que presentem es refereix exclusivament a la columna d'aire amb les seves ramificacions. N'excloem la modelització de la canya pel fet que aquesta és un element fungible. A més, l'estudi del comportament d'aquesta és extraordinàriament complex, tant pel que fa a les propietats mecàniques de la canya, com pel problema de mecànica de fluids implicat; d'altra banda, cal tenir en compte que la intervenció dels llavis de l'instrumentista ve a afegir-hi un nou factor de complexitat.

El resultat del model és presentat com a comportament acústic de la columna d'aire a la secció d'entrada, és a dir a la secció on s'acobla amb la can-

ya. Com a funció representativa d'aquest comportament ha estat elegida la impedància acústica perquè es correlaciona fàcilment amb aspectes funcionals de l'instrument, segons és exposat a la Part I. Les freqüències de ressonància, que corresponen als pics del mòdul de la impedància, l'alçària d'aquests pics i la freqüència de tall, són factors directament observables al diagrama del mòdul de la impedància acústica que tenen un paper decisiu en el comportament de l'instrument.

La representació alternativa del comportament acústic per mitjà de la resposta impulsional no és tan il·lustrativa com la impedància acústica dels aspectes funcionals com ara l'afinació i l'estabilitat, per bé que pugui ésser-ho més pel que fa a l'espontaneïtat de l'instrument. D'altra banda, la determinació experimental de la impedància acústica permet d'obtenir més precisió que la determinació experimental de la resposta impulsional.

Per al càlcul de la impedància acústica a l'entrada hom considera la columna d'aire formada per un conjunt de trams cilíndrics i cònics acoblats en sèrie o en paral·lel. Per a cada tram les impedàncies acústiques dels seus extrems es relacionen a partir de la teoria de propagació de les ones planes en el cas dels trams cilíndrics, i de les ones esfèriques en el cas dels trams cònics [2, 3, 4].

En un tram cilíndric, fig. 1, la impedància als extrems pot ésser expressada en la forma

$$Z_1 = \left[ \frac{1}{j\rho c} \operatorname{tg} \hat{\alpha}_1 \right]^{-1}$$

$$Z_2 = \left[ \frac{1}{j\rho c} \operatorname{tg} (\alpha_1 - kl + j\hat{\tau}l) \right]^{-1}$$

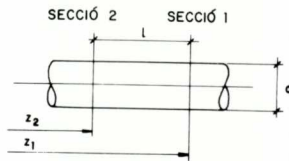


Fig. 1. Geometria d'un tram cilíndric.

En un tram cònic, fig. 2, la impedància als extrems pot ésser expressada en la forma

$$Z_1 = \left[ \frac{1}{j\rho c} \left( \operatorname{tg} \hat{\alpha}_1 + \frac{1}{k r_1} \right) \right]^{-1}$$

$$Z_2 = \left[ \frac{1}{j\rho c} \left( \operatorname{tg}(\hat{\alpha}_1 - k l + j \hat{\tau} l) + \frac{1}{k r_2} \right) \right]^{-1}$$

on:  $j = \sqrt{-1}$  és la unitat imaginària  
 $\rho$  = densitat de l'aire  
 $c$  = velocitat del so  
 $k = 2\pi f/c$  és el nombre d'ona  
 $f$  = freqüència en Hz  
 $\hat{\tau}$  = paràmetre complex d'escorçament.

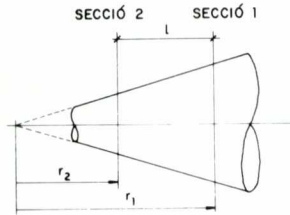


Fig. 2. Geometria d'un tram cònic.

A la unió dels trams negligim la presència d'ones transversals i circumferencials per tal com les freqüències que hi considerem són inferiors a les dels modes transversals i circumferencials propagatius. A les unions hom considera que la pressió és única i que hi ha equilibri de cabal.

A partir del coneixement de la impedància a l'extrem de l'instrument on es troba el pavelló i als extrems de les ramificacions laterals corresponents a les xemeneies dels forats oberts, hom pot calcular progressivament les impedàncies a les diverses seccions fins a arribar a l'entrada [5]. La influència d'un forat tancat en la impedància del tub és modelitzada per mitjà d'un terme d'impedància acoblat en sèrie [6].

## CONDICIONS D'EXTREM

Les condicions d'extrem que hom troba a la tenora són diverses. L'obertura del pavelló pot ésser considerada com la de l'extrem d'un tub cònic de gruix negligible. Els forats, en desembocar a la paret exterior de l'instrument, presenten una condició d'extrem intermèdia entre la d'un tub cilíndric que s'obre en un pla infinit i la de l'extrem obert d'un tub cilíndric de gruix negligible. Aquests dos casos són els únics que han estat estudiats analíticament [7, 8]. A la fig. 3 hi ha representades la part real  $\theta$  i la part imaginària  $\chi$  de la impedància acústica adimensional  $Z/\rho c$  en aquests dos casos.

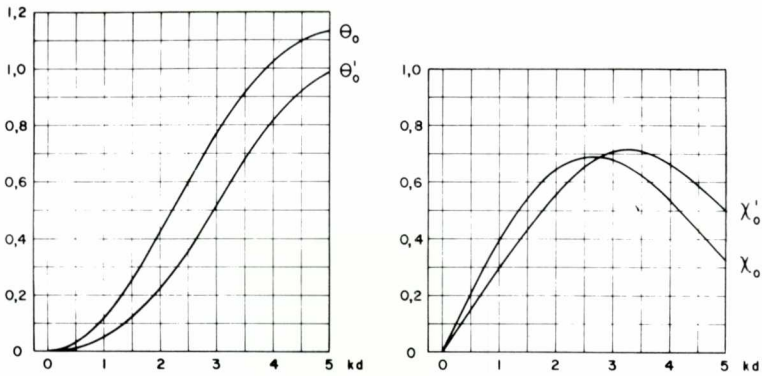


Fig. 3. Impedància acústica adimensional  $Z/\rho c$  a l'extrem obert d'un tub cilíndric en els casos de pla infinit ( $\theta_0 + j\chi_0$ ) i d'absència de pla ( $\theta'_0 + j\chi'_0$ ). a) Part real. b) Part imaginària.

A efectes del càlcul de la impedància acústica de l'instrument, per a les gammes de longituds d'ona i diàmetres que cal considerar en l'estudi de la tenora, ambdues formulacions condueixen a resultats les discrepàncies entre els quals són negligibles.

L'anomenada "correcció d'extrem", emprada en càlculs simplificats d'acústica de tubs i que és emprada en el model simplificat que exposem més endavant, prové d'aproximar la impedància acústica a l'extrem mitjançant el primer terme del seu desenvolupament en sèrie [9],

$$\theta = 0 \quad ; \quad \chi = \begin{cases} 4 kd/3\pi \approx 0,4 kd & \text{en el cas de pla infinit} \\ \approx 0,3 kd & \text{en el cas d'absència de pla} \end{cases}$$

## FORATS

En el procediment descrit, ha estat emprada una modelització simplificada de l'acoblament entre el tub principal i els forats en la qual hom eludeix la consideració de com s'acoblen les ones longitudinals de les xemeneies amb les del tub principal.

L'estudi de l'acoblament d'aquestes ones, que porta a considerar la intervenció de les ones radials i circumferencials, ha estat publicat recentment per Keefe [10], i condueix a modelitzar la contribució dels forats en la impedància acústica del tub principal mitjançant l'acoblament de termes d'impedància en sèrie i en paral·lel.

En el cas dels forats oberts hi ha un clar predomini del terme en paral·lel, i en el cas dels forats tancats hi ha un predomini del terme en sèrie. Aquests termes predominants són els únics que considerem en la modelització que ha estat descrita.

Una limitació comuna a totes les formulacions publicades és la no consideració del cabal estacionari que circula per l'interior del tub i dels forats. La influència d'aquest cabal en el comportament de l'instrument esdevé especialment acusada si es produeixen turbulències, en modificar aquestes les seccions efectives de l'instrument. Afavoreix la generació de turbulències la presència d'arestes vives en la unió de les xemeneies dels forats amb el tub principal; per aquesta raó, és pràctica estesa l'arrodoniment d'aquestes arestes d'unió.

## VALIDACIÓ DEL MODEL

La validesa de la modelització descrita ha estat comprovada per a tubs cilíndrics sense forats laterals, mitjançant la comparació amb resultats experimentals. La fig. 4 mostra el diagrama experimental del mòdul de la impedància acústica analògica d'un tub cilíndric de 1009 mm de longitud i 20 mm de diàmetre amb l'extrem obert. Al damunt d'aquest diagrama hi ha representats els valors dels pics de ressonància trobats per càlcul. Els valors trobats per càlcul i els experimentals de les 12 primeres freqüències de ressonància figuren a la taula I, i els valors de les corresponents alçàries dels pics de ressonància són a la taula II.

En el cas d'instruments amb forats laterals, la precisió obtinguda en el càlcul de les freqüències de ressonància és notable, com es fa palès a la fig. 5, on es mostren les desviacions calculades i experimentals (expressades en centèsimes de semitò) de les freqüències del primer pic de ressonància per a digitacions de les notes del primer registre d'una tenora.

TAULA I. Freqüències de ressonància. (Hz)

Pic	Calculat	Experimental
1	171,5	171,5
2	344,6	344,3
3	517,5	517,4
4	690,7	690,6
5	864,0	863,9
6	1037,2	1037,2
7	1210,6	1210,4
8	1384,1	1384,0
9	1557,4	1557,5
10	1731,1	1730,9
11	1904,4	1904,4
12	2078,0	2077,9

TAULA II. Mòdul de la impedància acústica analògica. ( $\times 10^6 \text{ Nsm}^{-5}$ )

Pic	Calculat	Experimental
1	31,2	30,2
2	21,7	21,3
3	17,4	17,4
4	15,0	15,1
5	13,3	13,5
6	11,9	12,4
7	11,0	11,4
8	10,2	10,6
9	9,6	10,0
10	9,0	9,6
11	8,6	9,1
12	8,2	8,7

## MODEL SIMPLIFICAT

La introducció de certes hipòtesis de simplificació condueix a un model que permet un tractament més analític. Això facilita l'estudi de la influència en les freqüències de ressonància de la columna d'aire de diversos aspectes geomètrics, com són el truncament del tub principal, la posició i mida dels forats, i la variació local del perfil del tub. En aquest model hom negligeix la radiació i l'esmoreïment intern.

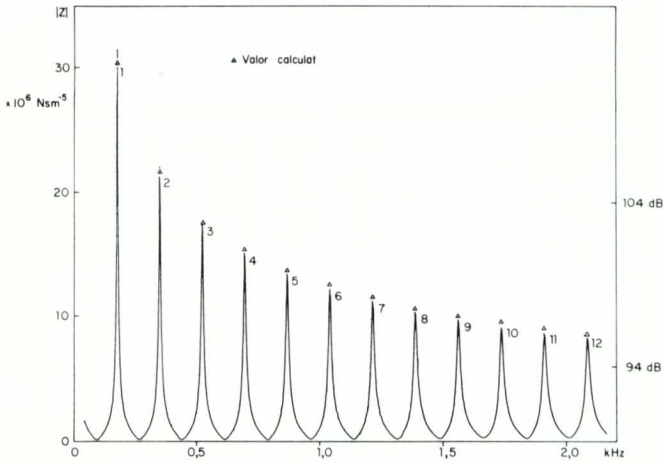


Fig. 4. Mòdul de la impedància acústica analògica d'un tub cilíndric de 1009 mm de longitud i 20 mm de diàmetre, amb l'extrem obert, trobat experimentalment.

#### *Estudi de l'instrument amb tots els forats tapats. Efecte del truncament*

L'instrument amb tots els forats tapats és representat, tal i com ho femiem a la Part I, per un tub cònic truncat amb l'extrem més petit tancat.

A l'extrem obert la part real de la impedància és nul·la en negligir-se la radiació, i la part imaginària és aproximada pel terme lineal que condueix a la correcció d'extrem  $\beta d_1$ , fig. 6, proporcional al diàmetre  $d_1$  de la secció. A la distància  $\beta d_1$  tub enfora hi ha l'anomenat "extrem acústic" del tub (part I). El comportament acústic del tub original és equivalent al del tub allargat fins a l'extrem acústic, considerant que a aquest correspon una impedància acústica nul·la. El valor  $\chi \approx 0,4 kd_1$  condueix a la correcció d'extrem  $0,4 d_1$ .

En introduir la condició d'extrem a l'expressió de la impedància acústica,

$$Z_1 = \left[ \frac{1}{j\rho c} \left( \operatorname{tg} \hat{\alpha}_1 + \frac{1}{k(r_t + l_{ac})} \right) \right]^{-1}$$

hom obté per a la impedància acústica a la secció E,

$$Z_E = \left[ \frac{1}{j\rho c} \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - k l_{ac} \right) + \frac{1}{k r_t} \right) \right]^{-1}$$



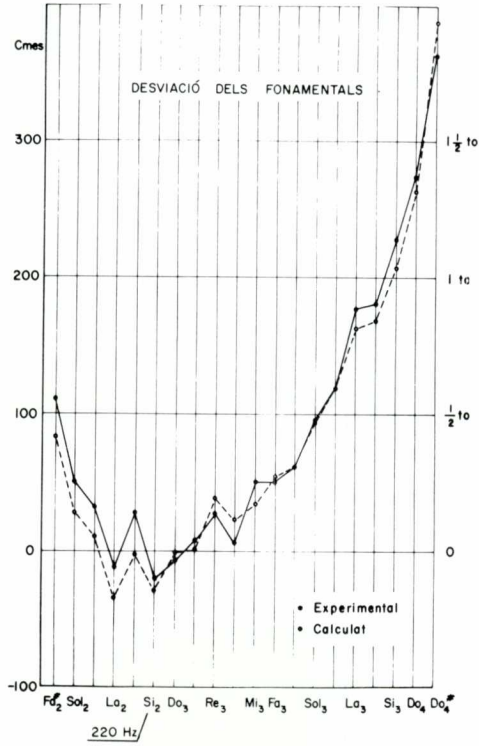


Fig. 5. Desviacions, calculades i experimentals, de les freqüències del primer pic de ressonància per a les digitacions de les notes del primer registre d'una tenora.

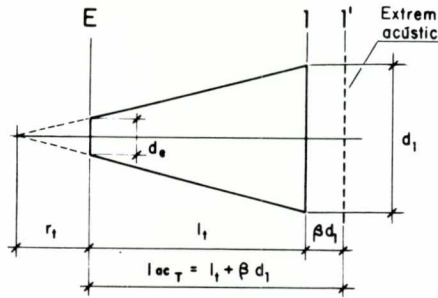


Fig. 6. Geometria del tub cònic truncat del model simplificat.

Les freqüències de ressonància corresponen als valors  $k_T^{(n)}$  de  $k$  per als quals aquesta expressió verifica la condició d'extrem a la secció E,  $Z_E^{-1} = 0$ , i, en conseqüència,

$$k_T^{(n)} l_{ac} + \text{arctg } k_T^{(n)} r_t - n \pi = 0 \quad ; \quad \text{amb } n = 1, 2, \dots$$

Si el truncament  $r_t/l_t$  és prou petit perquè el terme  $\text{arctg } k_T^{(n)} r_t$  pugui ésser aproximat per l'arc, les freqüències de ressonància

$$f_T^{(n)} = k_T^{(n)} \frac{c}{2\pi} = n \frac{c}{2(l_{ac} + r_t)} \quad ; \quad \text{amb } n = 1, 2, \dots$$

constitueixen una família harmònica completa de fonamental  $f_T^{(1)} = c/2(l_{ac} + r_t)$  igual al del tub cònic complet.

Si el truncament és molt gran, les freqüències de ressonància resulten

$$f_T^{(n)} = (2n - 1) \frac{c}{4l_{ac}}$$

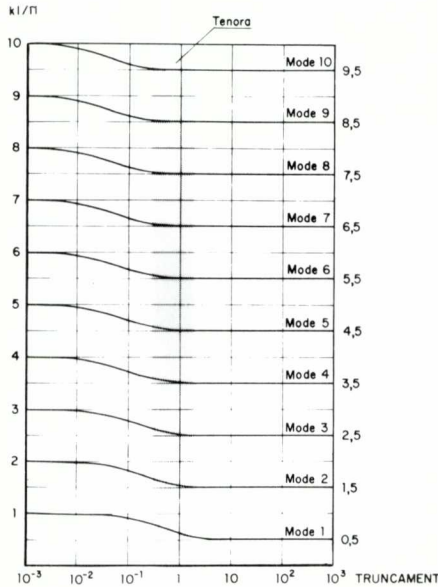


Fig. 7. Freqüències dels modes de ressonància d'un tub cònic com a funció del truncament.

i en aquest cas constitueixen els termes imparells d'una família harmònica de fonamental  $f_f^{(1)} = c/4 l_{ac}$ . Coincideixen amb les d'un tub cilíndric amb un extrem tancat i l'altre obert, de longitud acústica  $l_{ac}$ .

Per a truncaments intermedis el conjunt de freqüències de ressonància deixa de constituir una família harmònica, completa o de termes imparells. Les figs. 7 i 8 il·lustren la transició des de la família harmònica completa, per a truncaments petits, fins a la sèrie de termes imparells d'una família harmònica, per a truncaments molt grans. Els intervals entre les freqüències de ressonància són superiors als d'una família harmònica completa.

*Estudi de l'instrument amb forats oberts. Relació posició-mida dels forats.*

La introducció d'un forat obert, de diàmetre  $d_f$  i xemeneia d'alçària  $h_f$ , a la secció F del tub cònic considerat, modifica la impedància acústica a l'extrem tancat.

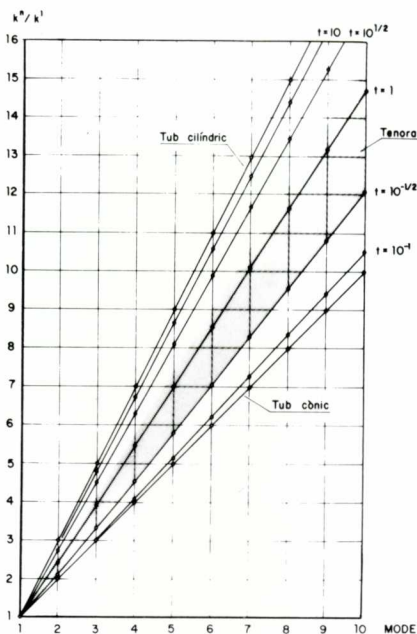


Fig. 8. Relació de les freqüències dels modes de ressonància d'un tub cònic com a funció del truncament.

La impedància acústica a la secció F pot ésser trobada per composició de les impedàncies  $Z_{ft}$  de la xemeneia del forat i  $Z_t$  del tram de tub principal que va des d'aquesta secció fins a l'extrem acústic,

$$Z_F = [Z_{ft}^{-1} + Z_t^{-1}]^{-1}$$

En el càlcul de la impedància  $Z_{ft}$  corresponent al forat cal considerar dues correccions d'extrem, la  $\beta d_f$  a l'extrem exterior i una correcció a l'extrem interior que depèn de la relació  $d_f/d_t$  de diàmetres del forat i del tub. Una aproximació acceptable per a la suma d'ambdues correccions és  $0,4 d_t$ . D'altra banda l'equilibri de cabals en aquesta secció porta a introduir el factor  $S_f/S_t$  de relació de seccions.

$$Z_{ft} = \left[ \frac{S_f}{S_t} \frac{1}{j\rho c} \cot kL_F \right]^{-1} \quad ; \quad L_F = h_{f+0,4d_t}$$

L'expressió de  $Z_t$  és

$$Z_t = \left[ \frac{1}{j\rho c} \left( \cot k(l_{acT} - l_f) + \frac{1}{k(r_t + l_f)} \right) \right]^{-1}$$

A partir de  $Z_F$  hom troba la impedància  $Z_E$  a l'extrem tancat,

$$Z_E = \left[ \frac{1}{j\rho c} \left( \operatorname{tg}(\alpha - kl_f) + \frac{1}{kr_t} \right) \right]^{-1}$$

$$\text{amb } \alpha = \operatorname{arctg} \left[ \cot k(l_{acT} - l_f) + \frac{S_f}{S_t} \cot kL_f \right]$$

Les freqüències de ressonància corresponen als valors  $k_F^{(n)}$  de  $k$  per als quals aquesta expressió verifica la condició d'extrem a la secció E,  $Z_E^{-1} = 0$ . Aquesta condició condueix a

$$\frac{S_f}{S_t} \cot k_F^{(n)} L_f + \cot k_F^{(n)} (L_{acT} - l_f) = \cot k_F^{(n)} (l_{acF} - l_f) \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

on ha estat introduïda la longitud  $l_{acF}$  corresponent a la longitud acústica del tub cònic escurçat de manera que la primera de les seves freqüències de ressonància coincideixi amb la primera del tub amb forat,

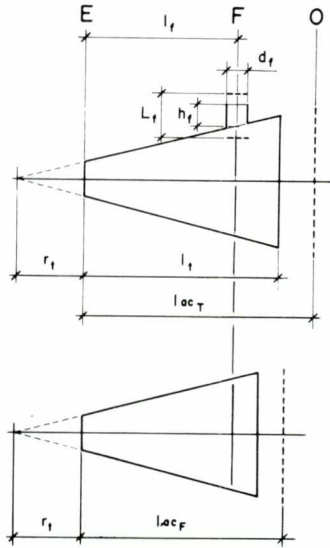


Fig. 9. Geometria del tub cònic amb un forat lateral obert, del model simplificat. Tub cònic equivalent.

$$l_{acF} = \frac{\pi}{k^{(1)}} - \frac{1}{k^{(1)}} \arctg k_F^{(1)} r_t$$

Aquest tub cònic escurçat és anomenat tub cònic equivalent al tub inicial amb forat quant a la primera freqüència de ressonància.

L'equació definidora dels valors de  $k_f^{(n)}$ , si fixem el valor de  $k_F^{(1)}$  i el valor de l'alçària corregida  $L_f$  dels forats, estableix la relació entre la posició  $l_f$  i la secció  $S_f$  dels forats que fa que la primera freqüència de ressonància passi a ésser  $f^{(1)} = c k_F^{(1)} / 2 \pi$ .

A la fig. 10 és representada la relació posició-diàmetre, per a un forat en un tub cònic complet de conicitat 0,025 i de gruix de paret de 6 mm. Sense el forat la longitud és tal que la primera freqüència de ressonància és 233,1 Hz –Do greu del primer registre de la tenora–. Amb el forat obert la primera freqüència de ressonància  $f^{(1)}$  passa a ésser  $f = 261,6$  Hz –Re del primer registre de la tenora– (corba 1).

A la fig. 10 són incloses també les relacions posició-diàmetre del forat amb les quals hom obtindria una segona freqüència de ressonància de valor  $f^{(2)} = 2 f$ , (corba 2), o bé una tercera freqüència de ressonància de valor  $f^{(3)} = 3 f$ , (corba 3).

La fig. 10 fa palès que si el forat és adequat per a la primera freqüència

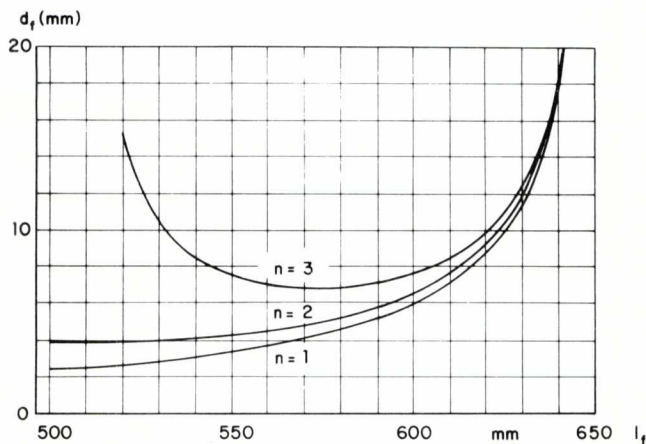


Fig. 10. Relació posició diàmetre d'un forat en un tub cònic complet de 6 mm de gruix, per tal d'obtenir  $f^{(1)} = f = 262,6$  Hz -Re greu del primer registre- (corba 1), o bé  $f^{(2)} = 2f$ , (corba 2), o bé  $f^{(3)} = 3f$ , (corba 3).

de ressonància, resultarà insuficient per a obtenir  $f^{(2)} = 2f$  i  $f^{(3)} = 3f$ , de manera que les freqüències de ressonància formaran una sèrie amb intervals inferiors als de la família harmònica.

Per a l'estudi dels altres forats hom procedeix d'una manera anàloga. Per a cada forat, el tub cònic de partida és el tub cònic truncat equivalent que té com a primera freqüència de ressonància la de la nota del primer registre que es produeix en tancar el forat.

L'estudi del segon registre pot ésser fet prenent com a tubs cònics de partida els tubs cònics truncats equivalents que tenen com a segona freqüència de ressonància la de la nota del segon registre que hom obté en tancar el forat.

#### *Modes de ressonància. Efecte de les correccions del perfil*

El comportament acústic de la columna d'aire pot ésser descrit com a superposició del comportament dels modes de ressonància (part 1).

Per a cada mode les fluctuacions temporals de pressió i de velocitat tenen una distribució al llarg del tub que presenta zones de màxima fluctuació i zones de mínima fluctuació, per bé que els màxims de fluctuació de pressió es troben allí on hi ha els mínims de fluctuació de velocitat, i viceversa.

Les expressions analítiques dels modes de pressió i de velocitat, per a

un tub cònic truncat i amb les hipòtesis adoptades en el model simplificat són [11],

$$p(r) = \frac{1}{r} C \sin k_T^{(n)} (l_{ac} + r_t - r)$$

$$v(r) = \frac{1}{c k_T^{(n)} \rho} C \left[ \frac{1}{r^2} \sin k_T^{(n)} (l_{ac} + r_t - r) + \frac{k_T^{(n)}}{r} \cos (l_{ac} + r_t - r) \right]$$

A la fig. 11 mostrem les distribucions de pressió i de velocitat corresponents als tres primers modes de ressonància d'un tub cònic truncat amb  $r_t = 200$  mm i  $l_t = 600$  mm, que correspon aproximadament al tub cònic equivalent per al Do greu del primer registre de la tenora.

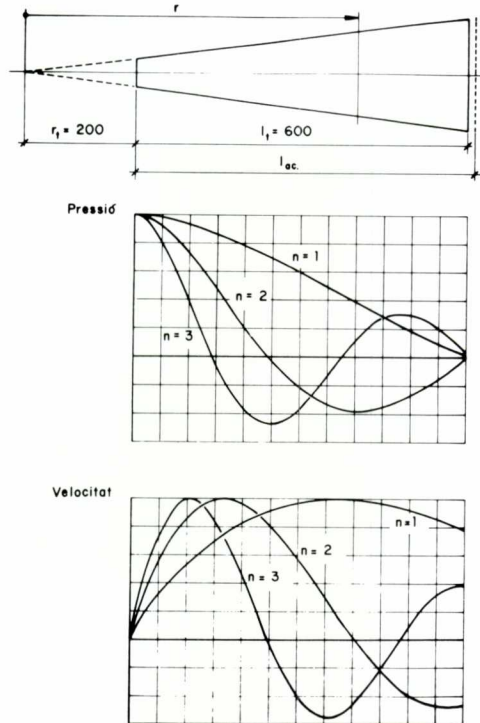


Fig. 11. Distribucions de pressió i de velocitat corresponents als tres primers modes de ressonància d'un tub cònic truncat.

Les freqüències de ressonància poden ésser ajustades per mitjà de correccions locals del perfil del tub. A les zones de màxima fluctuació de pressió, i per tant de mínima fluctuació de velocitat, l'aire intervé fonamentalment per la seva compressibilitat, de manera que un augment de secció, en augmentar el volum i per tant la flexibilitat, farà disminuir les freqüències de ressonància. A les zones de màxima fluctuació de velocitat, l'aire intervé fonamentalment per la seva inèrcia, de manera que un augment de secció, en disminuir la velocitat i per tant l'energia cinètica i la inèrcia efectiva, farà augmentar les freqüències de ressonància.

La variació unitària de la freqüència de ressonància en introduir una modificació puntual unitària localitzada a la secció del tub situada a una distància  $r$  del vèrtex del con, és donada per l'expressió [12]

$$W(r) = \frac{2k}{S[2kl_t - \sin 2kl_t]}$$

$$\left[ \left( \cos k(l_{ac} + r_t - r) + \frac{1}{kr} \sin k(l_{ac} + r_t - r) \right)^2 - \sin^2 k(l_{ac} + r_t - r) \right]$$

Per a una correcció  $\Delta S_T(r)$  del perfil, la variació de la freqüència de ressonància pot ésser calculada mitjançant l'expressió:

$$\frac{f'}{f} = 1 + \int_{r_t}^{l_t + r_t} W(r) S_T(r) dr$$

A la fig. 12 presentem la funció  $W(r)S(r)$  per als dos primers modes del tub cònic considerat en els càlculs dels modes de la fig. 11.

Les correccions de secció considerades fins ara corresponen a canvis suaus en el perfil i són els que es produeixen en les operacions de rascar i lacar interiorment que hom duu a terme quan ajusta un instrument.

En una pertorbació brusca del perfil, com pot ésser la provocada per un forat estret tapat o per l'espai entre dos cossos mal ajustats de l'instrument, la variació de la velocitat dels modes pot ésser menys acusada que no ha estat considerat; fins i tot, si tan estret és l'eixamplament de la secció, pot no afectar en absolut la velocitat de la columna d'aire i per tant l'energia cinètica. En aquest últim cas la variació de les freqüències de ressonància només provindria de la variació de la compressibilitat, i la variació unitària  $W'(r)$  seria [12]

$$W'(r) = \frac{-2k}{S(2kl_t - \sin 2kl_t)} \sin^2 k(l_{ac} + r_t - r)$$



A la fig. 12 hi ha també representades les corresponents funcions  $W'(r)$   $S(r)$ .

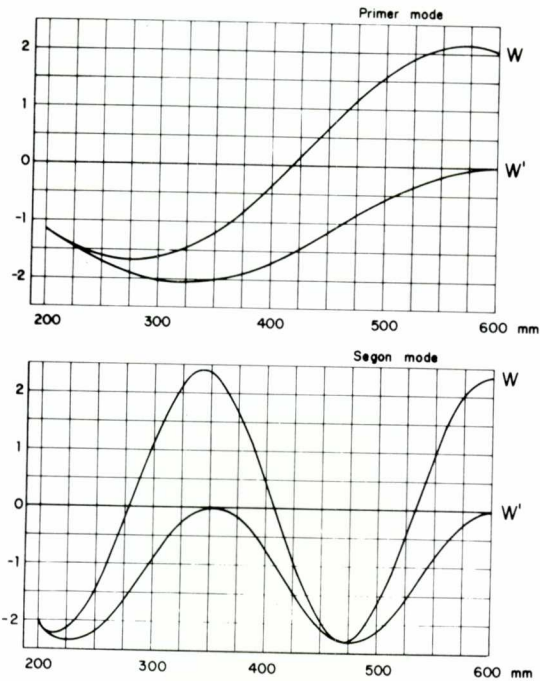


Fig. 12. Funcions  $W$  i  $W'$  per als dos primers modes de ressonància del tub cònic considerat en el càlcul des modes de la fig. 11.

#### INTRODUCCIÓ A LA MODELITZACIÓ EN EL CAMP TEMPORAL

Per a l'estudi del comportament de l'instrument complet és convenient de descriure el comportament acústic de la columna d'aire per mitjà de la seva resposta impulsional  $h(t)$  a la secció on s'acobra amb la canya.

La columna d'aire fa que la pressió  $p(t)$  i el cabal  $u(t)$  a l'interior de la canya estiguin relacionats per la integral de convolució,

$$p(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

D'altra banda el cabal depèn de la pressió i de l'obertura  $H + y(t)$  de la canya. L'expressió del cabal com a funció de la pressió i de l'obertura que ha tingut més difusió és la proposada per Backus [13],

$$u(t) = B [H + y(t)]^{4/3} [p(t) - P_o]^{2/3}$$

on  $H$  és l'obertura en absència de cabal i  $P_o$  és la pressió amb què hom bufa l'instrument.

La variació  $y(t)$  de l'obertura de la canya, si hom modelitza aquesta com a sistema d'un sol grau de llibertat, queda descrita per l'equació diferencial ordinària,

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} + g_r \frac{dy}{dt} + \omega_o^2 \mu y = P_o - p(t) + p_B(t)$$

on  $\mu$  és la massa per unitat de superfície de la canya en el model d'un grau de llibertat, i  $g_r$  és el coeficient d'esmoreïment, també per unitat de superfície.  $\omega_o$  és la freqüència de ressonància de la canya, en rad/s, i  $p_B(t)$  és la pressió de Bernoulli, la qual pot ésser expressada com a funció del cabal i de la geometria de la secció de pas de l'aire a la canya.

Per tal de millorar la convergència de la integral de convolució, han estat proposades [14] variants d'aquesta integral que empen respostes impulsional modificades.

La resposta impulsional pot ésser trobada com a transformada de Fourier inversa de la impedància acústica. Aquest recurs pot ésser emprat tant en la determinació analítica com en l'experimental.

Experimentalment pot ésser determinada d'una manera directa per mitjà de l'aplicació d'un impuls de cabal a la secció d'entrada de la columna d'aire. També pot ésser trobada com a funció de correlació encreuada entre la pressió i la velocitat a la secció d'entrada si hom excita la columna d'aire amb un cabal aleatori de densitat espectral constant (soroll blanc).

## CONCLUSIONS

La modelització proposada permet de trobar la impedància acústica de la columna d'aire de l'instrument, a partir de la geometria del tub i de les propietats físiques de l'aire, amb suficient precisió perquè pugui ésser emprada en el projecte de prototips d'instruments de la família de la tenora, i en l'estudi de correccions en instruments existents.

El model simplificat exposat presenta l'avantatge de poder ésser emprat amb recursos de càlcul més reduïts, i pot ésser útil en l'estudi de correccions

malgrat que és poc adequat per al projecte de prototips. A més presenta l'interès de posar fàcilment de manifest diversos trets generals de la influència de la geometria de l'instrument en el seu comportament, com ara:

- L'allargament dels intervals entre les freqüències de ressonància en augmentar el truncament.
- L'escurçament dels intervals entre les freqüències de ressonància amb l'enxiquiment que han d'experimentar els forats si són desplaçats vers la canya i hom desitja mantenir la primera freqüència de ressonància.
- La influència de les correccions del perfil del tub en les freqüències de ressonància.

La modelització de l'instrument complet, columna d'aire i canya, per a l'estudi del seu comportament, tant estacionari com transitori —en els atacs i extincions de les notes—, passa per la caracterització del comportament en el camp temporal i constitueix un problema encara no resolt per causa de la complexitat del funcionament de la canya.

#### AGRAÏMENTS

Els autors desitgen agrair a la resta dels membres de l'equip del Laboratori de Vibracions llur col·laboració en la posada a punt de programes de càlcul i de muntatges experimentals, particularment al professor Joan Badrinas per l'acurada adaptació del sistema de mesura de la impedància acústica als experiments emprats per a la validació del model.

Així mateix volem agrair a diversos instrumentistes i constructors les profitoses converses mantingudes i llur interès en les nostres recerques, el qual ha constituït un estímul permanent per a dur-la a terme. Molt especialment expressem el nostre agraïment a Jaume Vilà, actualment instrumentista de tenora de la Cobla Ciutat de Barcelona, per la seva continuada col·laboració.

## BIBLIOGRAFIA

1. AGULLÓ, J., CARDONA, i SAU, A. Introducció a l'acústica de la tenora. Part I. Butll. Soc. Cat. Cièn. Segona època: Vol. I/Núm. 4/Barcelona 1981. (pp. 233-253).
2. MORSE, P. M. "Vibration and Sound".- McGraw-Hill, 1948. (C. VI: "Plane waves of sound").
3. NEDERVEEN, C. J. "Acoustical Aspects of Woodwind Instruments". Tesis 1969, publicada per F. KNUF, Amsterdam 1969. (C. II).
4. NEDERVEEN, C. J. "Hole Calculations for an Oboe". ACUSTICA, Vol. 18, 1967 (pp. 47-57).
5. CARDONA, Contribució a l'estudi de l'acústica de la tenora. Tesi doctoral, Universitat Politècnica de Barcelona, 1980. (pp. 141-147).
6. NEDERVEEN, C. J. Ref. 4, apartat 35: "Closed side-holes" (pp. 54-56).
7. MORSE, P. M. Ref. 2, apartat 28: "Radiation from a piston in a plane wall" (pp. 326-346).
8. LEVINE, H., SCHWINGER, J. "On the Radiation of Sound from an Unflanged Circular Pipe". Physical Review, Vol. 73, N. 4, Feb. 1948 (pp. 383-406).
9. MORSE, P. M. Ref. 2, (pp. 246-247).
10. KEEFE, D. H. "Theory of the single woodwind tone hole". J. Acoust. Soc. Am. 72 (3). Sept. 1982. (pp. 676-687).
11. CARDONA, S. Ref. 5, Annex 1 (pp. 226-234).
12. CARDONA, S. Ref. 5, Apartat 8.6: Correcció del perfil (pp. 187-198).
13. BACKUS, J. "Small Vibration Theory of the Clarinet". J. Acoust. Soc. Am. 35, 1963. (pp. 305-313).
14. SCHUMACHER, R. T. "Ab Initio Calculation of the Oscillations of a Clarinet". ACUSTICA, Vol. 48, N, 2, 1981 (pp. 71-85).