EULER, SERIES Y ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES

per

JOAQUIN M. ORTEGA ARAMBURU

Professor de la Secció de Matemàtiques, Facultat de Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona

1. BREVE APUNTE BIOGRÁFICO

LEONHARD EULER nació el 15 de abril de 1807 en Basilea. Basilea poseía una de las pocas universidades de la época en que la enseñanza e investigación matemática tenía un amplio desarrollo. Ello fue debido al impulso de la familia de los BERNOULLI, un mínimo de ocho matemáticos en tres generaciones. El fundador de la dinastía, Nicolás, tuvo tres hijos: Jacobo, Juan y Nicolás I. Jacobo y Juan fueron corresponsales con LEIBNITZ y colaboradores del mismo. El padre de EULER, que era pastor calvinista, siguió las lecciones de Jacobo e inició en los conocimientos matemáticos a su hijo. Este intresó en la Universidad en 1720 con la idea de dedicarse a la teología siguiendo las directrices de su padre. Entró allí en conocimiento de JUAN BERNOULLI que había sustituido a Jacobo, a su muerte, en la cátedra de Matemáticas de la Universidad de Basilea. JUAN BERNOULLI supo ver las aptitudes de EULER y lo acogió como discípulo llegándose a dar periódicamente clases particulares. EULER se graduó a los 17 años y empezó sus publicaciones a los 18. JUAN BERNOULLI tuvo tres hijos, de los cuales, dos de ellos, NICOLAS II y DANIEL fueron matemáticos y amigos de EULER. Ambos fueron a la Academia de S. Petesburgo en 1725, Academia que junto a la de Berlín y París eran los centros científicos de mayor prestigio del continente.

Los hermanos BERNOULLI consiguieron para EULER un puesto de miembro agregado en la Academia de S. Petesburgo y en 1727 parte de Basilea. En el momento en que llega a Rusia la muerte de CATALINA I hace que, bajo el reinado de PEDRO II, se pierda el interés en la academia, y EULER se encuentra falto de recursos; en esta época está a punto de aceptar, algunos historiadores dicen que aceptó, un puesto de teniente en la marina real. En cualquier caso, en 1730 con la subida al trono de ANA I la vida académica vuelve a la normalidad y EULER pasa a profesor de ciencias naturales en la misma y en 1933 sucede a DANIEL en el puesto de miembro de la Academia, lo que le permitirá dedicarse plenamente al quehacer científico. Allí permanencerá hasta 1741 en que fue invitado por FEDERICO EL GRANDE de Prusia a la Academia de Berlín. Estuvo en dicho centro hasta 1766 en que regresó nuevamente a S. Petesburgo.

La vida de EULER no estuvo libre de tragedias. Una infección le hizo perder un ojo en 1735 y una catarata desarrollada en el segundo le dejó ciego al poco de su regreso a Rusia. En esta situación permaneció durante 17 años hasta que en 1783 como dijo CONDORCET *"Euler dejó de vivir y calcular"*.

EULER recogió a través de JUAN BERNOULLI la creación matemática de LEIBNIZ. El momento matemático era excelente para la eclosión de una personalidad como la de EULER. La creación del cálculo diferencial e integral en el siglo XVII por NEWTONy LEIBNIZ, la de la geometría analítica en 1637 por DESCARTES, los nuevos conocimientos físicos como la ley de la gravitación universal de NEWTON, las necesidades de la navegación y de todo el desarrollo científico y social en general dejan el terreno preparado para la creación de las nuevas teorías del Análisis. EULER va a recoger esta herencia, va a disponer de una situación personal que le permite dedicarse a la investigación matemática y física y, dotado de una energía y dotes absolutamente excepcionales, va a situarse en la primera línea de los matemáticos de todos los tiempos. Su producción matemática es enorme. Sus obras completas ocupan del orden de 73 volúmenes. Toda la Matemática está impregnada de sus trabajos. Sus campos de interés fueron el cálculo en general, series, cálculo de variaciones, ecuaciones diferenciales, geometría diferencial y teoría de números así como aplicaciones de sus teorías a prácticamente todos los dominios de la física.

En esta conferencia vamos simplemente a tratar de aproximarnos a un pequeño fragmento de su obra sobre las series y sobre algún problema de interpolación; más explícitamente daremos un breve resumen sobre sus trabajos sobre la serie de WALLIS, las series que dieron origen a la función ζ y, por último algo sobre la función Γ y las series trigonométricas.

2. SOBRE LA SITUACIÓN DEL CÁLCULO EN EL SIGLO XVIII

Para situarnos mejor damos un breve apunte sobre la situación del Cálculo en la primera mitad del siglo XVIII. La desgraciada controversia sobre la prioridad en la formulación del Cálculo entre NEWTON y LEIBNIZ dejó, aunque sólo parcialmente, aislados a los matemáticos ingleses de los continentales. En Inglaterra la preocupación por los fundamentos del Cálculo se acentuará y se asiste a debates sobre los mismos interviniendo entre otros BERKELEY(1685-1753), JURIN (1684-1750), ROBINS (1705-51), BROOK TAYLOR (1685-1731) y SIMPSON (1710-61). Especialmente aguda es la crítica de BERKELEY que aduce que los matemáticos estaban procediendo más inductiva que deductivamente y que no daban razones que justificasen los diversos pasos. Critica tanto las fluxiones de NEWTON como los diferenciales de LEIBNIZ. El cociente de dos diferenciales determinará la secante y no la tangente, dirá, y si se pretende evitar el error suprimiendo las diferenciales de orden superior quizá la acumulación de dos errores conduzca a la verdad, pero difícilmente podrá ser esto ciencia.

La Matemática Continental no centrará sus preocupaciones básicas en los fundamentos. No obstante EULER organizará y sistematizará el nuevo cálculo haciendo del concepto de función un punto central, desgajando al Análisis de diagramas y concepciones geométrica en las que había estado inmerso hasta el momento. Su concepción sobre los fundamentos del Cálculo adolecen, como la de todos sus contemporáneos, de falta de claridad; así, al afirmar que un número menor que cualquier cantidad debe ser necesariamente cero seguirá que las diferenciales dx y dy serán simplemente cero; sin embargo aceptará que estas cantidades que son cero tienen razones que son números finitos. La derivada será la forma conveniente de determinar este 0/0. Aceptará el ∞ como número, pero aceptará distintos órdenes de infinitud y de infinitesimos al encontrar diferenciales de orden superior. Las pruebas no pueden en muchos casos ser admitidas con el concepto actual del rigor. Hay que hacer notar no obstante como, muchas de ellas, criticadas durante muchos años en que los argumentos ε, δ prevalecían y aun hoy lo siguen haciendo, pueden hacerse rigurosas en el contexto del Análisis no-standard introduciendo en 1960 por ABRAHAM ROBINSON y cuyas implicaciones en el Análisis del futuro están aún por determinar. Es sugestivo el verificar como, cuando se quieren dar ejemplos de aplicaciones de dicha teoría se acude, con frecuencia, a las demostraciones de EULER tachadas como "no rigurosas" durante mucho tiempo.

Vamos a pasar a decir algo sobre el estudio de las series a principios del siglo XVIII. El uso de las series en esta época es muy grande, se utilizan series para derivación e integración de funciones, paara obtener longitudes, para explicitar funciones, para cálculo de números particulares, etc...

El manejo de las sewries era en gran parte formal. No obstante los problemas que presentaba su uso no podían ser ignorados. Quizá el ejemplo más simple es la controversia sobre la serie

$$1 - 1 + 1 - + 1 \ldots$$

JACOBO BERNOUILLI (1896. Opera 2.745-64) escribe:

$$\frac{r}{m+n} = \frac{r}{m}\left(1+\frac{n}{m}\right)^{-1} = \frac{r}{m} - \frac{rn^2}{m^2} + \frac{rn^2}{m^3} - \ldots$$

que al hacer r = m = n = 1 obtiene como suma 1/2. GUIDO GRANDI en su libro *Quadratura Circuli et Hyperbolæ* (1703) obtenía el mismo resultado dando a x el valor 1 en la expresión:

$$\frac{1}{1+x} = -x + x^2 - x^3 + \ldots$$

pero, por otra parte, piensa que su suma debía ser cero al ser agrupada $(1-1)+(1-1)+\ldots$, por lo que no encuentra explicación y sugiere a LEIBNIZ que esta situación podría ser comparable al de los misterios de la religión sobre la creación del mundo en que una fuerza absolutamente infinita crea algo de la nada absoluta.

LEIBNIZ en una carta a WOLF publicada en Acta Euroditorum 5 (1713) está de acuerdo con el resultado de GRANDI pero utiliza un argumento de tipo probabilístico: las sumas parciales de la serie dan 1, 0, 1, 0, 1, . . . ; entonces 0 ó 1 son igualmente probables y debe tomarse la media aritmética de ambos como valor más probable de la suma. Sin embargo cuando WOLF aplica los mismos argumentos para concluir que, por ejemplo:

$$1-2+4-8+16-\ldots=\frac{1}{3}$$

LEIBNIZ, dice que las series que tienen suma tienen términos decrecientes y que la de partida es al menos límite de series que verifican esta condición. EULER coincidirá con un argumento análogo al de GRANDI para obtener como suma 1/2.

Con EULER el estudio de las series adquiere caracteres de verdadero malabarismo aunque ya hemos dicho que su pensamiento no está libre del confusionismo de la época. Para EULER el valor de una serie *es el valor de la expresión algebraica de la cual proviene* y en otro momento afirma *cuando una serie infinita se obtiene como el desarrollo de una expresión, puede ser usada en las operaciones matemáticas como equivalente a esta expresión, incluso para los valores en que la serie diverge.*

Su fe en el Cálculo es tan grande que para todo se podrá dar una explicación. Asi el desarrollo:

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$$

para $x=-1$ da $\infty=1+2+3+4+5+\ldots$; pero si en

El segundo método consiste en definir una sucesión cuyo término cero es formalmente la serie de WALLIS y computarlo numéricamente. Precisando más, considera la sucesión:

$$P_1 = 1,\ P_2 = 2,\ \ldots,\ P_{n+1} = n\,P_n + 1$$

Del hecho de que $\Delta^i P_1 = i!$ la fórmula de interpolación de NEWTON:

$$a_{m+k} = (1+\Delta)^k a_m = a_m + k\,\Delta\,a_m + \frac{k(k-1)}{2}\,\Delta^2 a_m + \ldots$$

da $$P_n = 1 + (n-1) + (n-1)(n-2) + \ldots$$

que para $n = 0$ da formalmente la serie buscada.

Ahora bien, para evaluar P_o, EULER aplica la fórmula de interpolación a la sucesión

$$a_n = \frac{1}{P_n} \text{ y } \quad \text{a} \quad a_n = \log_{10} P_n.$$

En el primer caso encuentra $P_0 = 0{,}60542\ldots$ que corrobora con el valor a partir de la segunda $P_0 = 0{,}5996\ldots$

En el tercer método observa que la serie

$$S(x) = x - 1\,x^2 + 2\,x^3 - 6\,x^4 + 24\,x^5 \ldots$$

cuya evaluación en $x = 1$ es la de WALLIS verifica formalmente la ecuación diferencial

$$s' + \frac{s}{x^2} = \frac{1}{x}$$

La solución de dicha ecuación que se anula para $x = 0$ es:

$$s(x) = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t}\,dt$$

que, mediante el cambio de variables

$$v = e^{1-\frac{1}{t}}$$

transforma en

$$s(x) = e^{\frac{1}{x}-1} \int_0^{1-\frac{1}{x}} \frac{dv}{1-\log v}.$$

y sustituyendo

$$s = \frac{1}{t} - \frac{1}{x}$$

obtiene:

$$s(1) = e \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt = \int_0^1 \frac{dv}{1-\log v}$$

Computa los valores aproximados de las integrales por el método trapezoidal tomando diez subintervalos y obtiene 0,59637255 para la primera y 0,58734359 para la segunda. Todavía en una carta a BERNOULLI computará la segunda integral desarrollando el integrando en serie de potencias e integrando término a término.

El cuarto método consiste en desarrollar en *fracciones contínuas la serie de potencias*

$$u(x) = \frac{s(x)}{x} = 1 - x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 \ldots$$

en la forma $1/(1 + B)$ con

$$B = \frac{x - 2x^2 + 6x^3 - \ldots}{1 - x + 2x^2 - 6x^3 + \ldots};$$

$$B = x/(1+C) \text{ con } C = \frac{x - 4x^2 + 18x^3 - \ldots}{1 - 2x + 6x^2 - \ldots},$$

etc. EULER encontrará

$$u(x) = 1/1 + x/1 + x/1 + x/1 + 2x/1 + 2x/1 + 3x/1 + 3x/1 + \ldots$$

Si damos a x el valor 1 y calculamos la fracción continua parándonos en uno u otro término obtenemos diversas aproximaciones, pero EULER lo evalúa así:

$$A = 1/1 + 1/1 + 1/1 + 2/1 + 2/1 + \ldots + /1 + 10/1 + 10/1 + p$$

donde

$$p = 11/1 + 11/1 + 12 + \ldots + /1 + 15/1 + 15/1 + q$$

$$q = 16/1 + 16/ + \ldots + /1 + 20/1 + 20/1 + r, \text{ etc.}$$

de donde determinado r podrá calcular p, q y A. En cuanto a r verificará aproximadamente la ecuación $r = 21/1 + r$ que se cumple para $r = 4{,}10977\ldots$

Todavía EULER encontrará otra expresión para r. Puesto que:

$$r = 21/1 + 21/1 + s = \frac{21 + 21s}{22 + s}$$

y $s = 22/1 + 22/ + t$, supone que r, s y t están en progresión aritmética con lo que:

$$2s^3 + 2s^2 - 43s - 22 = 0$$

que, por el método de aproximación de raices de NEWTON le dará $s = 4{,}323$ que dará lugar a $r = 4{,}31$ y

$$A = 0{,}5963473621372.$$

!La coincidencia entre los valores encontrados era formidable! El dominio y la ingeniosidad en la manipulación de las series es patente en estos resultados; no obstante un interés matemático superior reside en los trabajos sobre lo que se ha llamado la función ζ de RIEMANN.

4. EULER Y LA FUNCIÓN ζ

La notación

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

corresponde a RIEMANN pero los trabajos de EULER tienen más de 100 años de antelación.

La divergencia de la serie

$$\Sigma \frac{1}{n}$$

era conocida tras los trabajos de NICHOLAS DE ORESME (1323-1382) mientras que el problema de encontrar la suma de la serie

$$\sum_{\nu \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

había sido propuesta por MENGOLI (1650) y tratado entre otros por WALLIS, que la computaba con tres cifras decimales, por JUAN BERNOULLI, LEIBNIZ, GOLDBACH Y DANIEL BERNOULLI. EULER empieza su contribución en 1731 con un método para el cómputo de ζ (2) aparecido en su artículo *De summatione innumerabilium progressionum*.

Pueto que

$$\frac{\log(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n},$$

se sigue

$$-\int(2)=\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx$$

y haciendo 1 – x = se obtiene:

$$-\zeta(2)=\int_0^x \frac{\log t}{1-t}\,dt+\int_x^1 \frac{\log t}{1-t}\,dt$$

Mediante integración por partes, desarrollo en serie, integrando término a término y dando a x el valor 1/2 concluye que:

$$\zeta(2)=(\log 2)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2}$$

Esta última serie converge mucho más rápidamente que la de partida lo que le permite calcular ζ (2) = 1,644934 (STIRLING había calculado el año anterior ζ (2) con 8 cifras correctas).

En varios artículos que aparecieron entre 1732 y 1736 dió otros métodos de cálculo de ζ (2) y de ζ (3) calculando el primero con 20 cifras decimales. El primer gran triunfo de Euler en este campo fue en 1734 en que comunica su resultado a DANIEL BERNOULLI, carta de la que sólo se conoce la contestación: *El teorema sobre la suma de las series*

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{p^2}{6}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{p^4}{90}$$

es muy notable..." (la notación p en lugar de π es utilizada por EULER hasta 1739). Una demostración aparece en "*De summis serierum reciprocarum*". Considera la función:

$$f(x) = 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \alpha} = 1 - \frac{x}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{x^3}{3!\operatorname{sen} \alpha} - \dots$$

Maneja ahora f (x) como un polinomio de grado infinito y conociendo las raíces de f (x)

$$x = \begin{cases} 2n\pi + \alpha \\ 2n\pi + \pi - \alpha. \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

escribe la descomposición

$$f(x) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{2n\pi + \alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{2n\pi + \pi - \alpha}\right).$$

Si desarrollamos ahora estos productos aparecen como unas "infinitas funciones elementales simétricas"

$$\sigma_m = \sum_{i_1, \dots, i_m}^{\infty} a_{i_1} \dots a_{i_m}$$

y si

$$S_m = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^m ,$$

EULER deriva fórmulas análogas a las de NEWTON $S_1 = \sigma_1$, $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, ... , e igualando coeficientes obtiene:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\alpha} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)\pi - \alpha} - \frac{1}{(2n-1)\pi + \alpha} + \frac{1}{2n\pi + \alpha} - \frac{1}{2n\pi - \alpha} \right)$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\alpha^2} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{((2n-1)\pi-\alpha)^2} + \frac{1}{((2n-1)\pi+\alpha)^2} + \frac{1}{(2n\pi+\alpha)^2} + \frac{1}{(2n\pi-\alpha)^2}\right)$$

En esta segunda relación al hacer

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

se obtiene:

$$\frac{8}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) = 1$$

pero puesto que:

$$\zeta(2) = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) + \frac{1}{4}\zeta(2)$$

dará a EULER

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Análogos argumentos le darán el valor ζ (4) y de ζ en algunos otros valores.

DANIEL BERNOULLI objetaría que no era evidente que todas las raices de sen x = sen α fuesen reales y que no se podía operar con series infinitas como si fuesen polinomios. Esta última observación no sería admitida por EULER e insistiría en que "su método está tan bien fundado como cualquier otro". De hecho se iniciaba la teoría de los productos infinitos que tanta trascendencia posterior tendría. Posteriormente daría otras pruebas, quizá tras la objeción de DANIEL, del cálculo de ζ (2) así como resultados parciales para el cálculo de ζ en los enteros impares.

Estableció también que

$$\sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{1}{\upsilon^{2n}} = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n)!} B_{2n}$$

donde B_{2n} eran los números de BERNOULLI, definidos como los coeficientes del desarrollo de

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \frac{t^i}{i!}.$$

En 1749 en un artículo titulado *Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que reciproques* considera

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$$

que verifica $\phi(s)\,(1 - 2^{1-s})\,\zeta(s)$ y haciendo uso del desarrollo de

$$\frac{1}{1-x}$$

en serie de potencias, aplicando reiteradas veces el operador

$$x\frac{d}{dx}$$

y teniendo en cuenta lo que se llama habitualmente el método de sumación parcial de ABEL (75 años de antelación) obtiene:

$$\frac{\phi(1-n)}{\phi(n)} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}(2^n-1)(n-1)!}{(2^{n-1}-1)\,\pi^n} & \text{si n es par} \\ 0 & \text{si n es impar} \end{cases}$$

para n = 2, 3, . . . , 10 y por otra parte si n = 1 verifica que:

$$\frac{1-1+1-1+\dots}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots}=\frac{1}{2\ \ln 2}$$

y hace la observación de que la conexión entre las dos relaciones es "enteramente oculta".

La primera relación la escribe como

$$\frac{\phi(1-n)}{\phi(n)}=\frac{-(n-1)!\,(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\,\pi^n}\cos\frac{\pi n}{2}$$

y, aquí aparece la maravillosa intuición de EULER conjetura que la igualdad

$$\frac{\phi(1-s)}{\phi(s)}=\frac{-\Gamma(s)\,(2^s-1)}{(2^{s-1}-1)\,\pi^\sigma}\cos\frac{\pi s}{2}$$

es válida para todo s. EULER observa que el límite del miembro de la derecha es

$$\frac{1}{2\ \ln\ 2}$$

cuando s tiende a 1 y afirma "La validez de nuestra conjetura para s = 1 (caso que aparece desviado de los otros) es ya una fuerte justificación de la verdad de nuestra conjetura ya que parece poco probable que una hipótesis falsa pudiera verificarse en este caso. Podemos entonces considerar nuestra conjetura sólidamente basada, pero nosotros daremos otras justificaciones igualmente convincentes". Y comprueba la fórmula para

$$s=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$$

y en general para

$$s = \frac{2k + 1}{2}.$$

La relación en términos de ζ es:

$$\zeta(1-s) = \pi^{-s} 2^{1-s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s)$$

que es la célebre ecuación funcional que sería probada por RIEMANN, para ζ adecuadamente extendida, en 1859, 110 años más tarde.

5. EULER Y LA FUNCION Γ

En la conjetura sobre la ecuación funcional aparece la función Γ. Esto nos da pie a comentar los trabajos de EULER sobre esta función. Esta aparece como solución a un problema de interpolación, en este caso construir una función que sobre los números naturales tomase el valor n! Debe observarse a comienzos del siglo XVIII una función es sinónimo de una fórmula en que aparezcan sumas, multiplicaciones, cocientes, potencias, raíces, exponenciales, logaritmos, diferenciaación, integración y series infinitas, es decir, lo que fue llamado una expresión analítica. El problema fue tratado por GOLDBACH, STIRLING y DANIEL BERNOULLI entre otros. Fue planteado a EULER y este anunció su solución a GOLDBACH en cartas1729 y 1730.

Trabajando EULER con productos infinitos observó que formalmente.

$$n! = \left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right] \ldots$$

y, por otra parte, si daba a n el valor 1/2, con alguna transformación, se obtiene el producto infinito de WALLIS:

$$\left(\frac{2.2}{1.3}\right)\left(\frac{4.4}{3.5}\right)\left(\frac{6.6}{5.7}\right)\ldots=\frac{\pi}{2}$$

expresiones enteras mientras que para otros $\pi/2$; esto hacía alusión a círculos y cuadraturas. EULER había manejado integrales que cumplían este fenómeno. Parecía natural pensar en una expresión integral para n!

Desarrollando $(1-x)^n$ se encuentra:

$$\int^1 x^e (1-x)^n \, dx = \frac{1.2\ldots n}{(e+1)(e+2)\ldots(e+n+1)}$$

Sustituyendo e por f/g y, siguiendo notaciones originales:

$$\frac{1\ldots n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+ng)} = \frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \quad \int x^{f/g\,(1-x)^n} dx$$

Haciendo f = 1, g = 0 en el miembro de la izquierda se obtiene n!; EULER debía entonces determinar lo que el escribirá:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{0}} dx\,(1-x)^n}{0^{n+1}}$$

Sustituye entonces

$$x^{\frac{g}{f+g}}$$

en lugar de x y obtiene:

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int \frac{g}{f+g}\, dx \left(1-x^{\frac{g}{f+g}}\right)^n$$

lo que le lleva a la indeterminación:

$$\int dx \, \frac{(1-x^0)^n}{0^n}$$

Considera entonces la expresión

$$\frac{1-x^z}{z}$$

para z nulo y por una regla conocida (refiriéndose a la que conocemos hoy como regla de l'Hôpital) obtiene:

$$\frac{-x^z \, dz \cdot \ln x}{dz}$$

que para $z = 0$ le dará $-\ln x$. Escribe entonces

$$\frac{1-x^o}{0} = -\ln x \quad y \quad \frac{(1-x^o)}{0^n} = (-\ln x)^n$$

y con ello concluye que

$$n! = \int^1 (-\ln x)^n \, dx$$

Esta integral tiene sentido para n no entero y es la llamada segunda integral eulerina y que LEGENDRE llamó función $\Gamma(n+1)$. Mas tarde, EULER, en 1781, haciendo el cambio $t = -\ln x$ obtendría la expresión habitual:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx$$

La relación con la función $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}\, dx$, a la que LEGENDRE llamaría primera integral euleriana,

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\ \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

sería también encontrada por EULER.

6. SERIES TRIGONOMÉTRICAS

Veamos por último un apunte sobre los trabajos de EULER sobre las series trigonométricas. En 1729 trata el problema de la interpolación de una función tal que $f(n) = 1$, problema que con naturalidad aparecía en astronomía. Si la función es $y = f(x)$ por la fórmula de TAYLOR:

$$f(x+1) = y + y' + \frac{1}{2} y'' + \dots$$

Puesto que $f(x+1) = f(x)$, al menos para x enteros, la función debía satisfcer la ecuación diferencial de orden infinito:

$$y' + \frac{1}{2} y'' + \frac{1}{6} y''' + \dots = 0$$

Aplica ahora EULER los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales de orden finito que el mismo había publicado, es decir, resuelve la ecuación:

$$z + \frac{1}{2} z^2 + \dots = e^z - 1 = 0.$$

Para ello resolverá en primer lugar

$$\left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = 1$$

que tiene el factor lineal z y los factores cuadráticos

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^2 - 2\left(1+\frac{z}{n}\right)\cos\frac{2k\pi}{n} + 1, \quad k < \frac{n}{2}$$

equivalentes a

$$1+\frac{z}{n}+\frac{z^2}{4n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{n}}$$

y, reemplazando

$$\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n} \text{ por } \frac{k\pi}{n}$$

y, puesto que para $n = \infty$ el término

$$\frac{z}{n} \text{ es } 0$$

se obtienen las soluciones $\pm i\, 2\, k\, \pi$ a las que corresponde la integral $\alpha_k \operatorname{sen} 2\,k\,\pi\,x + A_k \cos 2\,k\,\pi\,x$.

Como $f(0) = 1$ Euler obtiene

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \{\alpha_k \operatorname{sen} 2\,k\,\pi\,x + A_k(\cos 2\,k\,\pi\,x - 1)\}$$

con los coeficientes α_k y A_k ligados para que $f(n) = 1$ para cada n. En el mismo artículo demuestra que la solución general de la ecuación $f(x) = f(x-1) + X(x)$ es:

$$f(x) = \int_0^x X(\xi)\, d\xi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\,n\,\pi\,x \int_0^x X(\xi) \cos 2\,n\,\pi\,\xi\, d\xi +$$

$$P\,2\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} 2\,n\,\pi x \int_0^x X(\xi) \operatorname{sen} 2\,n\,\pi\,\xi\, d\,\xi$$

es decir, aparece en 1750 lo que ahora llamamos un desarrollo en serie de FOURIER (1768-1830).

Otros procedimientos completamente distintos son utilizados para obtener desarrollos en serie trigonométricos. Así, en 1977 obtiene los coeficientes de la serie trigonométrica utilizando argumentos de ortogonalidad de las funciones trigonométricas como los que usamos hoy.

Aunque hayamos dado una visión forzosamente superficial sobre los métodos de trabajo de EULER con las series, en cualquier caso hemos intentado aproximarnos lo suficiente para admirar y aprender algo, una vez más, de la personalidad de ese calculista por excelencia, manipulador de series extraordinario, gran creador de algoritmos de calculo, de intuición formidable que fue LEONHARD EULER.

BIBLIOGRAFIA

AYOUB, R.– *Euler and the Zeta Function.* Amer Math. Monthly 1974. 1067-1086.

EDUWARDS, Jr. C. H.– *The Historical Development of the Calculus.* Springer 1979.

DAVIS PHILIP,*Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Funcion"* Amer. Math. Monthly 66, 1959. 849-869.

EULER, L.– *Opera Omnia. B. G.* Teubner and Orell Füssly. 1911 en adelante.

KLINE MORRIS.- *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford U.P. 1972.