

SOBRE UNA FAMÍLIA D'APLICACIONS QUE PRESERVEN L'ÀREA

per

ARMENGOL GASULL I EMBID

Secció de Matemàtiques, Facultat de Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona

SUMMARY

We study the dynamic of the family of maps of \mathbb{R}^2 given by $T_{a,b}(x,y) = (a(x\cos r^b + y\sin r^b), a^{-1}(y\cos r^b - x\sin r^b))$, where $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ and a and b are real positive parameters. These maps are symmetric with respect to the origin and S_a -reversible, where $S_a(x,y) = (ay, x/a)$. These symmetries play a main role in our study. Also, we are interested in how the invariant curves given by the KAM's Theorem disappear. For that we try to relate this fact with the existence of a particular family of orbits (the increasing orbits) that go to infinity. Finally we make numerical estimations of the last invariant curve when $b = 3$.

1. INTRODUCCIÓ

En aquest treball estudiarem els iterats de la família d'aplicacions de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , $T_{a,b}$ donada per

$$T_{a,b}(x,y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos r^b & \sin r^b \\ -\sin r^b & \cos r^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

on $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ i a i b són paràmetres reals positius.

*Aquest treball és un resum de la Memòria presentada per a optar al grau de Llicenciatura de Matemàtiques dirigida pel Dr. Jaume Llibre.

Aquesta aplicació ja ha estat estudiada per Easton [E], per tal com és un model simple d'aplicació twist pertorbat.

A la proposició 5 veiem que podem estudiar només el cas $a < 1$, ja que $a > 1$ pot ésser reduït fàcilment a aquest.

A la secció 2 donarem els teoremes més importants que utilitzarem a tot el treball, en particular en el teorema 2.3, la millor versió actual del teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser-Rüssman [R] per a aplicacions twist pertorbat de classe C^p , amb $p > 3$.

A la secció 3 ens ocuparem d'aplicacions T tals que $T(-x) = -T(x)$. Per a aquestes aplicacions les corbes invariants per a T^n i les varietats invariants de l'origen tenen simetries (lema 3.5, proposició 3.6). Per a twist pertorbats d'aquest tipus hom millora el teorema de Poincaré-Birkhoff (proposició 3.7).

Utilitzant [D] i [De] estudiem a la secció 4 sistemes dinàmics donats per aplicacions T , S -reversibles. Per a aquestes aplicacions un cert conjunt de punts n -periòdics (els punts n -periòdics simètrics) és determinat per les imatges d'uns pocs conjunts. A la proposició 4.5 i al corol·lari 4.7 hom obte resultats sobre simetries de corbes invariants per a T^m i sobre l'existència de punts homoclínic i heteroclínic.

La secció 5 és dedicada a veure que $T_{a,b}$ defineix efectivament un sistema dinàmic discret diferenciable, que és un twist per $a = 1$ i un twist pertorbat per $a \neq 1$. Hom aplicarà també els resultats de les seccions 3 i 4, ja que $T_{a,b}$ compleix les hipòtesis adients; aquests resultats són recollits a la proposició 5. Aplicarem també a $T_{a,b}$ els teoremes KAM i de Poincaré-Birkhoff.

A la secció 6 trobarem tots els punts fixos de $T_{a,b}$ i els classifiquem. També estudiarem el naixement dels punts 2-periòdics de $T_{a,b}$ i llur distribució al pla, veurem els que provenen del trencament dels cercles de punts 2-periòdics de $T_{1,b}$, els que provenen de bifurcacions dels punts fixos i els que vénen de seccions amb tangència de dues corbes perfectament determinades. També provarem que, d'aquests punts, n'hi ha de simètrics respecte a $\pm S_a$ (aplicacions que fan de $T_{a,b} \pm S_a$ -reversible).

Dedicarem la secció 7 a estudiar un cert conjunt d'òrbites, les òrbites creixents, d'una aplicació T , tal que la imatge de tot cercle que envolta l'origen talla aquest en un nombre finit de punts. A la proposició 7.5 donarem el conjunt límit d'aquestes òrbites.

Farem un estudi concret d'aquestes òrbites per a $T_{a,b}$ i veurem amb ell la impossibilitat de l'existència de corbes invariants prop de l'origen per a certs valors de a (proposició 7.10). Trobarem també totes les òrbites n -periòdiques de mòdul constant de $T_{a,b}$ (proposició 7.12).

Finalment, a la secció 8, hom fa un estudi numèric sobre la desaparició de les corbes invariants que envolten l'origen per a $T_{a,b}$ amb $b = 3$.

Hom troba l'última d'aquestes corbes (treballant amb precisió 10^{-3} respecte al paràmetre a) per a $a = 1.274$. Aquesta òrbita té un nombre de rotació $\rho = (0.23084...)/2\pi$.

Sembla que la desaparició d'aquestes corbes és acompanyada de l'escapament de les varietats $W^s(0)$ i $W^u(0)$ a l'infinít. També hom troba, per a $a = 1.29$, punts, per exemple $(0.1, 0)$, tals que $T^n(0.1, 0)$ és lluny de l'origen per a $n > 300.000$.

2. TEOREMES I DEFINICIONS

En aquesta secció donarem els enuncis dels teoremes més importants que seran aplicats a tot el treball.

Si T és un difeomorfisme de \mathbb{R}^2 , aleshores determina un sistema dinàmic discret. Ens centrarem en un tipus concret de difeomorfismes que preserven l'àrea: les aplicacions twist i twist pertorbat.

Definició 2.1. Siguin (r, θ) les coordenades polars a \mathbb{R}^2 . (i) Sigui $A = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b\}$ amb $0 < a < b$, i T una aplicació de A en A . Direm que T és un twist si

$$T(r, \theta) = (r, \theta + \rho(r))$$

on $\rho \in C^1$ és una funció tal que $|\rho'(r)| \geq c \neq 0$, per a tot $r \in [a, b]$.

(ii) Una aplicació injectiva $T: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ direm que és un twist pertorbat si

$$T(r, \theta) = (r + f(r, \theta), \theta + \rho(r) + g(r, \theta)) \tag{2.1}$$

on ρ compleix les mateixes propietats que a (i), f i g són 2π -periòdiques en θ i tals que T és un difeomorfisme en la imatge que preserva l'àrea.

Observem que una aplicació twist és una aplicació que té els cercles centrats a l'origen $r = d$ com a conjunts invariants, i a més sobre ells hi ha un gir d'angle $\rho(d)$.

Donarem ara la millor versió del teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser-Rüssmann, que demostra l'existència de corbes invariants per a una aplicació twist pertorbat sota unes certes condicions de regularitat i petitesa per a les funcions f, g i ρ .

Abans d'això, veurem que estudiar (2.1) és equivalent a estudiar

$$T(r, \theta) = (r + h(r, \theta), \theta + r) \tag{2.2}$$

Lema 2.2. Si considerem la funció $D(r, \theta) = (\rho(r) + g(r, \theta), \theta)$, on ρ i g , funcions de classe C^1 , són les donades a la definició 2.1 i a més

$|g_r| < c$, tenim que D és un C^1 difeomorfisme de l'interior de A en l'interior de $D(A)$, i a més DTD^{-1} té l'expressió (2.2) si T té l'expressió (2.1).

Demostració: Per tal de veure que D és un C^1 difeomorfisme de l'interior de A en l'interior de $D(A)$, veurem que $\det(JD) \neq 0$ i que D és injectiva.

$\det(JD) = (\rho'(r) + g_r(r, \theta)) \neq 0$ per hipòtesi. Ara bé, si prenem $D(r, \theta) = D(r', \theta')$, tenim que $\theta = \theta'$ i $\rho(r) + g(r, \theta) = \rho(r') + g(r', \theta')$, però com que hem vist que $\rho'(r) + g_r(r, \theta) \neq 0$ com a funció de r , $\rho(r) + g(r, \theta)$ és injectiva, i per tant $r = r'$.

Si anomenem $w(r, \theta)$ la funció tal que $D^{-1}(r, \theta) = (w(r, \theta), \theta)$, tenim que $DTD^{-1}(r, \theta) = DT(w(r, \theta), \theta) = D(w(r, \theta) + f(w(r, \theta), \theta), \theta + \rho(w(r, \theta)) + g(w(r, \theta), \theta)) = (\rho(w(r, \theta) + f(w(r, \theta), \theta)) + g(w(r, \theta) + f(w(r, \theta), \theta), \theta + r), \theta + r)$ C.V.D.

És fàcil de veure que la regularitat de f , g i ρ és la mateixa que la de h , ja que el difeomorfisme D és de la mateixa classe que les funcions ρ i g .

Veurem que necessitarem imposar condicions de petitesa sobre h i les seves derivades; ara bé, la primera component de DTD^{-1} , $\bar{h}(r, \theta)$ és tal que $\bar{h}_r \sim 1$, \bar{h}_θ essent petita si ho són f_r , g_r , f_θ , g_θ , i igualment amb les derivades d'ordre superior.

Finalment hem d'assegurar-nos que l'interior de $D(A)$ del lema 2.2 conté una corona; això serà cert imposant, potser, més condicions sobre els valors g_r i g_θ .

Considerarem ara les normes següents:

$$|x| = \max(|r|, |\theta|)$$

$$|g| = \sup_{x \in A} |g(x)|$$

$$|g|_p = \sup_{x \in A} |D^k g(x)| \text{ on } D^k = \frac{\partial^{k_1}}{\partial \theta} \frac{\partial^{k_2}}{\partial r} \quad |k| = |k_1| + |k_2|$$

$$|k| = p$$

si $p \geq 0$ enter; i si $p = 1 + z$, 1 enter i $z \in (0, 1)$

$$|g|_p = \sup_{\substack{x \neq y \\ |k| = 1 \\ x, y \in A}} \frac{|D^k g(x) - D^k g(y)|}{|x - y|^z}$$

Teorema 2.3. (Kolmogorov-Arnold-Moser, teorema KAM) [R]. Sigui T una aplicació de classe C^p ($p > 2\tau + 1$) definida sobre

$$A = \{ (r, \theta) : a < r < b \}$$

amb $b-a < 2\pi$ donada per (2.2) i que preserva l'àrea.

Aleshores per a cada nombre ρ que satisfaci

$$\begin{aligned} a + 12^{-3} \gamma &\leq \rho \leq b - 12^{-3} \gamma \\ |\rho/2\pi - \ell/k| &\geq \gamma k^{-\tau-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad ; \ell = 0, \pm 1, \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

amb algunes constants γ i τ tals que

$$0 < \gamma < \min(1, 12^3 (b-a))/2 \quad , \quad 1 \leq \tau$$

existeix una aplicació injectiva $K : \mathbb{R} \rightarrow A$, $(r, \theta) = K(\xi) = K(\xi + 2\pi) - (0, 2\pi)$ tal que

$$(K^{-1}TK)(\xi) = \xi + \rho$$

sempre que es compleixen les condicions següents sobre la petitesa de h

$$\begin{aligned} |h| &\leq q(1/72)^\tau (\gamma/\Gamma(\tau+1))^2 / 300c_0 \\ |h|_p &\leq q(1-q) (1/288)^\tau (\gamma/\Gamma(\tau+1))^2 / (3600(3c_1 + c_2)) \end{aligned}$$

on Γ és la funció Gamma i q és un nombre que satisfà

$$0 < q \leq \min(((p-2\tau-1)\log 2)/(p+1), 10^{-2} 4^{-\tau})$$

Els nombres c_0 , c_1 i c_2 són constants dependents de p i

$$c_0 \leq 11, \quad c_1 \leq 17, \quad c_2 \leq 125$$

per $p > 0$.

Observem que el nombre de rotació de les corbes trobades és

$$\bar{\rho} = \rho/2\pi$$

Amb aquesta versió del teorema només podem assegurar que hi haurà corbes invariants que seran contínues, amb nombre de rotació $\bar{\rho}$, però tenim unes bones estimacions teòriques de la regió en què hi haurà aquestes corbes.

Si les funcions components del twist pertorbat són analítiques, tenim una altra versió d'aquest teorema [SM, pàgina 226] que ens assegura que les corbes invariants són analítiques.

Hi ha exemples de twists pertorbats de classe C^p , $p < 3$, en què els resultats del teorema són falsos. El problema actual se centra a determinar què passa per als twists pertorbats de classe C^3 .

Una conseqüència immediata d'aquest teorema és que si tenim una família paramètrica d'aplicacions twist pertorbat, T_μ , tals que T_0 és una aplicació twist, existeixen corbes invariants per μ suficientment petit, sota les condicions del teorema KAM. En moltes aplicacions aquesta família té la forma

$$T_\mu(r, \theta) = (r + \mu f(r, \theta, \mu), \theta + \rho(r) + \mu g(r, \theta, \mu)) \quad (2.4)$$

Si suposem f, ρ i g de classe C^p amb $p \geq 5$, tenim que les corbes invariants són de classe C^1 [M, pàgina 52] i a més els resultats següents:

Grosso modo podem dir que, aplicant reiterats cops el teorema KAM, obtenim el teorema següent:

Teorema 2.4. (teorema d'Arnold) [A]. Sigui T_μ la família de twists (2.4) de classe C^p , $p \geq 5$, aleshores tenim:

El conjunt de totes les corbes invariants de T_μ sobre A omple tot A menys un conjunt de mesura de Lebesgue arbitràriament petita, si la pertorbació μ és suficientment petita.

Teorema 2.5 [GLL]. Sota les hipòtesis del teorema d'Arnold, l'adherència del conjunt de punts periòdics de l'aplicació T_μ conté les corbes invariants de l'aplicació T_μ .

Un corollari immediat d'aquests dos últims teoremes ens dirà que l'adherència del conjunt de punts periòdics de T_μ , per a μ prou petit, conté tot A menys un conjunt de mesura de Lebesgue arbitràriament petita.

L'existència d'una infinitat d'aquests punts ens és donada pel resultat següent:

Teorema 2.6. (Teorema de Poincaré-Birkhoff) [AA, pàgina 74]. Sota les hipòtesis del teorema 2.4, sigui C la circumferència de radi r tal que $\rho(r) = 2\pi m/n$, és a dir C és la corba de punts n -periòdics per a T_0 .

Aleshores, si μ és suficientment petit, l'aplicació T_μ^n té genèricament $2kn$ punts fixos en un entorn de C , amb $k \geq 1$, i a més aquests són alternativament el·líptics i hiperbòlics.

Podem donar així una descripció de com evolucionen les òrbites d'una família de twists pertorbats (2.4) quan μ creix. Per a $\mu = 0$ hi ha dos tipus d'òrbites, totes contingudes als cercles centrats a l'origen: aquelles que compleixen $\rho(r) = 2\pi m/n$ formades per punts n -periòdics, i aquelles on $\rho(r)$ és incommensurable amb 2π . En aquestes els iterats de T_0 són densos al cercle (teorema de Jacobi).

Quan $\mu \neq 0$ i petit, el teorema KAM ens assegura que les òrbites amb nombre de rotació "suficientment incommensurable amb 1", és a dir que compleixen (2.3), encara perduren i són molt a prop del cercle. Un problema molt tractat és el d'intentar de determinar el nombre de rotació de l'última corba que desapareix.

Observem que, sobre aquestes òrbites, el twist pertorbat és conjugat a un gir d'angle incommensurable amb 2π , i per això aquestes corbes són conjunts mínims.

D'altra banda el teorema de Poincaré-Birkhoff ens diu que els cercles de punts n -periòdics per a T_0 es trenquen genèricament en $2kn$ punts n -periòdics per a T_μ . També genèricament els punts el·líptics d'aquestes òrbites estan envoltats per corbes invariants i l'estructura explicada fins ara es repeteix a llur entorn i així successivament. Les varietats dels punts hiperbòlics són contingudes entre dues corbes invariants i genèricament es tallen donant lloc a punts homoclínic.

3. APLICACIONS SIMÈTRIQUES RESPECTE A L'ORIGEN

En aquesta secció estudiarem les propietats d'un sistema dinàmic discret donat per una aplicació simètrica respecte a l'origen T (vegeu definició 3.1). A les proposicions 3.6 i 3.7 veurem les propietats addicionals que implica aquesta simetria quan tenim una família de twists pertorbats que la compleix.

Si M és un subconjunt de \mathbb{R}^2 , denotarem $-M = \{-x, x \in M\}$

Definició 3.1. Sigui T una aplicació de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 ; direm que és simètrica respecte a l'origen si per a tot x de \mathbb{R}^2 es compleix que $T(-x) = -T(x)$.

Direm que un subconjunt de \mathbb{R}^2 , M , és simètric respecte a l'origen si $-M = M$.

Òbviament les òrbites definides per un homeomorfisme simètric respecte a l'origen compleixen $O_x = -O_x$ ja que per a tot n de \mathbb{Z} $T^n(-x) = -T^n(x)$. Així, en particular, donada una òrbita n -periòdica, o bé és simètrica respecte a l'origen, o bé existeix una altra n -periòdica (la seva simètrica).

Lema 3.2. Sigui T un homeomorfisme simètric respecte a l'origen; aleshores si M és invariant per a T , $-M$ també ho és.

Demostració: Si M és invariant per a T es compleix que per a tot x de M , $O_x \subset M$. Prenguem $y \in -M$; aleshores $-y \in M$ i per tant $O_{-y} \subset M$, és a dir $O_y \subset -M$, com volíem demostrar. C.V.D.

Lema 3.3. Sigui T un homeomorfisme simètric respecte a l'origen i C un subconjunt de \mathbb{R}^2 . Si C és un conjunt atractor, o repulsor, o atractor uniforme, o estable, o inestable, o asimptòticament estable per a T , $-C$ també ho és.

D'aquest lema hom dedueix que l'estabilitat o inestabilitat de les òrbites periòdiques es conserva en considerar llurs simètriques respecte a l'origen. És més, els valors propis dels jacobians en aquests punts coincideixen, ja que $DT^n(x) = DT^n(-x)$ pel fet d'ésser la derivada d'una funció senar una funció parell.

Lema 3.4. Sigui σ un element del grup de permutacions de $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\sigma^2 = \text{id}$. Llavors, si n és senar, existeix un j tal que $\sigma(j) = j$.

Lema 3.5. Sigui γ una corba tancada, simple, i mínima per a T^m i no per a T^j amb j més petit que m , i sigui T^m un homeomorfisme simètric respecte a l'origen; aleshores, si existeix un n entre 0 i $m-1$ tal que $T^n\gamma \cap (-\bigcup_{j=0}^{n-1} T^j(\gamma)) \neq \emptyset$, tenim que

$$\bigcup_{j=0}^{n-1} T^j(\gamma) = - \bigcup_{j=0}^{n-1} T^j(\gamma)$$

Ara bé, si m és més gran que 1, senar, i T és una aplicació que preserva l'àrea,

$$T^n\gamma \cap (-\bigcup_{j=0}^{n-1} T^j(\gamma)) = \emptyset \quad n = 0, 1, \dots, m-1$$

Demostració: Donat aquest n , tenim que $T^n\gamma \cap (-T^j\gamma) \neq \emptyset$, però aquests dos conjunts són mínims, per a T^m , i aleshores han de coincidir i per tant $T^n\gamma = -T^j\gamma$. Aplicant T a totes dues bandes m cops, obtenim el resultat desitjat.

Així, si suposem que la intersecció és no buida per a m més gran que 1 senar, tenim que $-T^i\gamma = T^{\sigma(i)}\gamma$ amb $\sigma^2(i) = i$, i per tant aplicant el lema 3.5 existeix un j tal que $T^j\gamma = -T^j\gamma$. Veiem que aquesta corba de Jordan conté al seu interior el punt 0. Com que l'aplicació canvi de signe és un homeomorfisme, tenim que passarà l'interior de $T^j\gamma$ al seu interior. Com que aquest conjunt és homeomorf a un disc, pel teorema del punt fix de Brower hi haurà un punt x de l'interior de la corba tal que $x = -x$, que serà el punt zero. Ara bé, si $T^j\gamma$ té el punt zero al seu interior, $T^{j+1}\gamma$ tindrà el punt $T(0) = 0$, cosa impossible ja que T preserva l'àrea i $T^j\gamma$ i $T^{j+1}\gamma$ són disjunts. Per tant, si m és més gran que 1 senar, la intersecció ha d'ésser buida. C.V.D.

NOTA: Acabem de demostrar que, sempre que hi hagi un conjunt imparell d'illes, en considerar les illes obtingudes canviant de signe les donades obtenim un nou conjunt.

Proposició 3.6. Sigui T un homeomorfisme simètric respecte a l'origen; aleshores:

- (i) Si C és una corba tancada, simple mínima per a T i que envolta l'origen, aleshores C és simètrica respecte a ell.
- (ii) Quan l'origen (que és fix per a T) és un punt hiperbòlic, les seves varietats invariants són simètriques respecte a ell.

Demostració: (i) Considerem $-C$, que també sera mínima (lema 3.2). Com que C i $-C$ contenen la mateixa àrea i el punt 0, han d'inter-secar-se; llavors, pel lema 3.5, tenim que $C = -C$.

(ii) Siguin W^s i W^u aquestes varietats, aleshores $-W^s$ i $-W^u$ també serien varietats invariants que passarien pel mateix punt i a més serien estables i inestables respectivament; llavors, pel teorema de Hartman, $W^s = -W^s$ i $W^u = -W^u$. C.V.D.

Considerem ara el cas en què T_μ sigui un twist pertorbat simètric respecte a l'origen sobre l'anell A , i $T_0 = T$ un twist. Sabem en aquest cas, pel teorema de Poincaré-Birkhoff, que per a μ suficientment petit, si Γ és la corba dels punts que giren m/n radianys per a T , en un entorn seu genèricament existeixen $2kn$ punts fixos per a T^n , que són alternativament hiperbòlics i el·líptics.

Si considerem només la família dels twists pertorbats simètrics respecte a l'origen, refent la demostració del Teorema de Poincaré-Birkhoff per a aquest cas, observem que l'afirmació anterior continuarà essent genèricament certa (tot i que hem restringit el conjunt de funcions).

Proposició 3.7. Sigui T_μ una família de twists pertorbats simètrics respecte a l'origen, sobre un anell A , i sigui T_0 un twist. Llavors, si n és senar i μ suficientment petit, en un entorn de la corba formada pels punts que giren m/n radianys per a T , hi ha genèricament $4jn$ punts fixos per a T_μ^n .

Demostració: Com ja sabem, genèricament tenim $2kn$ punts fixos per a T_μ^n si μ es prou petit. Si k és parell, ja hem acabat (fent $k = 2j$); suposarem doncs que k és senar.

Siguim $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ les k òrbites formades cada una d'elles per n punts n -periòdics hiperbòlics per a T_μ . Si considerem $-\gamma_i$, $i = 1, \dots, k$ seran també òrbites de n punts n -periòdics hiperbòlics. Tindrem en compte dos casos:

(i) En fer aquest canvi de signe obtenim almenys una òrbita nova.

(ii) En fer aquest canvi de signe obtenim les mateixes òrbites. En aquest cas $-\gamma_i = \gamma_{\sigma(i)}$, on σ és una permutació de $\{1, 2, \dots, k\}$ i k és senar. Observem, fent $i = \sigma(j)$, que $-\gamma_{\sigma(j)} = \gamma_{\sigma^2(j)}$, i com que $-\gamma_{\sigma(j)} = \gamma_j$, tenim que $\sigma^2(j) = j$; així, pel lema 3.4, hi ha un l tal que $-\gamma_l = \gamma_l$. Sigui $\gamma_l = \{x_1, \dots, x_n\}$; com que $\gamma_l = -\gamma_l$, tenim que $-x_i = x_{\sigma'(i)}$; doncs, pel mateix raonament, hi ha un m tal que $-x_m = x_m$, és a dir $x_m = 0$. Aquest resultat és absurd, ja que per a μ petit els punts n -periòdics són lluny de zero.

Tenim doncs que l'únic cas possible és (i), i per tant com a mínim tenim $k+1$ òrbites hiperbòliques per a k senar.

Podem repetir el raonament per a les òrbites el·líptiques i obtindrem que almenys n'hi ha també $k+1$. Hem provat així que com a

mínim hi ha $2(k+1)n$ punts n -periòdics per a T_μ^n , és a dir $4jn$ punts, fent $j = (k+1)/2$. C.V.D.

NOTA: Per al cas n parell el Teorema de Poincaré-Birkhoff no és sempre millorable per als twists pertorbats simètrics respecte a l'origen. El twist pertorbat, donat a (1.1), per a $n = 2$ només té 4 punts 2-periòdics que es bifurquen de les òrbites de punts 2-periòdics per al twist, com és demostrat a la secció 6.

Sabem també, pel teorema KAM, que per a μ suficientment petit les corbes invariants de T_μ omplen qualsevol corona en quasi tota llur àrea.

Proposició 3.8. Sigui T_μ un twist pertorbat simètric respecte a l'origen; aleshores les corbes invariants de les quals sabem l'existència pel Teorema KAM són simètriques respecte a l'origen.

Demostració: Ja sabem que són conjunts mínims, i per tant, per la proposició 3.6, seran simètriques respecte a l'origen. C.V.D.

4. APLICACIONS S-REVERSIBLES

Estudiarem aquí propietats d'un s.d.d. que és donat per un producte de dues involucions. Per a aquestes aplicacions (que ja foren estudiades per Birkhoff) un cert subconjunt dels punts n -periòdics, els punts n -periòdics simètrics, pot trobar-se més fàcilment i és generat per uns conjunts concrets (proposició 4.4).

El fet que $T^{-1} = STS$ ens donarà, a més, una gran informació sobre el conjunt de punts homoclínics i heteroclínics dels seus punts n -periòdics hiperbòlics (proposició 4.6); també tindrem que les corbes invariants dels punts el·líptics tenen certes simetries (proposició 4.5).

Definició 4.1 [D]. Sigui T una aplicació bijectiva de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , i S una involució de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 . Llavors direm que T és S -reversible si TS és també una involució, és a dir, si

$$(ST)^2 = \text{Id}.$$

Essent T una aplicació S -reversible, observem que és producte de dues involucions.

Si denotem $\text{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = x\}$ considerem els següents conjunts $M_n = \text{Fix}(T^n S)$, $M_{n,q} = M_n \cap M_q$, $P^n = \text{Fix}(T^n)$.

Definició 4.2 [De]. Anomenarem punts simètrics els punts d'algun M_n , i punts doblement simètrics els punts d'un $M_{n,q}$, amb $n \neq q$.

Proposició 4.3 [De, pàg. 58]. Sigui T una aplicació bijectiva i S -reversible; aleshores tenim:

(1) Tots els punts doblement simètrics són periòdics, i més concretament $M_{n,q} \subset P^{n-q}$.

(ii) Tot punt periòdic simètric és doblement simètric. Exactament $M_q \cap P^{n-q} = M_{n,q}$.

Observem que els punts de P^n són m-periòdics per a T, per a algun m divisor de n. Els punts n-periòdics simètrics són fàcils de trobar si coneixem uns certs conjunts generadors d'ells, com ens assegura el resultat següent:

Proposició 4.4 [De, pàg. 59]. Tots els punts periòdics simètrics són determinats pels conjunts

$$M_{2k,0} \quad , \quad M_{2k-1,0} \quad , \quad M_{2k+1,0}$$

ja que tenen algun dels seus iterats en un d'ells.

A més, aquests conjunts poden ésser obtinguts fàcilment a partir de M_0 i M_1 ja que

$$T^k M_0 = M_{2k} \quad , \quad T^k M_1 = M_{2k+1} \quad , \quad SM_k = M_{-k}$$

Amb les proposicions següents deduirem el paper que té el fet que $(TS)^2 = Id$, relacionat amb els conjunts invariants, per exemple les òrbites n-periòdiques, les corbes invariants i els punts homoclínic i heteroclínic.

Proposició 4.5. Sigui T una aplicació S-reversible; aleshores

- (i) M és invariant si i només si SM ho és.
- (ii) 0 és una òrbita n-periòdica si i només si SO ho és.
- (iii) Sigui γ una corba invariant mínima per T^m , aleshores si $T^n \gamma \cap \text{Fix}(S) \neq \emptyset$ per a algun n entre 0 i m-1 tenim que $ST^k \gamma = T^{2n-k} \gamma$.

Demostració: (i) Veurem que si M és positivament invariant aleshores SM és negativament invariant. Prenguem $x \in SM$, aleshores $Sx \in M$ i per hipòtesi $TSx \in M$, però com que $TS = ST^{-1}$ tenim $ST^{-1}x \in M$, i així $T^{-1}x \in SM$. Igualment podríem veure que si M és negativament invariant SM ho és positivament.

(ii) Observem que, si T és S-reversible, T^m per a $m \in \mathbb{Z}$ també ho és, ja que

$$(ST^m)^2 = Id. \quad m \in \mathbb{Z} \tag{4.1}$$

Això és fàcil de veure ja que per a $m = 1$ és cert per hipòtesi, i així, fent inducció creixent m, o bé decreixent m, tenim que si $(ST^m)^2 = Id$. hom té $ST^m ST^m = Id.$, i aplicant T $TST^m ST^m = T$ aleshores $ST^{m-1} ST^m = T$ i per tant $(ST^{m-1})^2 = Id$. Igualment obtenim que $(ST^{m+1})^2 = Id$.

Així només ens cal provar el resultat per a punts fixos. Prenguem p tal que $T(p) = p$; aleshores $T^{-1}S(p) = ST(p) = S(p)$ i per tant $TS(p) = S(p)$.

(iii) Prenguem $p \in T^n \gamma \cap \text{Fix}(S)$; aleshores, per (4.1), tenim que $ST^m = T^m S$, i així $ST^{-k}m(p) = T^k m S(p) = T^k m(p)$ i per tant

$$S \{ p, T^{-n}(p), T^{-2n}(p), \dots \} = \{ p, T^n(p), T^{2n}(p), \dots \}$$

ara bé, com que la clausura d'aquests dos conjunts és $T^n \gamma$, tenim que $ST^n \gamma = T^n \gamma$. Aquest resultat és equivalent a $T^{-n} S \gamma = T^n \gamma$, és a dir $S \gamma = T^{2n} \gamma$. Aplicant T^{-k} a totes dues bandes, tenim $T^{-k} S \gamma = T^{2n-k} \gamma$, i així doncs $ST^k \gamma = T^{2n-k} \gamma$.

NOTA: Observem que si hi ha una corba que compleix (iii), canviant els noms, podem suposar que hom té $\gamma \cap \text{Fix}(S) \neq \emptyset$, i així $ST^k \gamma = T^{-k} \gamma$. Tenim doncs que l'aplicació S fa una permutació de les diferents illes de l'òrbita; complint $S^2 = \text{Id}$. i deixant sempre fixa l'illa que talla $\text{Fix}(S)$, la permutació és regida per $\sigma(k) = -k \pmod{m}$. Un resultat obvi és que, si m és senar, γ és l'única illa que compleix $S \gamma = \gamma$. Ara bé, si m és parell, hi ha només dues $S \gamma = \gamma$ i $ST^{m/2} \gamma = T^{m/2} \gamma$. Estudiant una S concreta podem deduir, per a algunes d'aquestes òrbites formades per m illes, formes possibles de passar per a T de l'una a l'altra.

Proposició 4.6. Sigui T una aplicació S -reversible de classe C^1 i O_p una òrbita n -periòdica per a T ; aleshores

$$SW^s(O_p) = W^u(SO_p)$$

Demostració. Prenguem un punt q de $W^s(O_p)$, per tant $\lim_{m \rightarrow \infty} d(T^m q, O_p) = 0$. Per (4.1), $d(T^{-m} S q, SO_p) = d(ST^m q, SO_p) \leq M d(T^m q, O_p)$, on aquesta desigualtat és certa ja que, com que la distància entre $T^m q$ i O_p tendeix a zero, O_q^+ està acotada i hi apliquem el Teorema del valor mitjà ja que S és una funció C^1 . Passant al límit, tenim doncs $\lim_{m \rightarrow \infty} d(T^{-m} S q, SO_p) = 0$ i per tant $S q \in W^u(SO_p)$. Idènticament podem demostrar l'altra inclusió. C.V.D.

Corol·lari 4.7. Sota les hipòtesis de la Proposició 4.6 tenim

- (i) Si $W^s(O_p) \cap W^u(O_p)$ intersequen $\text{Fix}(S)$ en un punt q que no sigui de O_p , aleshores O_p i SO_p tenen punts heteroclínic.
- (ii) Si $SO_p = O_p$ i $W^s(O_p) \cap W^u(O_p)$ intersequen $\text{Fix}(S)$ en un punt q que no sigui de O_p , aleshores O_p té punts homoclínic, $q \in H(O_p)$.

De la Proposició 4.6, hom dedueix que si un punt fix p és atractiu per a T , llavors Sp és repulsor per a T . Aleshores $\text{Fix}(S)$ no pot contenir ni punts fixos atractius ni punts fixos repulsors.

5. PROPIETATS DE LA FAMÍLIA D'APLICACIONS

Dedicarem aquesta secció a veure que $T_{a,b}$ defineix un sistema dinàmic discret diferenciable, que és un twist per $a = 1$ i un twist pertorbat per a a més gran que 1, i que és una aplicació simètrica respecte a l'origen i $\pm S_a$ -reversible on $S_a(x,y) = (ay, x/a)$. Hom podrà aplicar per tant tots els resultats de les seccions anteriors i, a més, les propietats de les aplicacions twist pertorbat estudiades a la secció 2. Finalment hom veurà l'equivalència entre estudiar $T_{a,b}$ per a més gran que 1 i per a entre 0 i 1.

Podem agrupar tots aquests resultats sota la proposició següent, que donarem sense demostració.

Proposició 5. Sigui $T_{a,b}$ la família d'aplicacions donada en (1.1); aleshores:

(i) $T_{1,b}$ és un twist i $T_{a,b}$, amb a més gran que 1, és un twist pertorbat de A en \mathbb{R}^2 , on A és una corona arbitrària centrada a l'origen.

(ii) $T_{a,b}$ és simètrica respecte a l'origen.

(iii) $T_{a,b}$ és $\pm S_a$ -reversible on $S_a(x,y) = (ay, x/a)$.

(iv) M és invariant si i només si ho són $-M, S_a M, -S_a M$.

(v) O es una òrbita n -periòdica si i només si ho són $-O, S_a O, -S_a O$. A més, donada aquesta òrbita, si té intersecció amb alguna de les altres tres coincideix amb ella.

(vi) Sigui γ una corba tancada, simple, invariant i mínima per a $T_{a,b}^m$; aleshores si:

Hi ha un n tal que $T_{a,b}^n \gamma \cap \{x = \pm ay\} \neq \emptyset$ es té $\cup T_{a,b}^j \gamma = S(\cup T_{a,b}^j \gamma)$

Hi ha un n tal que $T_{a,b}^n \gamma \cap (-\cup T^j \gamma) \neq \emptyset$ es té $\cup T_{a,b}^j \gamma = -\cup T_{a,b}^j \gamma$

A més, si m és més gran que 1, senar, $T_{a,b}^m \gamma \cap (-\cup T^j \gamma)$ és sempre buit.

(vii) Si γ és una corba tancada simple invariant i mínima per a $T_{a,b}$, que envolta l'origen, tenim:

$$\gamma = -\gamma \quad \text{i} \quad S_a \gamma = \gamma$$

(viii) Donada una òrbita n -periòdica O_p , llavors

$$S_a W^s(O_p) = W^u(S_a O_p), \quad W^s(O_p) = -W^s(-O_p), \quad W^u(O_p) = -W^u(-O_p)$$

(ix) Sigui W^s la varietat invariant estable de l'origen, que és un punt fix hiperbòlic per a més gran que 1; aleshores tenim

$$W^s = -W^s \quad \text{i} \quad S_a W^s = W^u$$

A més $H(0) \neq \emptyset$ si i només si $(W^s(0) \cup W^u(0)) \cap \{x = \pm ay\} \neq \emptyset$ i tots els punts de la intersecció són homoclínic. Aquests punts homoclínic

són transversals si i només si $W^s(0) \cap W^u(0)$ tallen transversalment $x = \pm ay$.

(x) Totes les òrbites de punts n-periòdics simètrics tenen un punt en algun dels conjunts

$$T_{a,b}^k M_0 \cap M_0, T_{a,b}^k M_{-1} \cap M_0, T_{a,b}^k M_{-1} \cap M_{-1}$$

on $M_0 = \{ (x,y) : x = ay \}$ i $M_{-1} = \{ (x,y) : T_{a,b}(x,y) = (ay, x/a) \}$ per als punts S_a -simètrics, i $M_0 = \{ (x,y) : x = -ay \}$ i $M_{-1} = \{ (x,y) : T(x,y) = (-ay, -x/a) \}$ per als punts $-S_a$ -simètrics.

(xi) Prenguem el sistema de coordenades a \mathbb{R}^2 de base $(0,-1), (1,0)$. Aleshores l'expressió de $T_{1/a,b}$ en aquesta base és la mateixa que la de $T_{a,b}$ en el sistema de coordenades canònic $(1,0), (0,1)$.

(xii) Les òrbites n-periòdiques de mòdul constant (és a dir, tals que tots llurs punts tenen el mateix mòdul) de $T_{a,b}$ són contingudes en les rectes $x = \pm ay$ i $n \in \{1,2,3,4\}$.

Com hem vist a la proposició (4.5), el resultat (vi) ens diu que, sota les hipòtesis d'aquesta proposició, tenim que $S_a(UT^J\gamma) = \cup T^J\gamma$, més

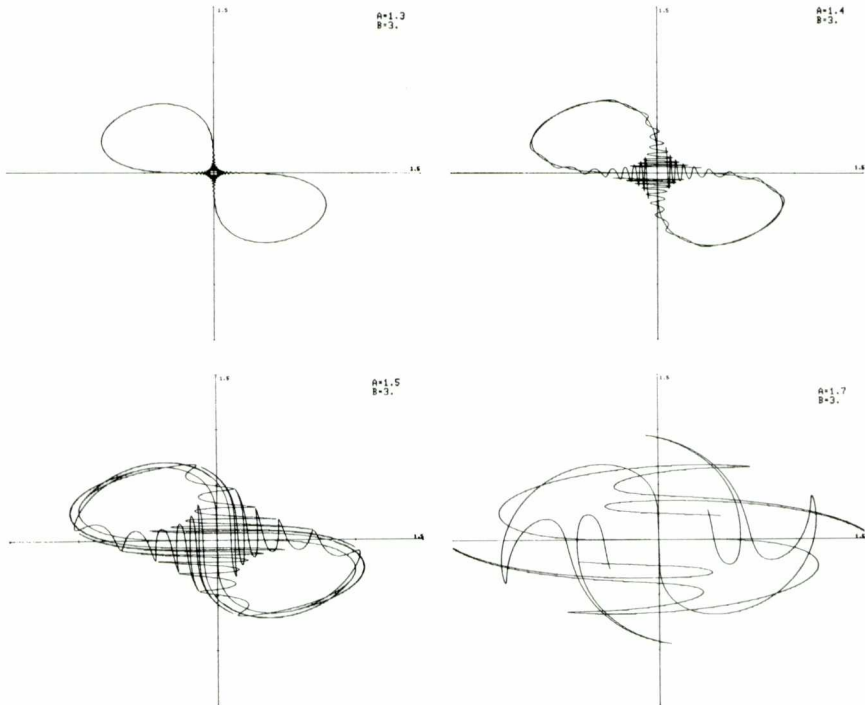


Fig. 5.1. Varietats invariants de l'origen per a $T_{a,b}$.

concretament $S_a T_{a,b}^k \gamma = T^{2n-k} \gamma$. Així, per exemple, si tenim una òrbita 4-periòdica que talla $x = \pm ay$ i que té una illa a cada quadrant, l'òrbita, en aplicar T, dóna voltes en el sentit de les agulles del rellotge o bé en el sentit contrari.

Del resultat (ix), veiem que l'origen té, per a molts valors de a i b (vegeu figura 5.1), punts homoclínic transversals. En aquests sabem (vegeu [M, pàgina 101], [Sm]) que el *shift* de Bernoulli és un subsistema de $T_{a,b}$ amb tota la complexitat que això implica.

Easton demostra [E] que les òrbites obtingudes numèricament poden anar a parar sempre (per a n prou gran) a la clausura de $H(0)$, $Cl(H(0))$, per error de càlcul arbitràriament petit, utilitzant ϵ -cadenaes fortes.

També conjectura que la mesura de $Cl(H(0))$ és positiva. Això explicaria el fet d'obtenir òrbites que sembla que omplen una àrea positiva (vegeu figura 5.2).

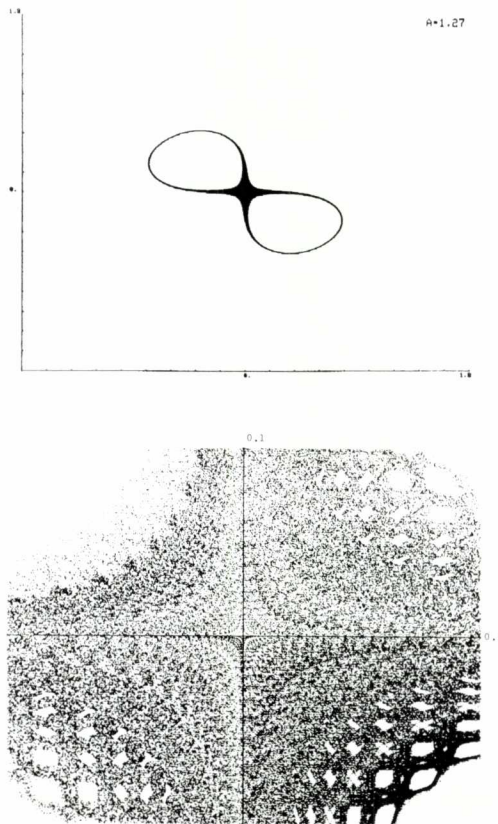


Fig. 5.2. Una òrbita per a $T_{1,27,3}$ i ampliació d'aquesta.

Mentre l'origen és envoltat per corbes invariants, tota òrbita que comença a l'interior d'aquestes queda sempre al seu interior. La regió de corbes invariants de $T_{a,b}$ fixat b és tot el pla per a $a = 1$. Per a $a - 1$ prou petit, el teorema KAM ens assegura que n'hi haurà molt a prop de l'origen i molt lluny d'ell. Un estudi numèric d'aquestes corbes en augmentar a (per a $b = 3$), el farem a la secció 8.

Podem aplicar també a $T_{a,b}$ el teorema de Poincaré-Birkhoff (en el seu millorament per a aplicacions simètriques respecte a l'origen donat a la proposició 3.7) i ens assegurarà l'existència d'infinits punts n -periòdics de tots els períodes, per a $a - 1$ prou petit.

6. PUNTS FIXOS I 2-PERIÒDICS DE LA FAMÍLIA $T_{a,b}$

Estudiarem en aquesta secció tots els punts fixos i 2-periòdics de $T_{a,b}$.

Els punts fixos són trobats a la proposició 6.1 i classificats a la proposició 6.2. L'estudi dels punts 2-periòdics és més complicat. No els trobarem tots d'una manera explícita, però sí que els localitzarem i veurem com estan distribuïts a tot el pla.

Finalment veurem quins d'aquests punts són simètrics.

Denotarem per (x,y) les coordenades cartesianes d'un punt i per (r,θ) les seves coordenades polars.

La demostració de tots els resultats que obtindrem pot ésser feta calculant amb cura, i no la donarem aquí.

Proposició 6.1. Donats $a > 1$ i b , els punts fixos de $T_{a,b}$, diferents de zero són (r_n, θ) , amb $n \in \mathbb{N}$ i r_n i θ tals que:

(i) θ compleix que $\tan \theta = -1/a$ i r_n és la solució de l'equació

$$r^b = \arccos(2a/(a^2 + 1))$$

que pertany a l'interval $[((n-1)2\pi)^{1/b}, ((n-1)2\pi + \pi/2)^{1/b}]$.

(ii) θ compleix que $\tan \theta = 1/a$ i r_n és la solució de l'equació

$$r^b = \arccos(2a/(a^2 + 1))$$

que pertany a l'interval $[((n-1)2\pi + 3\pi/2)^{1/b}, (n2\pi)^{1/b}]$.

Si $a = 1$, els punts fixos de $T_{a,b}$ són $r = (2n\pi)^{1/b}$ per a $n \in \mathbb{N}$.

Observem que, quan a creix, els punts fixos van tendint a l'eix OX, ja que són inclosos a les rectes $x = \pm ay$. Aquests tendeixen a $(\pm(\pi/2 + n\pi)^{1/b}, 0)$ quan a tendeix a infinit.

El teorema de Poincaré-Birkhoff ens assegurava l'existència de $2k$ punts fixos en un entorn dels cercles de radi $(2n\pi)^{1/b}$, per a prou $a > 1$, i

a més afirmava que aquests serien alternativament el·líptics i hiperbòlics. A la proposició 3.7 ja hem vist que podíem assegurar, per la simetria de $T_{a,b}$, que almenys hi havia 4 punts d'aquests, i aquest és el cas en el qual ens trobem.

Proposició 6.2. Si $a = 1$, tots els punts fixos són parabòlics. Si $a > 1$, llavors

(i) Els punts fixos tals que $\text{tag}\theta = 1/a$ són hiperbòlics.

(ii) Siguin (r_n, θ) els punts fixos amb $\text{tag}\theta = -1/a$. Aleshores si $a_n(b)$ és la solució de l'equació.

$$b(a^2 - 1) (4a)^{-1} \arccos(2a(a^2 + 1)^{-1}) = 1 \quad (6.1)$$

on la funció arccosinus pren valors entre $(n - 1)2\pi$ i $(n - 1)2\pi + \pi/2$, tenim que, fixat b , (r_n, θ) és el·líptic si $a < a_n(b)$, parabòlic si $a = a_n(b)$ i hiperbòlic si $a > a_n(b)$.

(iii) L'origen és sempre hiperbòlic.

És fàcil de resoldre numèricament l'equació (6.1); així, per exemple, $a_1(3) = 2.255034 \dots$, $a_2(3) = 1.109808 \dots$, $a_3(3) = 1.054225 \dots$, $a_{100}(3) = 1.001062 \dots$, $a_{1000}(3) = 1.0000106 \dots$.

Es compleix que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(b) = 1$$

Proposició 6.3. Si $a = 1$, l'origen és l'únic punt fix estable de $T_{1,b}$, i els altres són parabòlicament inestables.

Proposició 6.4. Els punts 2-periòdics de $T_{a,b}$ són tots els punts situats sobre els cercles de radi $r = ((2n + 1)\pi)^{1/b}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ara estudiarem els punts 2-periòdics per a $a > 1$. Definim per a això els conjunts

$$P_1 = \{ (x,y) \neq 0 : T_{a,b}(x,y) = (ay, -x/a) \}$$

$$P_2 = \{ (x,y) \neq 0 : T_{a,b}(x,y) = (-ay, x/a) \}$$

$$P'_3 = \{ (x,y) : T_{a,b}(x,y) = (-ay, -x/a) \}$$

$$P_3 = P'_3 - \{ \text{punts fixos de } T_{a,b} \}$$

$$P'_4 = \{ (x,y) : T_{a,b}(x,y) = (ay, x/a) \}$$

$$P_4 = P'_4 - \{ \text{punts fixos de } T_{a,b} \}$$

Observem que els punts fixos de $T_{a,b}$ són a P'_3 o a P'_4 . Veiem també que aquests conjunts P_i no són disjunts, ja que els punts 2-periòdics situats sobre un eix són en dos d'aquests.

Proposició 6.5. Per a $a > 1$, si un punt (x, y) de \mathbb{R}^2 és 2-periòdic per a $T_{a,b}$, llavors pertany a P_1 per a algun $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Notem que si un punt 2-periòdic és a P_1 , la seva imatge és a P_2 , i viceversa; per tant només cal estudiar un dels dos conjunts.

Proposició 6.6. Tots els punts 2-periòdics de $T_{a,b}$, per a $a > 1$, que són de P_1 són sobre els cercles $r = (\pi/2 + 2n\pi)^{1/b}$, amb $n \in \mathbb{N}$, i són donats per

$$x = \pm (a^2 (1-a^4)^{-1} ((3\pi/2 + 2m\pi)^{2/b} - a^2 (\pi/2 + 2n\pi)^{2/b}))^{1/2} \quad m \in \mathbb{N}$$

$$y = \pm ((\pi/2 + 2n\pi)^{2/b} - x^2)^{1/2}$$

sempre i quan els radicals siguin positius.

Proposició 6.7. Els punts 2-periòdics de $T_{a,b}$, per a $a > 1$, que són de P_2 són sobre els cercles $r = (3\pi/2 + 2m\pi)^{1/b}$, amb $m \in \mathbb{N}$, i són les imatges dels punts 2-periòdics de $T_{a,b}$ que pertanyen a P_1 .

Els punts de P_1 apareixen, donat n , per a cada m quan $a \geq ((3 + 4m)/(1 + 4n))^{1/b} > 1$. És a dir aquests punts van naixent en augmentar el valor de a . De fet, fer a $a - 1$ arbitràriament petit ja en tenim infinits (si n i m són prou grans, és a dir, prou lluny de l'origen). El punt 2-periòdic d'aquesta família, més proper a zero, que apareix més aviat ho fa quan $a = 3^{1/b}$ i és un punt de mòdul $(\pi/2)^{1/b}$.

Per a veure on són aquests punts és més clara una interpretació dinàmica, en funció d' a , d'ells. Els punts 2-periòdics de mòdul $(\pi/2 + 2n\pi)^{1/b}$ són les seccions del cercle d'aquest radi amb les el·lipses de semieixos $(3\pi/2 + 2m\pi)^{1/b} a$ i $(3\pi/2 + 2m\pi)^{1/b} / a$, per a $m \in \mathbb{N}$. Així doncs, en augmentar a , les el·lipses es van aplanar en la direcció de l'eix OX i és clar que per a a prou gran arribaran a tallar aquest cercle. Tenim doncs que cada cop hi haurà més punts 2-periòdics de mòdul $(\pi/2 + 2n\pi)^{1/b}$ i que aquests tendiran a acumular-se als punts $(\pm(\pi/2 + 2n\pi)^{1/b}, 0)$.

Igual passarà amb els punts 2-periòdics de la família P_2 , però cap als punts $(0, \pm(3\pi/2 + 2m\pi)^{1/b})$ i sobre els cercles de radi $(3\pi/2 + 2m\pi)^{1/b}$.

Si un punt $(x, y) \in P_1 (P_2)$, aleshores $(\pm x, \pm y)$ també hi pertanyen. Aquest resultat ja el podíem saber per les simetries de l'aplicació $T_{a,b}$, ja que, com hem vist a la proposició 5, si (x, y) és 2-periòdic, ho són $-(x, y)$, $S_a(x, y)$, i per tant: Si $(x, y) \in P_2$ aleshores $(-x, -y) \in P_2$. També $T_{a,b}(x, y) = (ay, -x/a) \in P_1$, $S_a(ay, -x/a) = (-x, y) \in P_2$ i per tant $(x, -y)$.

Estudiarem ara els punts 2-periòdics de la família P_3 . Observem que si un punt 2-periòdic és de P_3 , la seva imatge també ho és.

Lema 6.8. Un punt $(r, \theta) \in P_3$ si i només si pertany a alguna de les dues espirals següents:

$$E_1 = \{ (r, \theta) : r = (2\theta - 3\pi/2)^{1/b}, \theta \geq 3\pi/4 \}$$

$$E_2 = \{ (r, \theta) : r = (2\theta - 7\pi/2)^{1/b}, \theta \geq 7\pi/4 \}$$

Es compleix a més a més que $E_2 = -E_1$.

Observem que aquestes corbes són independents del valor de a . El valor de b no hi té un paper essencial; de fet, el pas de les espirals depèn exponencialment de b .

Proposició 6.9. Sigue $E = E_1 \cup E_2$, on els conjunts E_i són els donats al lema 6.8. Els punts fixos i 2-periòdics de $T_{a,b}$, $a \neq 1$, que són de P'_3 són

$$E \cap T_{a,b}(E).$$

Corol·lari 6.10. Els punts de $E \cap T_{a,b}(E)$, $a \neq 1$, que no són fixos per a $T_{a,b}$ són els punts 2-periòdics de $T_{a,b}$ que pertanyen a P_3 .

Obtenir una expressió analítica d'aquests punts és molt complicat; tanmateix hom pot trobar algunes subfamílies de $E \cap T_{a,b}(E)$.

Calculem primer $E \cap T_{1,b}(E)$, i obtenim:

- (i) Punts de mòdul $(2k\pi)^{1/b}$, $k \in \mathbb{N}$ i argument $3\pi/4$ ó $7\pi/4$ (fixos per a $T_{1,b}$).
- (ii) Punts de mòdul $(\pi + 2k\pi)^{1/b}$, $k \in \mathbb{N}$ i argument $\pi/4$ ó $5\pi/4$ (2-periòdics per a $T_{1,b}$).

Ara bè, com que les corbes E_i i $T_{1,b}(E_i)$ es tallen transversalment, en variar poc a ho seguiran fent. Obtindrem, doncs, almenys dues famílies de punts de $E \cap T_{a,b}(E)$. La primera d'elles serà formada per punts fixos de $T_{a,b}$ i ja l'hem estudiada a la Proposició 6.1. L'altra serà formada per una òrbita de les dues de punts 2-periòdics que assegura el Teorema de Poincaré-Birkhoff (de fet redemostrem el Teorema per a aquest cas). Veiem que aquesta òrbita és de mòdul constant.

Proposició 6.11. L'òrbita de punts 2-periòdics de mòdul constant de P_3 , amb $a \neq 1$, és la formada pels punts (r_n, θ) , $n \in \mathbb{N}$, on $\text{tag}\theta = 1/a$ i r_n és la solució de

$$r^b = \text{arctag}((1 - a^2)/2a)$$

que pertany a l'interval $[(\pi/2 + 2(n - 1)\pi)^{1/b}, (\pi + 2(n - 1)\pi)^{1/b}]$.

Clarament aquests són els punts que surten dels de mòdul $(\pi + 2k\pi)^{1/b}$ i argument $\pi/4$ ó $5\pi/4$, ja que tendeixen a ells quan a tendeix a 1.

Quan a creix, aquests punts s'acosten a l'eix OX, ja que són sobre la recta $x = ay$, i tendeixen a $(\pm(\pi/2 + 2k\pi)^{1/b}, 0)$ quan $a \rightarrow \infty$.

Podem veure com van apareixent aquests punts 2-periòdics fent-ne una interpretació dinàmica en funció de a , fixat b . Sabem ja que els punts fixos i 2-periòdics de P'_3 són els punts de $E \cap T_{a,b}(E)$. Per a simplificar el problema i a causa de la simetria de $T_{a,b}$ respecte a l'origen, poden restringir-nos a estudiar $E \cap T_{a,b}(E_1)$, ja que $E \cap T_{a,b}(E_2) = -(E \cap T_{a,b}(E_1))$ i per tant

$$E \cap T_{a,b}(E) = (E \cap T_{a,b}(E_1)) \cup (-(E \cap T_{a,b}(E_1)))$$

A més utilitzarem que $T_{a,b}(x,y) = g_a(T_{1,b}(x,y))$ on $g_a(x,y) = (ax,y/a)$. Així $E \cap T_{a,b}(E_1) = E \cap g_a(V_1)$ essent $V_1 = T_{1,b}(E_1)$. Tenim, doncs,

$$V_1 = \{ (r,\theta) : r = (-2\theta + 3\pi/2)^{1/b}, \theta \leq 3\pi/4 \}$$

Diem $V = V_1 \cup (-V_1)$.

Així, centrant el problema, ens falta estudiar el conjunt $E \cap g_a(V_1)$, fix b . Observem que $g_1(V_1) = V_1$ és una espiral que surt de l'origen; en augmentar a , allò que fem és aplatir l'espiral en el sentit de l'eix OY i allargar-la en el sentit de l'eix OX ; i així, com que E és una doble espiral fixa, els punts 2-periòdics aniran apareixent sobre E i seran cada cop més nombrosos.

Alguns d'aquests punts ja els coneixem, són els punts fixos i els 2-periòdics ja estudiats a 6.11; altres tenen un naixement ben natural, provenen de les bifurcacions dels punts fixos per als valors $a_n(b)$ trobats a la proposició 6.2, per als quals aquests punts són parabòlics. Finalment tenim una sèrie de punts que van apareixen quan tenim una secció amb tangència de E i $g_a(V_1)$.

De l'aplatament de $g_a(V_1)$ en créixer a , podem deduir que les famílies de punts que van apareixent no desapareixen mai i es van acumulant cap a l'eix OX .

Podem deduir també que, com més lluny estem de l'origen, més quantitat de punts anem obtenint, ja que l'espiral E és cada cop més fina, i una pertorbació, per petita que sigui, ja fa que $g_a(V_1)$ la talli molts cops. De fet podem afirmar que, per $a - 1$ tan petit com vulguem, ja tenim, lluny de 0, infinits punts 2-periòdics dels tres tipus esmentats. Malgrat això, prop de l'origen només en tindrem, per $a - 1$ prou petit, els fixos i els de mòdul constant, dels quals ja sabem l'existència pel teorema de Poincaré-Birkhoff.

En augmentar b accelerem el procés de naixement de punts 2-periòdics, considerant que a també augmenta, ja que allò que fem és que la doble espiral E tingui espines més apretades.

Ens falta ara estudiar els punts 2-periòdics que siguin de la família

P_4 . Per a aquests hom pot fer un estudi molt semblant al fet per als punts de P_3 .

El paper que tenen les espirals E_1 i E_2 el tindran en aquest cas les espirals E_3 i E_4 .

Lema 6.12. Un punt $(r, \theta) \in P'_4$ si i només si pertany a alguna de les dues espirals següents:

$$E_3 = \{ (r, \theta) : r = (2\theta - \pi/2)^{1/b}, \theta \geq \pi/4 \}$$

$$E_4 = \{ (r, \theta) : r = (2\theta - 5\pi/2)^{1/b}, \theta \geq 5\pi/4 \}$$

Es compleix a més a més que $E_4 = -E_3$.

Tindrem també una proposició equivalent a la proposició 6.9.

Proposició 6.13. Sigui $E' = E_3 \cup E_4$, on els E_i són els conjunts definits al lema 6.12. Els punts fixos i 2-periòdics de $T_{a,b}$, $a \neq 1$, que són de P'_4 són

$$E' \cap T_{a,b}(E')$$

Corol·lari 6.14. Els punts de $E' \cap T_{a,b}(E')$, $a \neq 1$, que no són fixos per a $T_{a,b}$ són els punts 2-periòdics de $T_{a,b}$ que pertanyen a P_4 .

Podem determinar també les òrbites de mòdul constant 2-periòdiques de P_4 . Amb aquesta proposició i la proposició 6.11 acabarem el càlcul de tots els punts 2-periòdics que es bifurquen dels cercles de punts 2-periòdics de $T_{1,b}$.

Proposició 6.15. L'òrbita de punts 2-periòdics de mòdul constant de P_4 , amb $a \neq 1$, és la formada pels punts (r_n, θ) , $n \in \mathbb{N}$, on $\text{tag}\theta = -1/a$ i r_n és la solució de

$$r^b = \text{arctag}((a^2 - 1)/2a)$$

que pertany a l'interval $[(\pi + 2(n - 1)\pi)^{1/b}, (3\pi/2 + 2(n - 1)\pi)^{1/b}]$.

Podem fer també una interpretació dinàmica d'aquests punts 2-periòdics. L'única diferència essencial amb l'altra família és que en aquest cas no ens apareixen punts de bifurcacions, ja que a P'_4 els punts fixos són sempre hiperbòlics.

Lema 6.16. Tots els punts fixos i els punts 2-periòdics de P_3 i P_4 són punts periòdics simètrics (respecte a $S_a \circ -S_a$).

7. ESCAPAMENT DE LES ÒRBITES A L'INFINIT

Estudiarem en aquesta secció el conjunt de les òrbites creixents i

no decreixents per a una funció T . Després farem aquest estudi per al cas concret $T = T_{a,b}$.

Definició 7.1. Sigui T un homeomorfisme de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 . Direm que una òrbita O del sistema dinàmic definit per T s'escapa a l'infinit si per a tot $r > 0$, donat un punt $x \in O$, existeix un $n(x,r)$ tal que $|T^{n(x,r)}(x)| > r$.

Considerarem que a més T preserva l'àrea. Hi ha una clara relació entre l'existència d'òrbites d'aquest tipus i la de corbes invariants per a T que envolten l'origen. Cap dels punts d'una òrbita que s'escapa a l'infinit pot ésser dins una corba invariant, ja que l'interior d'aquesta corba també és un conjunt invariant.

Una forma molt concreta d'escapar-se a l'infinit és fer-ho de forma creixent.

Definició 7.2. Direm que la semiòrbita positiva de x és creixent si es compleix que $|T^n(x)| < |T^{n+1}(x)|$.

Si no imposem la desigualtat estricta, direm que la semiòrbita de x és no decreixent.

Definició 7.3. Direm que un punt x s'escapa a l'infinit de forma creixent (no decreixent) si la seva semiòrbita positiva és decreixent (no decreixent) i la successió de mòduls $|T^n(x)|$ amb $n \in \mathbb{N}$ és no acotada.

Considerarem ara que T és un homeomorfisme que conserva l'àrea tal que la imatge de tot cercle de radi r , C_r , per a T , té un nombre finit de punts a C_r , és a dir $\#(C_r \cap T(C_r))$ és finit per a tot $r \in \mathbb{R}$.

Podem construir el conjunt $D = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \{C_r \cap T(C_r)\} = \{x \in C_r : \exists y \in C_r : T(y) = x\}$. Així $x \in D$ si i només si $x \in C_r$ i $T^{-1}(x) \in C_r$, és a dir si i només si $|x| = |T^{-1}(x)|$. D serà la frontera entre $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tals que } |x| > |T^{-1}(x)|\}$ i $(M \cup D)^c$.

Lema 7.4. Sigui T un homeomorfisme de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 ; aleshores:

(i) La semiòrbita positiva de x és creixent si i només si $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} T^{-i}(M) = :H$.

(ii) la semiòrbita positiva de x és no decreixent si i només si $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} T^{-i}(M \cup D) = :H'$.

Demostració: (i) $x \in M$ si i només si $|x| > |T^{-1}(x)|$. Tenim que $x \in T^{-1}(M)$ si $T^1(x) \in M$, és a dir $|T^1(x)| > |T^{1-1}(x)|$, així òbviament hom té que la semiòrbita positiva de x és creixent si $x \in H$ i viceversa. La demostració de (ii) és igual. C.V.D.

Els conjunts H i H' poden ésser escrits

$$\begin{aligned} H &= \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tals que } |x| < |Tx| < \dots < |T^i(x)| < \dots\} \\ H' &= \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tals que } |x| \leq |Tx| \leq \dots \leq |T^i(x)| \leq \dots\} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Proposició 7.5. Sigui T un homeomorfisme que preserva l'àrea tal que $\#(C_r \cap T(C_r))$ és finit per a $r \geq 0$. Si H i H' són els conjunts definits a (7.1), tenim

- (i) H i H' són positivament invariants.
- (ii) $\omega(H') \subset \{ \text{Òrbites periòdiques de mòdul constant} \}$

Demostració: (i) És clar, ja que $T(H) \subset H$ i $T(H') \subset H'$.

(ii) Si $w(H') = \phi$, no hi ha res a demostrar. Considerarem el cas $\omega(H') \neq \phi$ i prendrem $y \in \omega(H')$; aleshores existeix un $x \in H'$ i una successió $m_n \uparrow \infty$ tal

que $\lim_{n \rightarrow \infty} T^{m_n}(x) = y$; tenim doncs

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^{m_n+i}(x) = T^i(y) \quad i \in \mathbb{N}$$

Ara bé $|y|$ ha d'ésser igual a $|T^i(y)|$ per a tot $i \in \mathbb{N}$, ja que la semiòrbita positiva de y ha d'ésser creixent i amb mòduls acotats. Tenim per hipòtesi, que el cardinal de $C_r \cap T(C_r)$ és finit per a tot r , i d'altra banda que $\{ T^i(y), i \in \mathbb{N} \} \subset C_r \cap T(C_r)$. Així doncs, existeixen $i \neq j$ tals que $T^i(y) = T^j(y)$, és a dir que l'òrbita del punt y , O_y és periòdica i $O_y \subset C_r$ per a algun r . C.V.D.

Lema 7.6. Sigui T un homeomorfisme de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 tal que $\#(C_r \cap T(C_r))$ és finit per $r > 0$, i sigui $N = \sup (\#(C_r \cap T(C_r)))$ (pot ésser infinit). Aleshores les òrbites n -periòdiques de mòdul constant compleixen $n \leq N$.

Proposició 7.7. Sigui T un difeomorfisme de classe C^1 que preserva l'àrea de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 tal que $\#(C_r \cap T(C_r))$ és finit per $r > 0$, i sigui C una corba de Jordan invariant per a T , que envolta l'origen. Aleshores

(i) Si hi ha punts de H' (vegeu 7.1) a l'interior de C , també hi ha òrbites periòdiques de mòdul constant.

(ii) Si a l'interior de C hi ha un punt fix hiperbòlic x (sense reflexió), diferent del 0, llavors genèricament hi ha punts de H' a l'interior de C .

Demostració: (i) Tenim que les òrbites d'aquests punts de H' estan acotades, aleshores $\omega(H') \neq \phi$. Obtenim el resultat enunciat per la proposició 7.5.

(ii) Genèricament la recta tangent a $W^s(x)$ que passa per x no és tangent al cercle de radi $|x|$ i centre 0. Aleshores els punts d'una de les dues branques, pel teorema de Hartman, són punts de H' . C.V.D.

Aquest mateix estudi l'hauríem pogut fer amb les òrbites estrictament decreixents. En aquest cas ens interessaria el conjunt

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} T^{-i}(x: |x| < |T^{-1}(x)|) = \bigcap_{i=1}^{\infty} T^{-i}((M \cup D)^c).$$

Observem que si 0 és un punt fix hiperbòlic per a T , aleshores

aquest conjunt coincidiria amb la varietat estable de 0, $W^s(0)$, un entorn de l'origen. Si les imatges $T^{-i}((M \cup D)^c)$ decreixen, en funció de i , en un entorn de zero tindrem a $W^s(0)$ encaixada entre dues corbes de manera fàcil, prenent T^{-i} de la frontera d'aquest conjunt per a i suficientment avançat.

Estudiarem ara aquests conjunts per a $T_{a,b}$, que és un difeomorfisme que preserva l'àrea, i tal que $\#(C_r \cap T(C_r)) = 4$ si $a > 1$ ja que la imatge del cercle $x^2 + y^2 = r^2$ és l'el·lipse $a^{-2}x^2 + a^2y^2 = r^2$.

El conjunt D és

$$D = \{ (x,y) : x = \pm ay \}$$

També podem calcular M

$$M = \{ (x,y) : |x| > |T_{a,b}^{-1}(x,y)| \} = \{ (x,y) : |x| > a|y| \}$$

Els conjunts $T_{a,b}^{-i}(D \cup M)$ són espirals, que es deformen, cada cop més fines i que donen més voltes a l'entorn de l'origen. En créixer a fa que ocupin més àrea, i que es deformin més de pressa, mentre que el valor de b fa com d'escala del dibuix.

És difícil de trobar el conjunt H' associat a $T_{a,b}$; sembla que haurà de tenir mesura zero. Vegem per a això el raonament intuïtiu següent. Si la seva mesura fos positiva, hi hauria punts que s'acumularien: aleshores algun d'aquests punts, després d'aplicar un nombre suficientment gran d'interaccions, sembla que en aplicar $T_{1,b}$ cauria dins la regió $\{ (x,y) : |x| < a|y| \}$ i per tant el seu mòdul ja decreixeria.

H' és no buit, ja que veurem que té òrbites de mòdul constant; també conté les varietats estables d'alguns dels punts hiperbòlics d'aquestes, i, finalment, per alguns valors de a i b té òrbites no acotades (lema 7.8).

Per la pertorbació especial de $T_{1,b}$ hom observa que els punts que són sobre l'eix OX , un cop aplicada $T_{1,b}$, tendeixen a allunyar-se de l'origen; aleshores, si trobem un punt tal que $O_x^+ \subset OX$, serà un punt que s'escaparà a l'infinit de forma creixent.

Lema 7.8. Siguin a i b tals que $a^b = n \in \mathbb{N}, n > 1$; aleshores el punt $((2\pi)^{1/b}, 0)$ s'escapa a l'infinit de forma creixent, i sobre l'eix OX . De fet

$$T_{a,b}^m((2\pi)^{1/b}, 0) = (a^m(2\pi)^{1/b}, 0) \quad m \in \mathbb{N}$$

Demostració: Si imposem la condició que $T_{a,b}(x) \in OX$, obtenim $a^{-1}x \sin x^b = 0$, o sigui que $\sin x^b = 0$. Imposem que $\cos x^b = 1$ (és a dir, $T_{a,b}(x, 0) = (ax, 0)$). Si volem que O_x^+ compleixi aquesta propietat, necessitem que $\sin(a^m x)^b = 0$, $\cos(a^m x)^b = 1$, $m \in \mathbb{N}$, és a dir

$$a^b m x^b = 2n_m \pi \quad n_m \in \mathbb{N}$$

Per a $m = 0$ obtenim $x^b = 2n_0\pi$ i per tant $(a^b)^m = n_m/n_0$, per a $m \in \mathbb{N}$. D'aquí deduïm que a^b ha d'ésser un nombre natural, $a^b = n$, i per tant $n_m = n^m n_0$. Tenim doncs que

$$T_{a,b}^m((2n_0\pi)^{1/b}, 0) = (a^m(2n_0\pi)^{1/b}, 0) \quad m \in \mathbb{N}$$

Prenent $n_0 = 1$, obtenim el resultat desitjat C.V.D.

Proposició 7.9. Donats a i b tals que $a^b = n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, el punt

$$(2\pi/n)^{1/b}(\cos(2\pi/n), \sin(2\pi/n))$$

s'escapa a l'infinit de forma creixent per a iterats de $T_{a,b}$.

Demostració: Veiem que

$$T_{a,b}((2\pi/n)^{1/b}\cos(2\pi/n), (2\pi/n)^{1/b}\sin(2\pi/n)) = ((2\pi)^{1/b}, 0)$$

Aleshores, aplicant el lema 7.8, queda demostrada la proposició. C.V.D.

D'aquesta proposició obtenim, fix b , que donats els valors de $a = n^{1/b}$, $n > 1$, hi ha un punt de mòdul $(2\pi)^{1/b}/n$ que s'escapa a l'infinit de forma creixent. Podem suposar, fent interpolació, que, donat el valor $a > 2^{1/b}$, hi ha un punt de mòdul $(2\pi)^{1/b}/a$ que s'escapa a l'infinit. Tenim doncs una cota (poc refinada) de la regió de corbes invariants de $T_{a,b}$ que envolten l'origen, en funció de a i b .

Observem que quan a tendeix a infinit, el mòdul d'un possible punt que s'escapés a l'infinit hauria de tendir a zero.

D'aquesta cota, si anomenem radi de la regió de corbes invariants a la distància de l'última corba a l'origen, podem enunciar els resultats següents.

Proposició 7.10. Sigui $T_{a,b}$ l'aplicació donada a (1.1) aleshores

(i) Fixat b , en augmentar a disminueix el radi de la regió de corbes invariants, tendint aquest a zero quan a tendeix a infinit.

(ii) En augmentar a , la cota de la regió de corbes invariants donada al lema 7.8 disminueix més de pressa com més gran sigui b .

NOTA 1. El resultat (i) d'aquesta proposició és ben conegut numèricament per a tot twist pertorbat. És més, existeix a_0 tal que si $a > a_0$ ja no hi ha corbes invariants que envolten l'origen.

Un estudi detallat d'aquesta afirmació, per a l'aplicació $T_{a,b}$ serà fet numèricament a la secció 8, per a $b = 3$.

NOTA 2. El resultat (ii) sembla provar que, com més gran és el gir del twist, més aviat desapareixen les corbes invariants del seu twist pertorbat. Aquest resultat es pot predir del teorema KAM, ja que per a l'existència d'aquestes corbes imposem condicions de petitesa sobre $DT_{a,b}$ i el nombre b apareix com a factor d'aquesta.

Observem que, en certa manera, el que hem fet per a estudiar la regió de corbes invariants és estudiar "la varietat estable de l'infinit, que és fix per a $T_{a,b}$ ". Passant l'aplicació de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 a una aplicació de l'esfera, podríem intentar de trobar aquesta varietat, però obtenim que l'infinit és un punt fix no aïllat, i per tant no hi és aplicable el teorema de Hartman o les seves variants.

Els punts trobats a la proposició 7.8 són de $W^s(\infty)$. Aplicant-hi S_a n'obtenríem uns altres de $W^u(\infty)$. Si $W^s(\infty) \cap \{x = \pm ay\} \neq \emptyset$ tindrem punts homoclínics de l'infinit.

Ja hem vist a la proposició 7.5 que les òrbites periòdiques de mòdul constant tenen un paper important. Anem a determinar-les totes per a la família d'aplicacions $T_{a,b}$.

Lema 7.11. Les òrbites 4-periòdiques de mòdul constant de l'aplicació $T_{a,b}$ són:

- (i) Punts (r_n, θ) on $\tan \theta = \pm 1/a$ i $r_n = (\pi/2 + 2n\pi)^{1/b}$ $n \in \mathbb{N}$
 (ii) Punts (r_n, θ) on $\tan \theta = \pm 1/a$ i $r_n = (3\pi/2 + 2n\pi)^{1/b}$ $n \in \mathbb{N}$

Demostració: Per la proposició 5 tenim que l'òrbita 4-periòdica de mòdul constant serà continguda a les rectes $x = \pm ay$. Tenim doncs dues possibilitats:

- (i) $T_{a,b}(ay, y) = (ay, -y)$, d'on deduïm que $\sin^b = 1$, $\cos^b = 0$, on $r = (a^2 y^2 + y^2)^{1/2}$.
 (ii) $T_{a,b}(ay, y) = (-ay, y)$, d'on deduïm que $\sin^b = -1$, $\cos^b = 0$.

C.V.D.

Observem que en el cas (i) obtenim unes òrbites que es bifurquen dels cercles de punts de radi $(\pi/2 + 2n\pi)^{1/b}$, 4-periòdics per a $T_{a,b}$, i, en l'altre cas, unes altres que ho fan dels cercles de radi $(3\pi/2 + 2n\pi)^{1/b}$. L'existència d'òrbites d'aquest tipus ens ve donada pel teorema de Poincaré-Birkhoff. Ens falta com a mínim una òrbita 4-periòdica que es bifurqui de cada un dels cercles esmentats, la d'estabilitat contrària a la trobada en aquest lema.

Proposició 7.12. Totes les òrbites periòdiques de mòdul constant de l'aplicació $T_{a,b}$, es bifurquen dels cercles $r = (n\pi/2)^{1/b}$ i són:

- (i) Les de punts fixos de $T_{a,b}$
 (ii) Les òrbites 2-periòdiques obtingudes a les proposicions (6.11) i (6.15).
 (iii) Les òrbites 4-periòdiques obtingudes al lema 7.11.

A més totes elles són simètriques (respecte a $\pm S_a$).

Demostració: Sabem per la proposició 5 que seran 1,2,3 ó 4-periòdiques. El cas 3-periòdic és impossible pel fet d'esser $T_{a,b}$ simètrica respecte a l'origen i ésser els punts de la possible òrbita sobre les rectes $x = \pm ay$.

C.V.D.

8. ESTUDI NUMÈRIC DE LA REGIÓ DE CORBES INVARIANTS

Abordarem en aquesta última secció un problema molt tractat en estudiar les aplicacions twist pertorbat: la desaparició de les corbes invariants de $T_{a,b}$ i per què desapareixen. Ensem amb anirem calculant el nombre de rotació d'aquestes corbes.

Un camí molt utilitzat, degut a Greene, consisteix a associar la inestabilitat d'unes certes òrbites de punts n -periòdics que envolten l'origen amb la inexistència de corbes invariants. Per a això hem d'estudiar tots els punts n -periòdics que siguin sobre una recta (que sigui una simetria del problema, per exemple) i veure a partir de quan aquests punts s'inestabilitzen estudiant llur paràmetre d'estabilitat.

Nosaltres estudiarem aquestes corbes per exploració directa dels iterats de l'aplicació. Hom no pot tenir mai la certesa absoluta d'haver trobat una corba invariant, poden ser illes n -periòdiques, illes molt aplanades. . . Malgrat tot, tenint en compte que sobre les corbes invariants els iterats de $T_{a,b}$ han de seguir unes regles estrictes, les governades pel nombre de rotació de la corba, podem dir amb bastant d'exactitud si som sobre una corba o no.

Un altre problema amb què ens trobem, és el dels errors d'arrodoniment. Si estem calculant $T^n(r, \theta) = (r_n, \theta_n)$ i l'error d'arrodoniment és ϵ , suposant aleatorietat i independència d'aquests errors, tenim que l'error comès en calcular r_n és de l'ordre de $\epsilon n^{1/2}$ i en calcular θ_n és de l'ordre de $\epsilon n^{3/2}$ si som en una regió on " $T_{a,b}$ es comporta com un twist". A la regió en què el comportament de $T_{a,b}$ és "estocàstic", l'error d'arrodoniment creix exponencialment amb n ; per a més detalls, vegeu [H].

A tots els càlculs fets trobarem ρ' , que és el nombre de rotació ρ , multiplicat per 2π .

El càlcul de l'elevació F associada a $T_{a,b}$ pot ésser fet fàcilment, ja que $T_{a,b} = g_a T_{1,b}$ i per a $T_{1,b}$ el punt (x,y) gira $(x^2 + y^2)^{b/2}$ radianys, mentre que $g_a(x,y) = (ax,y/a)$ no canvia els punts de quadrant.

En calcular numèricament ρ' com a

$$\rho' = \lim \frac{F^n(\theta)}{n} \tag{8.1}$$

ho fem utilitzant el criteri següent: si m és tal que

$$\left| \frac{F^{m+1}(\theta)}{m+1} - \frac{F^m(\theta)}{m} \right| < \epsilon \tag{8.2}$$

aleshores $\rho' \sim F^{m+1}(\theta)/(m+1)$.

Seria interessant de saber quants decimals bons obtenim per aquest sistema. Per a $a = 1$ tenim el resultat següent:

Lema 8.1. Sigui C una corba mínima de $T_{1,b}$ que envolta l'origen i prenem un punt d'ella d'argument θ_0 . Si calculem ρ' per (8.1) i ens aturem quan (8.2), l'error comés és $E(\theta_0, \epsilon) \sim (\theta_0 \epsilon)^{1/2}$.

Demostració: En aquest cas és fàcil de veure que $F^m(\theta_0) = \theta_0 - m\rho'$, i per tant $|F^{m+1}(\theta)/(m+1) - F^m(\theta)/m| = \theta_0/(m(m+1))$ i l'error comés és

$$|F^{m+1}(\theta)/(m+1) - \rho'| = \theta_0/(m+1) \quad (8.3)$$

Així (8.2) ens diu $\theta_0 < m(m+1)\epsilon$, és a dir

$$m^2 + m - \theta_0 \epsilon^{-1} > 0$$

Si resollem aquesta equació tenim $m > (0.25 + \theta_0 \epsilon^{-1})^{1/2}$. Així el nombre d'iteracions en què ens aturarem és $m(\theta_0, \epsilon) \sim (\theta_0 \epsilon^{-1})^{1/2}$. Ara bé, per (8.3), l'error $E(\theta_0, \epsilon)$ és

$$E(\theta_0, \epsilon) \sim \theta_0 / (\theta_0 \epsilon^{-1})^{1/2} = (\theta_0 \epsilon)^{1/2} \quad \text{C.V.D.}$$

Observeu que aquest error depèn del punt en què comencem a iterar. Si prenem $\epsilon = 10^{-10}$, que és el valor per al qual farem quasi tots els càlculs, tenim que $E \leq 3 \cdot 10^{-5}$.

Per $a > 1$, prop de 1, aquest resultat serà cert. De fet, si prenem $\epsilon = 10^{-10}$, $a = 1.23$, $b = 3$ i la corba invariant que comença a (0.7,0), obtenim

Punt inicial	Nombre d'iteracions	ρ'
(0.7,0)	86539	-0.29078858
(-0.7,0)	13920	-0.29058613
(0.,0.56)	65417	-0.29076433
(0.,-0.56)	55456	-0.29070327

Per als valors de a i b estudiats, aquest resultat sembla confirmar que per a $\epsilon = 10^{-10}$ tenim un error aproximat de 0.0001. Podem assegurar que els quatre punts són a la mateixa corba per les simetries de $T_{a,b}$.

Obtenir numèricament més xifres decimals bones és un procés llarg d'iteracions, ja que, com veiem al lema 8.1, sembla que l'error depèn de n com a $1/n$.

Fixarem $b = 3$. Podem estudiar com evoluciona la regió de corbes invariants en variar a , i obtenim que l'última corba trobada, per a la

precisió estudiada, és la que passa per $(0.61416, 0.)$, per a $a = 1.274$. El valor ρ' d'aquesta calculat per a ϵ més petit que 10^{-10} és $\rho' = -0.23084 \dots$

Sembla que la desaparició d'aquestes corbes pugui estar relacionada amb l'aparició d'òrbites, que són molt a prop de l'origen que s'escapen a l'infinit. Numèricament no és fàcil de dir si això és cert, ja que les òrbites necessiten moltes iteracions per a allunyar-se de l'origen. Per a $a = 1.29$, l'òrbita que comença a $(0.1, 0.)$ s'escapa a l'infinit amb més de 300.000 iteracions. A la figura (8.1) hom mostra l'òrbita del punt $(0.3, 0.)$ per a $a = 1.3$, que s'escapa a l'infinit per unes 42.000 iteracions.

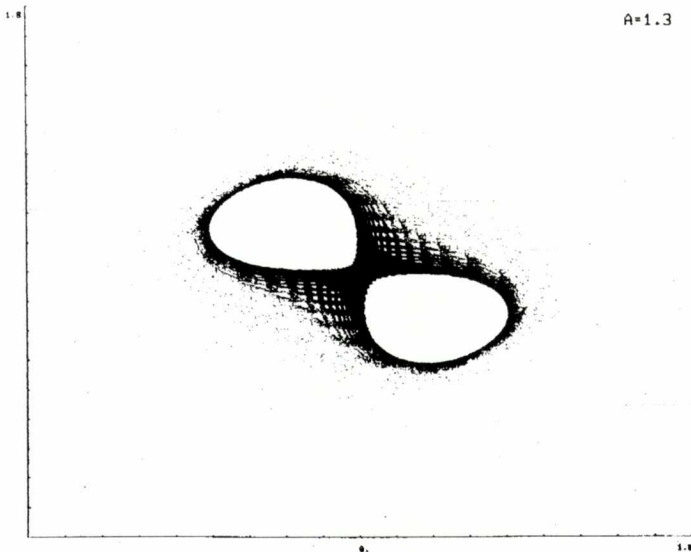
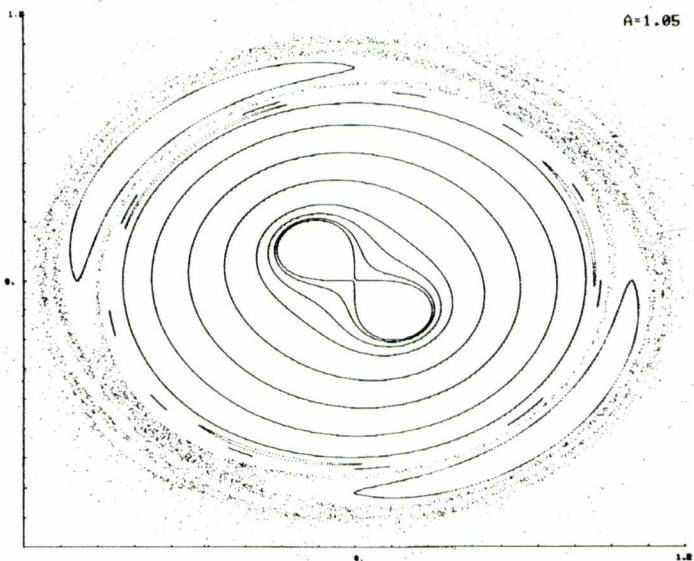
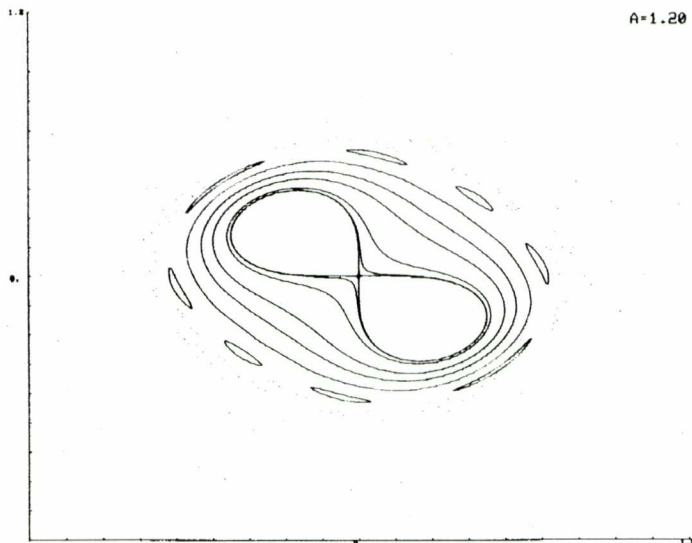


Fig. 8.1. Òrbita del punt $(0.3, 0)$ per a $T_{1.3, 3}$.

Aquest fet està relacionat amb l'escapament de $W^s(0)$ i $W^u(0)$. Veiem numèricament que, en augmentar a , aquestes varietats es van allunyant cada cop més de l'origen (vegeu figura (5.1)).

A les figures de (8.2) a (8.5), hi ha representades unes quantes òrbites de $T_{a, 3}$ per als valors de a que hom indica. En aquestes figures hom veu clarament el procés de decreixement de la regió de corbes invariants en augmentar a .

La major part d'elles són òrbites amb 3.000 punts, tret dels casos en què hi ha "comportament estocàstic".

Fig. 8.2. Diverses òrbites de $T_{1.05,3}$.Fig. 8.3. Diverses òrbites de $T_{1.20,3}$.

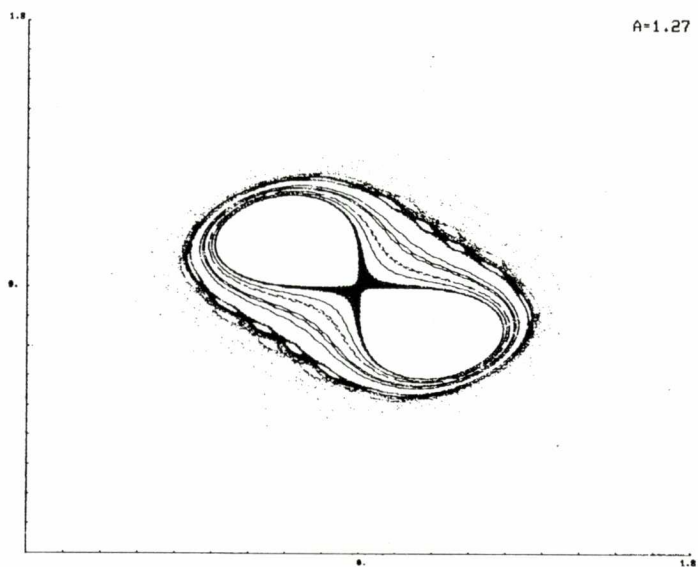


Fig. 8.4. Diverses òrbites de $T_{1.27,3}$.

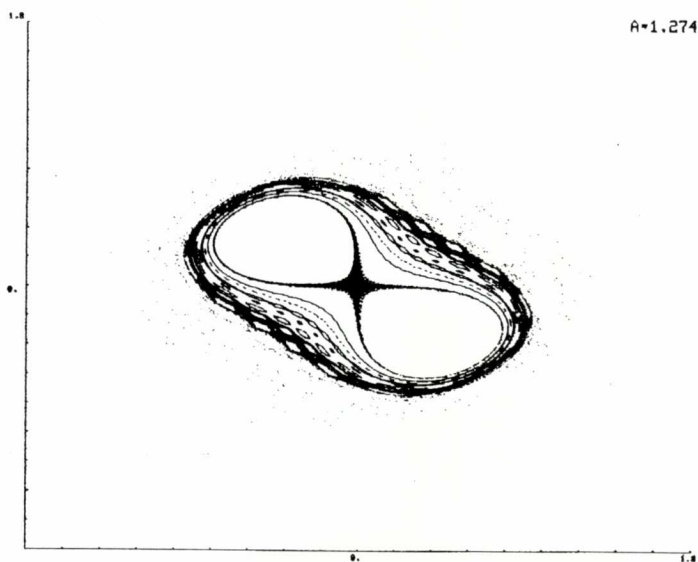


Fig. 8.5. Diverses òrbites de $T_{1.274,3}$.

BIBLIOGRAFIA

- [A] V. I. ARNOLD, Proof. of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonians, *Russian Math. Surveys*, 18, 1963, p. 9-36.
- [AA] V. I. ARNOLD i A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la Mécanique Classique*, Gauthier-Villars, 1967.
- [D] R. L. DEVANEY, Reversible diffeomorfismes and flows, *Transactions of the American Mathematical Society*, 218, 1976, p. 89-113.
- [De] R. De VOGELAERE, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, vol. IV, *Annals of Mathematical Studies*, 41, Princeton 1958, p. 53-84.
- [E] R. W. EASTON, Perturbed twist maps, homoclinic points and ergodic zones, *Instabilities in dynamical systems*, 1979, p. 41-47.
- [GLL] G. GÓMEZ i J. LLIBRE, A note on a conjecture of Poincaré, *Celestial Mechanics*, 24, 1981, p. 335-343.
- [H] M. HENON, *Problèmes numériques liés à la recherche des solutions des transformations ponctuelles conservatives*, éditions du CNRS, Paris 1976, p. 387-400.
- [M] J. MOSER, *Stable and Random Motions in Dynamical systems*, Princeton University Press, Princeton 1973.
- [R] H. RÜSSMAN, On the existence of invariant curves of twist mappings of an annulus, 1981 (per aparèixer).
- [SM] C. L. SIEGEL i J. K. MOSER, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlín-Heilderberg-Nova York 1971.
- [Sm] S. SMALE, Differential dynamical systems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73, 1967, p. 747-817.