EQUACIONS DE TRANSPORT GENERALITZADES PER A FLUXOS TURBULENTS[1]

per

FRANCESC XAVIER GRAU I FRANCESC GIRALT [2]
Departament de Química Tècnica. Facultat de Ciències Químiques.
Universitat de Barcelona. Tarragona.

ABSTRACT

The transport equation for turbulent flows are deduced in tensorial notation and for a generalized coordinate system. The equations of continuity, Navier-Stokes and Reynolds, as well as the transport equations for mean vorticity, turbulent kinetic energy and dissipation rate are presented.

RESUM

Es dedueixen les equacions de transport en forma tensorial per a fluxos turbulents en coordenades generalitzades. Es presenten les equacions de continuïtat, les equacions de Navier-Stokes i les equacions de Reynolds, així com les equacions de transport de la vorticitat, de l'energia cinètica turbulenta i de la velocitat de dissipació de l'energia turbulenta mitjanes.

INTRODUCCIÓ

El desenvolupament tecnològic en general i el del sector químic en particular, precisa, entre d'altres, la resolució simultània de les equacions bàsiques de transferència de quantitat de moviment, calor i matèria i de models matemàtics complementaris que descriguin quantitativament els diferents processos químics i físics que configuren les activitats de recerca o producti-

1. An english version of the paper may be obtained from the authors.
2. Correspondència.

ves pròpies del sector, independentment del grau de dificultat o de la complexitat dels mètodes experimentals, numèrics o estadístics que calgui emprar.

L'apropament actual entre la recerca fonamental i la tecnològica es palesa, per exemple, en la necessitat de dissenyar equips industrials de transferència de matèria, calor i quantitat de moviment, amb una base teòrica que ultrapassi les limitacions dels models empírics, per tal de possibilitar un millor control i eficàcia operativa de les plantes i processos químics i físics actualment en operació o de futura implantació. Per altra part, també és necesari en molts processos de tecnologia punta, com els relacionats amb el creixement cristal·lí o amb indústries aeroespacials, disposar de mètodes de simulació potents que permetin predir els processos de transferència abans esmentats en interfases de geometria i amb condicions de contorn complexes. En aquest context i donat que la majoria de processos de transferència en sistemes fluids d'interés fonamental o tecnològic són bé turbulents (caràcter irregular i aleatori en el temps) o bé laminars (fluxos ben definits), però en sistemes evolutius de geometria complexa o canviant, és del tot necessari deduir les equacions fonamentals de transport per a fluxos evolutius en forma tensorial i per a un sistema generalitzat de coordenades, així com elaborar algoritmes de càlcul per a resoldre i descriure numèricament tots els processos de transferència abans esmentats.

El desenvolupament creixent de la tecnologia dels computadors digitals ha comportat un augment de la capacitat d'emmagatzematge de dades i de la velocitat de càlcul que permeten endegar l'estudi de sistemes de flux considerablement complexos, malgrat que encara no és possible la resolució precisa de les equacions que regeixen el moviment dels fluids en qualsevol geometria i règim de flux. Així, els avenços en cibernètica s'han convertit en els motors del desenvolupament de la tecnologia relacionada amb la mecànica de fluids i els processos de transferència de matèria i calor. La resolució numèrica dels fluxos, confinants o no, al voltant d'obstacles, ha estat un dels sistemes més estudiats en els darrers anys.[1,2]

Paral·lelament i simbiòtica al desenvolupament cibernètic, s'han produït avenços considerables en les tècniques de generació de sistemes de coordenades generalitzades autoadaptatives. Efectivament, si es volen resoldre de manera discreta les equacions de transport en un domini de càlcul de contorn arbitrari, es tenen dues possibilitats per construir la xarxa que defineix discretament aquest domini. Una d'elles consisteix en emprar una xarxa cartesiana, la qual cosa implica utilitzar expressions especials prop de les fronteres i, generalment, xarxes irregulars. Una tendència més recent, però, és utilitzar coordenades que s'adaptin als límites del domini de càlcul; en aquests sistemes cada component frontera és una línia coordenada[3]. En camps tan diversos com la meteorologia[4] o la elasto-estàtica i geologia[5,6] l'ús de sistemes de coordenades curvilínies és considerat cada cop més necessari per a una millor aplicació de les condicions de contorn en la resolució de les equacions diferencials que modelitzen els fenòmens objecte d'estudi en aquests camps.

El present estudi no contempla la generació de sistemes de coordenades curvilínies[7], sinò que té com objectiu la deducció de les equacions de transport en forma tensorial per a fluxos turbulents en coordenades generalitzades. Actualment, encara és necessària aquesta deducció, ja que en endegar l'estudi numèric per a descriure una configuració complexa i decidir utilitzar un sistema de coordenades autoadaptatives, hom troba que els textos clàssics[8,9,10] només tracten les expressions de les equacions de transport en els sistemes de coordenades d'ús més comú, és a dir cartesià, cilíndric i esfèric. Per altra banda, la literatura especialitzada només proveeix l'expressió generalitzada de les equacions de Navier-Stokes[11,12] o de les de transport d'un escalar[12] per valors instantanis de les diferents variables.

L'objectiu d'aquest treball és omplir el buit existent pel que fa referència a les equacions de transport corresponents a variables mitjanes, ja que són les úniques que permeten l'estudi dels fluxos turbulents i la predicció numèrica dels corresponents processos de transferència. En apartats successius es deriven, de manera senzilla i directa, les equacions de continuïtat, les equacions de Navier-Stokes i les equacions de Reynolds, així com les equacions de transport de la vorticitat, de l'energia cinètica turbulenta i de la velocitat de dissipació de l'energia cinètica turbulenta mitjanes.

EQUACIÓ GENERAL DE CONSERVACIÓ I EQUACIÓ DE CONTINUÏTAT*

L'equació general de conservació per a camps conservatius, pot expressar-se en forma integral, segons[11], per

$$\frac{d}{dt}\iiint A dV + \iint B \cdot n dS = \iiint C dV \qquad [1]$$

Així, la velocitat de canvi de la magnitud de la variable considerada dins del volum V més el flux net de sortida de la mateixa a través de la superfície S que conté V, és igual a la velocitat de generació. Les variables A, B i C són quantitats tensorials tals que A i C tenen sempre el mateix ordre i B l'immediatament superior. Si a l'equació [1] se li aplica el teorema de transport de Reynolds[8,11] donat per l'expressió

* Els conceptes bàsics d'anàlisi tensorial i les definicions d'operadors s'inclouen a l'annex.

$$\frac{d}{dt}\iiint A dV = \iiint \frac{\partial A}{\partial t} dV + \iint A(\upsilon \cdot n)\, dS \qquad [2]$$

es dedueix fàcilment que

$$\iiint \frac{\partial A}{\partial t} dV + \iint h \cdot n dS = \iiint C dV \qquad [3]$$

en la que $h = A \cdot \upsilon + B$.

Per altra part, el teorema de Green permet establir que

$$\iiint \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div} h \right) dV = \iiint C dV \qquad [4]$$

la qual equació condueix a l'expressió diferencial general del teorema de conservació,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div} h = C \qquad [5]$$

en la que C és un terme de generació.

L'equació de continuïtat

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \upsilon) = 0 \qquad [6]$$

s'obté a partir de l'expressió [5] pel cas particular $A = \rho$ i $B = C = 0$. Emprant l'expressió de l'operador divergència, donada a l'annex, l'equació [6] en notació tensorial esdevé

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho J \tilde{u}^i) = 0 \qquad [7]$$

$\tilde{u}^i$ són les components contravariants del vector velocitat en les coordenades generalitzades x^i, ambdues definides a l'annex.

EQUACIÓ DE NAVIER-STOKES

L'equació general de conservació [5] permet plantejar fàcilment el balanç de quantitat de moviment,

$$\frac{\partial \rho \upsilon}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \upsilon \upsilon - T) = \rho f \qquad [8a]$$

o

$$\frac{\partial \rho \tilde{u}^i}{\partial t} + (\rho \tilde{u}^j \tilde{u}^i)_{,j} = \rho \tilde{f}^i + \tilde{t}^{ij}_{,j} \qquad [8b]$$

igualant $A = \rho \upsilon$, $B = -T$ i $C = \rho f$. El tensor esforç total $\tilde{t}^{ij}$ pot descompossar-se en un tensor pressió i un tensor esforç viscós,

$$\tilde{t}^{ij} = -\tilde{p}\, g^{ij} + \tilde{\sigma}^{ij} \qquad [9]$$

Per a un fluid newtonià i isotròpic, $\tilde{\sigma}^{ij}$ es relaciona linealment i isotròpica amb el tensor deformació segons [8]

$$\tilde{\sigma}^{ij} = G^{ijmn}\, \tilde{s}_{mn} \qquad [10]$$

en la que G^{ijmn} és un tensor isotròpic de quart ordre purament contravariant i simètric en (i, j) i (m, n). D'acord amb Aris[8], G^{ijmn} ha d'ésser una combinació lineal dels productes dels tensors mètrics definits a l'annex $g^{ij} g^{mn}$ i $(g^{im} g^{jn} + g^{in} g^{jm})$ i l'equació [10] esdevé

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{ij} &= \lambda\, g^{ij} g^{mn}\, \tilde{s}_{mn} + \mu\, (g^{im} g^{jn} + g^{in} g^{jm})\, \tilde{s}_{mn} \\ &= \lambda\, g^{ij}\, \tilde{s}^m_m + 2\, \mu\, \tilde{s}^{ij}\end{aligned} \qquad [11]$$

en la que $\tilde{s}^{ij}$ és el tensor deformació definit per

$$\tilde{s}_{ij} = \frac{1}{2}\, (\tilde{u}_{j,i} + \tilde{u}_{i,j}) \qquad [12]$$

Si s'aplica la hipòtesi de Stokes $3\lambda + 2\mu = 0$ i es considera el cas particular de l'equació [12] $\tilde{s}^m_m = \tilde{u}^m{}_{,m}$, s'obté

$$\tilde{t}^{ij} = -(\tilde{p} + 2/3\, \mu\, \tilde{u}^m{}_{,m})\, g^{ij} + 2\, \mu\, \tilde{s}^{ij} \qquad [13]$$

Donat que el tensor esforç total $\tilde{t}^{ij}$ està afectat per l'operador divergència a l'equació [8a], és necessari derivar covariantment l'expressió [13]

$$\begin{aligned}\tilde{t}^{ij}_{,j} &= -(\tilde{p}_{,j} + \lambda\, \tilde{s}^{m}_{m,j})\, g^{ij} + 2\,\mu\, \tilde{s}^{ij}_{,j} \\ &= -(\tilde{p}_{,j} + \lambda\, \tilde{u}^{k}_{,kj})\, g^{ij} + \mu\, g^{ik}\, g^{jm}\, (\tilde{u}_{k,mj} + \tilde{u}_{m,kj}) \\ &= -(\tilde{p}_{,j} + (\lambda + \mu)\, \tilde{u}^{k}_{,kj})\, g^{ij} + \mu\, g^{jm}\, \tilde{u}^{i}_{,jm} \qquad [14]\end{aligned}$$

per obtenir finalment l'equació de Navier-Stokes, la qual en forma tensorial conservativa és

$$\frac{\partial\, \rho\, \tilde{u}^{i}}{\partial t} + (\rho\, \tilde{u}^{j}\, \tilde{u}^{i})_{,j} = \rho \tilde{f}^{i} - g^{ij}\, \tilde{p}_{,j} + (\lambda + \mu)\, g^{ij}\, \tilde{u}^{k}_{,kj} + \mu g^{jm}\, \tilde{u}^{i}_{,jm} \qquad [15a]$$

i en forma no conservativa

$$\frac{\rho\, \partial\, \tilde{u}^{i}}{\partial t} + \rho\, \tilde{u}^{j}\, \tilde{u}^{i}_{,j} = \rho\, \tilde{f}^{i} - g^{ij}\, \tilde{p}_{,j} + (\lambda + \mu)\, g^{ij}\, \tilde{u}^{k}_{,kj} + \mu\, g^{jm}\, \tilde{u}^{i}_{,jm} \qquad [15b]$$

Per a fluids incompressibles de viscositat constant i en absència de camps de forces externs, les equacions de Navier-Stokes [15] s'expressen com

$$\frac{\partial\, \tilde{u}^{i}}{\partial t} + \tilde{u}^{j}\, \tilde{u}^{i}_{,j} = \frac{\partial\, \tilde{u}^{i}}{\partial t} + (\tilde{u}^{j}\, \tilde{u}^{i})_{,j} = -\, \frac{g^{ij}}{\rho}\, \tilde{p}_{,j} + \nu\, g^{jk}\, \tilde{u}^{i}_{,jk} \qquad [16]$$

Les restriccions de propietats físiques constants i d'absència de camps de forces externs, imposades en l'equació [16] es mantindran en els apartats següents.

EQUACIONS DE TRANSPORT PER A VARIABLES MITJANES

Equació de Reynolds.

La descripció d'un flux turbulent en tots els punts de l'espai i en qualsevol instant del temps no és factible, per la qual cosa s'adopta en aquest treball la descomposició de Reynolds[13]. Els valors instantanis de totes les variables es descomposen en els respectius camps mitjans (lletres majúscules o amb sobrebarra) i fluctuants (lletres minúscules); $\tilde{u}^i = U^i + u^i$, $\tilde{p} = P + p$, $\tilde{\sigma}^{ij} = \Sigma^{ij} + \sigma^{ij}$, $\tilde{t}^{ij} = T^{ij} + t^{ij}$, etc. En conseqüència, la mitjana temporal de qualsevol valor fluctuant és zero, $\bar{u}^i = 0$. Aplicant aquesta descomposició a les equacions de Navier-Stokes i realitzant la mitjana tempral, s'obté l'equació de Reynolds

$$\frac{\partial U^i}{\partial t} + U^j U^i_{,j} = \frac{\partial U^i}{\partial t} + (U^j U^i)_{,j} =$$

$$= \frac{-g^{ij}}{\rho} P_{,j} + \nu g^{jk} U^i_{,jk} - \overline{(u^j u^i)}_{,j} \qquad [17]$$

L'equació [17] juntament amb l'equació de continuïtat mitjana, forma un sistema obert d'equacions diferencials ja que no és possible, d'una manera estrictament deductiva, tancar el sistema; si es planteja una equació de transport pel tensor de Reynolds $\overline{u^i u^j}$ apareixen noves incògnites, sota la forma de moments d'ordre superior. Es per això que es fa necessari recòrrer a una modelització semi-empírica dels termes de transport turbulent.

Els models de tancament més estesos són els de tipus gradient[14]. Pel tensor de Reynolds aquest model s'expressa segons

$$-\overline{u^i u^j} = 2 \nu_t S^{ij} - 2/3\, g^{ij}\, \bar{k} \qquad [18]$$

essent l'energia turbulenta mitjana $\bar{k} = \dfrac{\overline{u^i u_i}}{2} = 1/2\, g_{ij} \overline{u^i u^j}$

i el tensor de deformació $S^{ij} = g^{ik} g^{lj} S_{kl}$

Substituint l'equació [18] a l'equació de Reynolds, resulta que

$$\frac{\partial U^i}{\partial t} + U^j U^i_{,j} = \frac{-g^{ij}}{\rho} P_{,j} + \nu g^{jk} U^i_{,jk} + 2 (\nu_t S^{ij})_{,j} - \frac{2}{3} g^{ij} \bar{k}_{,j} \qquad [19]$$

i tenint en compte que

$$\begin{aligned} g^{jk} U^i_{,jk} &= g^{il} g^{jk} U_{l,jk} + g^{il} U^j_{,jl} \\ &= g^{il} g^{jk} (U_{l,jk} + U_{k,lj}) = 2\, g^{il} g^{jk} S_{kl,j} \\ &= 2\, S^{ij}_{\ ,j} \end{aligned}$$

es dedueix finalment l'expressió

$$\frac{\partial U^i}{\partial t} + U^j U^i_{,j} = \frac{-g^{ij}}{\rho} \Pi_{,j} + 2\left[(\nu + \nu_t) S^{ij}\right]_{,j} \qquad [20]$$

En la que

$$\Pi = P + \frac{2}{3} \rho \overline{k}$$

Equació de transport de l'energia cinètica turbulenta mitjana.

Els models de tancament tipus gradient esmentats anteriorment foren suggerits per Boussinesq l'any 1877. Anys més tard, el 1925, Prandtl enuncià la coneguda hipòtesi de longitud de mescla, segons la qual la constant de proporcionalitat suggerida per Boussinesq, la viscositat turbulenta ν_t, era igual al producte d'una velocitat turbulenta i d'una longitud característica

$$\nu_t = V_t \, l_m \qquad [21]$$

Avui en dia aquesta és encara la idea central de molts dels diferents models de tancament utilitzats a nivell dels tensors de Reynods.

En models de zero equacions, V_t es fa proporcional al valor absolut del gradient de la velocitat mitjana[14,15]. En models d'ordre superior, V_t es relaciona amb alguna magnitud turbulenta que es conservi segons una equació de transport addicional[14,15]. A partir dels treballs de Prandtl (1949) i de Kolmogorov (1942), l'alternativa més estesa és definir

$$V_t \, \alpha \quad \sqrt{\overline{k}} \qquad [22]$$

D'aquesta manera l'equació de transport de l'energia cinètica turbulenta mitjana esdevé la base de la majoria dels models de transport turbulent que inclouen una avaluació local de l'escala de velocitat turbulenta, V_t.

L'equació de transport per a

$$\overline{k} = \overline{u^i u_i}/2 = 1/2 \, g_{ij} \, \overline{u^i u^j}$$

s'obté multiplicant per $1/2 \, g_{il} \, u^l$ l'equació de transport de u^i, obtinguda per diferència entre l'equació de Navier-Stokes i la de Reynolds, i realitzant la mitjana temporal a l'expressió resultant. En una etapa intermèdia es pot obtenir l'equació de transport del tensor de Reynolds $\overline{u^i u^l}$,

$$\frac{\partial \overline{u^i u^l}}{\partial t} + \overline{(u^j u^i u^l)}_{,j} + U^j \overline{(u^i u^l)}_{,j} + \overline{(u^l u^j)}\, U^i_{,j} + \overline{(u^i u^j)}\, U^l_{,j} = \qquad [23]$$

$$- = \frac{g^{lj}}{\rho} \overline{p_{,j} u^i} - \frac{g^{ij}}{\rho} \overline{p_{,j} u^l} + \nu\, g^{jk} \overline{(u^i u^l)}_{,jk} - 2\,\nu\, g^{jk} \overline{(u^i_{\ ,j} u^l_{\ ,k})}$$

i, finalment, l'equació de transport de $\overline{k}$,

$$\frac{\partial \overline{k}}{\partial t} + U^j \overline{k}_{,j} = -g_{ij} \overline{u^k u^j}\, U^i_{\ ,k} - \frac{1}{\rho} \overline{(p\, u^j + \rho\, u^j k)}_{,j} \qquad [24]$$

$$+ \nu\, g^{jk}\, \overline{k}_{,jk} - \nu\, g^{jk}\, g_{il} \overline{(u^i_{\ ,j})\,(u^l_{\ ,k})}$$

Si es modelitza el terme $\overline{pu^j + \rho\, u^j k}$ segons un esquema del tipus gradient,

$$-\overline{(p\, u^j + \rho\, u^j k)} = \frac{\nu_t}{\sigma_k}\, \rho\, g^{jk}\, \overline{k}_{,k} \qquad [25]$$

i es fa ús de les definicions donades a l'annex, es demostra que l'equació [24] esdevé igual a

$$\frac{\partial \overline{k}}{\partial t} + U^i \frac{\partial \overline{k}}{\partial x^i} = -g_{jk} \overline{u^i u^j}\, U^k_{\ ,i} + \frac{(\nu + \nu_t/\sigma_k)}{J} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(J\, g^{jk} \frac{\partial \overline{k}}{\partial x^k} \right) + \qquad [26]$$

$$+ g^{jk} \frac{\partial\, \nu_t/\sigma_k}{\partial x^j} \frac{\partial \overline{k}}{\partial x^k} \quad - \nu\, g^{jk} \overline{u_{l,j}\, u^l_{\ ,k}}$$

Al terme $\nu\, g^{jk} \overline{u_{l,j}\, u^l_{\ ,k}}$ se l'anomena dissipació isotròpica d'energia cinètica turbulenta ε i J és el Jacobià.

En modelitzar el tensor de Reyolds $\overline{u^i u^j}$ també segons un esquema del tipus gradient,

$-\overline{u^i u^j} = 2\,\nu_t\, S^{ij} - \frac{2}{3}\, g^{ij}\, \overline{k}$, l'equació [26] es transforma en l'expressió

$$\frac{\partial \overline{k}}{\partial t} + U^i \frac{\partial \overline{k}}{\partial x^i} = 2\, \nu_t S^{ij} S_{ij} + \frac{(\nu + \nu_t/\sigma_k)}{J} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(J g^{jk} \frac{\partial \overline{k}}{\partial x^k} \right) + \qquad [27]$$

$$+ g^{jk} \frac{\partial \nu_t/\sigma_k}{\partial x^j} \frac{\partial \overline{k}}{\partial x^k} \quad - \nu g^{jk} \overline{u_{l,j}\, u^l_{,k}}$$

Equació de Transport de la Dissipació Isotròpica d'Energia Cinètica Turbulenta.

L'aplicació de models de dues equacions, una per a $\overline{k}$ i una segona per a una altra magnitud turbulenta mitjana, per a caracteritzar fluxos turbulents, evita la necessitat d'especificar l'escala de longitud turbulenta, longitud de mescla. La magnitud addicional que més acceptació ha tingut a la bibliografia[14] ha estat la dissipació ε, identificant-se els corresponents esquemes com models $k - \varepsilon$.

L'equació de transport per a ε pot obtenir-se de manera exacta a partir de les equacions de Navier-Stokes, mitjançant les operacions de diferenciació, multiplicació i amitjanament. No obstant, l'alternativa més estesa a la bibliografia quan s'aplica en sistemes de coordenades clàssics, és modelitzar l'equació de ε, suposant-li un comportament anàleg al de $\overline{k}$.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U^i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^i} = - C_1 \frac{\varepsilon}{\overline{k}} S^{ij} S_{ij} + \frac{(\nu + \nu_t/\sigma_\varepsilon)}{J} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(J g^{jk} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^k} \right) \qquad [28]$$

$$+ g^{jk} \frac{\partial \nu_t/\sigma_\varepsilon}{\partial x^j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^k} - C_2\, \varepsilon^2/\overline{k}$$

Aquesta equació és la segona del model de tancament $k - \varepsilon$.

Equació de Transport de la Vorticitat Mitjana.

En sistemes de flux turbulents que en termes mitjans puguin ésser considerats bidimensionals i que tinguin un domini d'itegració monoconnexe, és convenient aplicar una transformació a les variables independents i treballar amb la vorticitat i la funció de corrent, conegudes per variables de Helmholtz. Aquest canvi redueix en una unitat el nombre d'equacions diferencials en derivades parcials que descriuen el comportament del flux bidimensional objecte d'estudi. No és comú, però, la utilització d'aquestes variables en fluxos turbulents, degut, probablement, a la dificultat que representa imposar condicions de contorn adequades pel que fa, sobretot, als valors de la vorticitat a la paret, els quals tenen una importància més crítica en l'esmentat règim. No obstant això, es troba a faltar en la literatura expressions per al transport de la vorticitat mitjana en sistemes de coordenades no cartesianes.

La vorticitat es defineix com el rotacional de la velocitat, per la qual cosa pot expressar-se segons l'equació

$$\omega^i = \varepsilon^{ijk} g_{kp} U^p{}_{,j} \qquad [29]$$

en la que ε^{ijk} és un tensor absolut, purament contravariant de tercer ordre, relacionat amb el símbol de permutació E^{ijk} mitjançant l'expressió

$$\varepsilon^{ijk} = \frac{E^{ijk}}{J} \qquad [30]$$

Per tant, E^{ijk} és un tensor relatiu contravariant de pes + 1[8] que pren els valors + 1 o – 1 segons ijk sigui una permutació parella o imparlla de 123 i el valor zero en els altres casos. En definitiva, per obtenir l'equació de transport de la component i de la vorticitat mitjana hem d'aplicar l'operador

$\frac{E^{ijk}}{J} g_{kp}(\quad)_{,j}$ a l'equació de Reynolds per a la component p de la velocitat,

$$\frac{E^{ijk}}{J} g_{kp} \left(\frac{\partial U^p}{\partial t} \right)_{,j} + \frac{E^{ijk}}{J} g_{kp} (U^l U^p{}_{,l})_{,j} = - \frac{E^{ijk}}{J} g^{lp} g_{kp} \Pi_{,jl} \qquad [31]$$

$$+ \frac{\nu E^{ijk}}{J} g^{lm} g_{kp} U^p{}_{,lmj} + 2 \frac{E^{ijk}}{J} g_{kp} (\nu_t S^{lp})_{,lj}$$

El primer terme de l'equació [31] pot reduir-se a

$$\frac{E^{ijk}}{J} g_{kp} \left(\frac{\partial U^p}{\partial t} \right)_{,j} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^{ijk}}{J} g_{kp} U^p{}_{,j} \right) = \frac{\partial \omega^i}{\partial t} \qquad [32]$$

per a sistemes de coordenades invariants en el temps.

El segon terme pot expandir-se si es té en compte que

$$U^l U^p{}_{,l} = U^l g^{pm} (U_{m,l} - U_{l,m}) + U^l g^{pm} U_{l,m}$$

$$= U^l g^{pm} \cdot 2 \cdot \Omega_{lm} + g^{pm} 1/2 (U^l U_l)_{,m} \quad [33a]$$

ja que

$$\Omega_{lm} = 1/2 (U_{m,l} - U_{l,m}) \quad [33b]$$

i que

$$1/2 (U^l U_l)_{,m} = 1/2 (U^l U_{l,m} + U_l U^l{}_{,m}) = 1/2 (U^l U_{l,m} + g^{lp} g_{ln} U^p U_{n,m}) =$$

$$= 1/2 (U^l U_{l,m} + \delta^p_n U^p U_{n,m}) = U^l U_{l,m} \quad [33c]$$

Endemés

$$\omega^i = \frac{E^{ijk}}{J} U_{k,j} \quad [33d]$$

i

$$U_{k,j} = 1/2 (U_{k,j} + U_{j,k}) + 1/2 (U_{k,j} - U_{j,k}) = S_{kj} + \Omega_{jk} \quad [33e]$$

la qual cosa comporta

$$\omega^i = \frac{E^{ijk}}{J} S_{kj} + \frac{E^{ijk}}{J} \Omega_{jk} = \frac{E^{ijk}}{J} \Omega_{jk} \quad [33f]$$

si es condidera el caràcter simètric del tensor deformació S_{kj} i l'antisimètric del tensor de rotació Ω_{jk} i de E^{ijk} per i fixat. El tensor rotació Ω_{jk} definit segons Aris[8] amb el signe contrari a la definició donada per Tennekes i Lumley[16], té únicament tres components independents, podent-se establir una relació biunívoca entre aquestes components i les components contravariants del vector vorticitat,

$$\omega^i = \frac{E^{ijk}}{J} \Omega_{jk} \quad [33g]$$

demostrant-se, amb l'ajut de l'àlgebra tensorial, que

$$
\begin{aligned}
J\, E_{lmi}\, \omega^i &= J\, E^{ijk}\, \frac{E_{lmi}}{J}\, \Omega_{jk} \\
&= \varepsilon^{ijk}\, \varepsilon_{lmi}\, \Omega_{jk} \\
&= \varepsilon^{ijk}\, \varepsilon_{ilm}\, \Omega^{jk} \\
&= (\delta^j_l\, \delta^k_m - \delta^j_m\, \delta^k_l)\, \Omega_{jk} \\
&= \Omega_{lm} - \Omega_{ml} \\
&= -2\, \Omega_{ml}
\end{aligned}
\qquad [33h]
$$

o, recíprocament, que

$$\Omega_{jk} = 1/2\, J\, E_{jki}\, \omega^i \qquad [33i]$$

Per tant,

$$U^l\, U^p{}_{,l} = U^l\, J\, E_{lmn}\, g^{pm}\, \omega^n + g^{pm}\, 1/2\, (U^l\, U_l)_{,m} \qquad [33j]$$

En aplicar l'operador $\dfrac{E^{ijk}}{J}\, g_{kp}(\quad)_{,j}$ es demostra finalmente que

$$
\begin{aligned}
\frac{E^{ijk}}{J}\, g_{kp}\, (U^l\, U^p{}_{,l})_{,j} &= \varepsilon^{ijk}\, g_{kp}\, g^{pm}\, (U^l \cdot 2 \cdot \Omega_{lm})_{,j} + 1/2\, g^{pm}\, g_{kp}\, \varepsilon^{ijk}\, (U^l\, U_l)_{,mj} = \\
&= \delta^m_k\, \varepsilon^{ijk}\, \varepsilon_{nlm}\, (U^l\, \omega^n)_{,j} + 1/2\, \delta^m_k\, \varepsilon^{ijk}\, (U^l\, U_l)_{,mj} = \\
&= \varepsilon^{ijk}\, \varepsilon_{nlk}\, (U^l\, \omega^n)_{,j} + 1/2\, \varepsilon^{ijk}\, (U^l\, U_l)_{,kj} = \\
&= (\delta^i_n\, \delta^j_l - \delta^i_l\, \delta^j_n)\, (U^l\, \omega^n)_{,j} + 0 = \\
&= U^j\, \omega^i{}_{,j} - \omega^j\, U^i{}_{,j}
\end{aligned}
\qquad [33k]
$$

Pel que fa al primer terme del segon membre es dedueix que

$$-\frac{E^{ijk}}{J}\, g^{lp}\, g_{kp}\, \Pi_{,jl} = -\frac{E^{ijk}}{J}\, \delta^l_k\, \Pi_{,jl} = -\frac{E^{ijk}}{J}\, \Pi_{,jk} = 0 \qquad [34]$$

mentre que pel segon s'acompleix la igualtat

$$\frac{\nu E^{ijk}}{J} g^{lm} g_{kp} U^{p}{}_{,lmj} = \nu g^{lm} \left(\frac{E^{ijk}}{J} g_{kp} U^{p}{}_{,j} \right)_{,lm}$$

$$= \nu g^{lm} \omega^{i}{}_{,lm} \qquad [35]$$

El darrer terme de l'equació [31] és el més delicat d'estudiar i expandir, ja que incorpora l'efecte del transport turbulent. En primer lloc es pot descomposar en quatre subtermes,

$$2 \frac{E^{ijk}}{J} g_{kp} (\nu_t S^{lp})_{jl} = \frac{2 \nu_t E^{ijk}}{J} g_{kp} S^{lp}{}_{,lj} + \frac{2 E^{ijk}}{J} g_{kp} \nu_{t,l} S^{lp}{}_{,j} \qquad [36]$$

$$+ \frac{2 E^{ijk}}{J} g_{kp} \nu_{t,j} S^{lp}{}_{,l} + \frac{2 E^{ijk}}{J} g_{kp} S^{lp} \nu_{t,lj}$$

i estudiar cadascun d'ells per separat,

$$\frac{2 \nu_t E^{ijk}}{J} g_{kp} S^{lp}{}_{,lj} = \frac{2 \nu_t E^{ijk}}{J} g_{kp} g^{ml} g^{np} S_{mn,lj} = \frac{2 \nu_t E^{ijk}}{J} \delta^{n}_{k} g^{ml} S_{mn,lj} =$$

$$= \frac{\nu_t E^{ijk}}{J} g^{ml} (U_{k,m} + U_{m,k})_{,lj} =$$

$$= \frac{\nu_t E^{ijk}}{J} g^{ml} U_{k,mlj} + \frac{\nu_t E^{ijk}}{J} U^{l}{}_{,klj} =$$

$$= \nu_t g^{ml} \omega^{i}{}_{,ml} \qquad [37a]$$

$$\frac{2 E^{ijk} \nu_{t,l}}{J} g_{kp} S^{lp}{}_{,j} = \frac{2 \nu_{t,l} E^{ijl}}{J} g_{kp} g^{ml} g^{np} S_{mn,j} =$$

$$= \frac{2 \nu_{t,} E^{ijk}}{J} g^{ml} \delta^{n}_{k} S_{mn,j} = \frac{\nu_{t,l} E^{ijk}}{J} g^{ml} (U_{k,m} + U_{m,k})_{,j} =$$

$$= \nu_{t,l} g^{ml} \frac{E^{ijk}}{J} U_{k,jm} + \nu_{t,l} \frac{E^{ijk}}{J} U^{l}{}_{,jk} =$$

$$= g^{ml} \nu_{t,l} \omega^{i}{}_{,m} \qquad [37b]$$

$$\frac{2\,E^{ijk}}{J}\; g_{kp}\,\nu_{t,j}\,S^{lp}{}_{,l} \;=\; \frac{2\,E^{ijk}}{J}\, g_{kp}\,\nu_{t,j}\,g^{ml}\,g^{np}\,S_{mn,l} =$$

$$= \frac{E^{ijk}}{J}\, g^{ml}\,\nu_{t,j}\,(U_{m,k} + U_{k,m})_{,l}$$

$$= \frac{E^{ijk}}{J}\, g^{ml}\,\nu_{t,j}\,U_{k,ml} \qquad [37c]$$

$$\frac{2\,E^{ijk}}{J}\, g_{pk}\,S^{lp}\,\nu_{t,lj} = \frac{2\,E^{ijk}}{J}\, g_{kp}\,g^{ml}\,g^{np}\,S_{mn}\,\nu_{t,lj} =$$

$$= \frac{E^{ijk}}{J}\, g^{ml}\,(U_{m,k} + U_{k,m})\,\nu_{t,lj} \qquad [37d]$$

L'expressió general del transport de la vorticitat mitjana, deduïda de l'equació [31], és, en conseqüència, igual a

$$\frac{\partial\,\omega^i}{\partial t} + (U^j - g^{jk}\,\nu_{t,k})\,\omega^i{}_{,j} - \omega^j\,U^i{}_{,j} = (\nu + \nu_t)\,g^{jk}\,\omega^i{}_{,jk} \qquad [38]$$

$$+ \frac{E^{ijk}}{J}\, g^{ml}\,\nu_{t,j}\,U_{k,ml}$$

$$+ \frac{E^{ijk}}{J}\, g^{ml}\,\nu_{t,lj}\,(U_{m,k} + U_{k,m})$$

EXEMPLES PARTICULARS DE FLUXOS BIDIMENSIONALS

Tal com s'ha esmentat anteriorment, l'estudi del camp dinàmic en termes de vorticitat i funció de corrent és convenient solament en configuracions que, en mitjana, puguin ésser considerades bidimensionals. No cal dir que en aquests casos, el sistema d'equacions representat per l'equació [38] se simplifica molt. En primer lloc, la vorticitat pot passar a ésser considerada com un escalar, en anul·lar-se dues de les seves components i, conseqüentment, el sistema es redueix a una sola equació. En segon lloc, s'anul·la el terme $\omega^j \cdot U^i{}_{,j} = 0$, en tenir el vector vorticitat direcció perpendicular al pla de flux. Finalment, encara se simplifica més l'equació de vorticitat si el sistema de coordenades de referència és ortogonal, ja que s'anul·len tots els termes amb g_{ij} o g^{ij} per $i \neq j$.

A continuació es dedueixen, a tall d'exemple, les expressions de les equacions de transport de l'energia cinètica turbulenta i de la vorticitat mitjanes, per dues de les configuracions bidimensionals més utilitzades, la rectangular o cartesiana i la cilíndrica-polar.

Sistema Cartesià.

Un sistema de coordenades pla i cartesià ve definit per les igualtats segënts:

$$x^1 = x; \qquad x^2 = y; \qquad g_{ij} = g^{ij} = \delta_i^j; \qquad J = 1$$

$$U^1 = U_1 = U; \qquad U^2 = U_2 = V \tag{39}$$

En conseqüència, l'equació [27] esdevé

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{U \partial \bar{k}}{\partial x} + \frac{V \partial \bar{k}}{\partial y} = \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \left[\frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial y^2} \right] + \tag{40}$$

$$+ \left(\frac{\partial \nu_t/\sigma_k}{\partial x} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} + \frac{\partial \nu_t/\sigma_k}{\partial y} \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \right) + \nu_t \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] - \varepsilon$$

i l'equació de transport de la vorticitat mitjana, equació [38] ve donada per

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(U - \frac{\partial \nu_t}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left(V - \frac{\partial \nu_t}{\partial y} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} = \tag{41}$$

$$= (\nu + \nu_t) \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] + \left(\frac{\partial \nu_t}{\partial x} \right) \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right] - \left(\frac{\partial \nu_t}{\partial y} \right) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right] +$$

$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \left[\frac{\partial^2 \nu_t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial y^2} \right] + 2 \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

Sistema Cilídric-Polar.

Un sistema de coordenades cilíndriques planes ve definit per les igualtats següents:

$$x^1 = r; \qquad x^2 = \theta; \qquad g_{ij} = g^{ij} = 0, \quad i \neq j;$$

$$g_{11} = g^{11} = 1; \qquad g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = r^2; \qquad J = r;$$

$$U^1 = U_1 = U_r; \qquad U^2 = U_\theta/r; \qquad U_2 = r\,U_\theta \qquad [42]$$

Aplicant les definicions donades a l'annex i tenint en compte que els únics símbols de Christoffel (també definits a l'annex) no nuls són

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r \qquad \text{i} \qquad \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} \qquad [43]$$

es dedueix que l'equació de transport de l'energia cinètica turbulenta mitjana s'expressa en aquestes coordenades segons

$$\frac{\partial \overline{k}}{\partial t} + U_r \frac{\partial \overline{k}}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r}\frac{\partial \overline{k}}{\partial \theta} = \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\,\partial \overline{k}}{\partial r}\right) + \right. \qquad [44]$$

$$\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \overline{k}}{\partial \theta^2}\right] + \left(\frac{\partial \nu_t/\sigma_k}{\partial r}\frac{\partial \overline{k}}{\partial \imath} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \nu_k}{\partial \theta}\frac{\partial \overline{k}}{\partial \theta}\right) +$$

$$+ \nu_t \left[2\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{R}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \theta}\right)^2 \right] - \varepsilon$$

mentre que l'equació [38] per la vorticitat esdevé

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(U_r - \frac{\partial \nu_t}{\partial r}\right)\frac{\partial \omega}{\partial r} + \left(\frac{U\theta}{r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \nu_t}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \qquad [45]$$

$$= (\nu + \nu_t) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right] +$$

$$+ \frac{\partial \nu_t}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r U_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right]$$

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial \nu_t}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r U_r}{\partial r} \right) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right]$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \nu_t}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial \theta^2} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \right]$$

$$\frac{4}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \nu_t}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial r \partial \theta} \right) \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \nu_t}{\partial r} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right)$$

ANNEX

L'annex inclou d'una forma resumida les regles bàsiques del càlcul tensorial. En totes les expressions que segueixen, la repetició d'índexos implica suma de termes, excepte en els casos que explícitament s'especifiqui el contrari. Es consideraran solament espais tridimensionals, sense que això signifiqui cap pèrdua de generalitat en l'exposició del tema.

Transformació de Sistemes de Coordenades.

La transformació de sistemes de coordenades permet representar entitats físiques (tensors) de manera que qualsevol canvi de coordenades de referència modifiqui la seva descripció espacial, sense canviar, però, la seva significació física. Els diferents tipus de comportament que s'observen en transformar l'espai, s'identificaran amb una doble notació per subíndexos i superíndexos.

Un punt P_o de l'espai mètric tridimensional referit al sistema de coordenades cartesianes X pot representar-se per un terna de reals (x_o^1, x_o^2, x_o^3). Si es defineix una transformació funcional, real i uniforme, de la forma

$$\mathrm{T}: \quad \mathrm{x}^i = \mathrm{x}^i\,(x^1, x^2, x^3)\ (i = 1, 2, 3) \qquad [\mathrm{A}.1]$$

els elements de la matriu transformació són

$$c_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \mathrm{x}^j} \qquad [\mathrm{A}.2]$$

i, en virtud de la transformació T, els tres x_o^i obtinguts seran les coordenades de P_o en el nou sistema X.

Una transformació no és vàlida si no es pot invertir. això sempre es pot fer si el Jacobià J no s'anul·la en cap punt del domini

$$\mathrm{J} = |\,c_j^i\,| \qquad [\mathrm{A}.3]$$

Pel que fa a aquest annex, les x^i representaran les coordenades cartesianes i les x^i un sistema de coordenades qualsevol.

Vectors Contravariants i Covariants.

Prengui's com exemple el vector velocitat instantània $\tilde{u}^i$ en coordenades cartesianes x^i,

$$\tilde{u}^i = \frac{dx^i}{dt} \qquad [A.4]$$

En un altre sistema de coordenades qualsevol x^i les components transformades $\tilde{\mathrm{u}}^i$ s'expressen segons

$$\tilde{\mathrm{u}}^i = \frac{d\mathrm{x}^i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{x}^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial \mathrm{x}^i}{\partial x^j}\,\tilde{u}^j \qquad [A.5]$$

Aquest tipus de comportament [A.5] sota una llei de transformació defineix els vectors contravariants. Més precisament, s'adopta la convenció que a^i són les components d'un vector contravariant en un punt del sistema de coordenades cartesianes X si sota una transformació de coordenades $T: \mathrm{x}^i = \mathrm{x}^i(x^1, x^2, x^3)$ $(i = 1, 2, 3)$, les components del vector contravariant esdevenen

$$\mathrm{a}^i = \frac{\partial \mathrm{x}^i}{\partial x^j}\, a^j \qquad [A.6]$$

Els vectors amb un comportament contraposat a [A.5] són anomenats vectors covariants. És el cas, per exemple, del vector gradient d'un escalar,

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}\ ;\ \mathrm{a}_i = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \mathrm{x}^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial \mathrm{x}^i}\, a_j \qquad [A.7]$$

De manera general, les components d'un vector covariant segueixen la llei de transformació

$$\mathrm{a}_i = \frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}^i}\quad a_j \qquad [A.8]$$

S'ha convingut en distingir formalment aquests dos comportaments amb la utilització de superíndexos pels vectors contravariants i amb subíndexos pels covariants.

Els tensors d'ordre superior poden ésser purament contravariants, purament covariants o mixtes. En general, sota una transformació de coordenades es comporten segons

$$A^{p_1 \dots p_m}_{q_1 \dots q_n} = \frac{\partial x^{p_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{p_m}}{\partial x^{i_m}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{q_1}} \dots \frac{\partial x^{j_n}}{\partial x^{q_n}} A^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} \qquad [A.9]$$

Tensor Mètric.

D'una manera general, un diferencial de camí es defineix com

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad [A.10]$$

El tensor mètric g_{ij} relaciona distàncies amb increments de coordenades. És un tensor purament covariant i es defineix

$$g_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x^i} \frac{\partial x_k}{\partial x^j} \qquad [A.11]$$

acomplint la relació

$$g = | g_{ij} | = J^2 \qquad [A.12]$$

Existeix un tensor fonamental g^{ij} associat al tensor mètric, que acompleix la relació

$$g^{ij}\, g_{kj} = \delta^i_k \ ; \ \delta^i_k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \qquad [A.13a]$$

i, per tant,

$$g_{ij} = \frac{1}{g^{ij}} \qquad [A.13b]$$

essent g^{ij} un tensor purament contravariant i δ^i_k la delta de Kronecker. El tensor mètric g_{ij} s'empra per obtenir components covariants de tensors contravariants i g^{ij} pel cas contrari,

$$\tilde{u}_i = g_{ij}\, \tilde{u}^j$$

$$\tilde{u}^j = g^{ij}\, \tilde{u}_i$$

$$\tilde{s}^i_j = g^{ik}\, \tilde{s}_{kj}$$

Noti's que en aquests tres exemples no s'obtenen tensors de tercer ordre ni de quart en el darrer cas, ja que es produeix una contracció d'índexos, en igualar-se un dels índexos superiors amb un dels inferiors.

Diferencials de Tensors.

Com ja ha estat esmentat anteriorment, el gradient d'un escalar f, $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, és un vector covariant per qualsevol x (x^1, x^2, x^3). Succeeix però, que, en general, les derivades parcials de tensors de rang superior a 0 no són tensors. En conseqüència, és necessari introduir un nou concepte de derivació, la derivació covariant, que conservi el caràcter tensorial i que permeti formular les equacions de transport de manera independent del sistema de coordenades elegit. La derivació covariant, simbolitzada per una coma i un subíndex darrera la variable diferenciada, acompleix la relació $dA = A_{,i}\, dx^i$, essent A un tensor qualsevol.

Les derivades covariants de tensors de primer i de segon ordre són

$$\tilde{u}^i_{,j} = \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk}\,\tilde{u}^k; \qquad [A.14a]$$

$$\tilde{u}_{i,j} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \Gamma^k_{ij}\,\tilde{u}_k; \qquad [A.14b]$$

$$\tilde{s}^{ij}_{,k} + \frac{\partial \tilde{s}^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl}\,\tilde{s}^{lj} + \Gamma^j_{kl}\,\tilde{s}^{il}; \qquad [A.14c]$$

$$\tilde{s}^i_{j,k} = \frac{\partial \tilde{s}^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl}\,\tilde{s}^l_j - \Gamma^l_{kj}\,\tilde{s}^i_l \qquad [A.14d]$$

$$\tilde{s}_{ij,k} = \frac{\partial \tilde{s}_{ij}}{\partial x_k} - \Gamma^l_{ki}\,\tilde{s}_{lj} - \Gamma^l_{kj}\,\tilde{s}_{il} \qquad [A.14e]$$

Les quantitats Γ^k_{ij} són els símbols de Christoffel de segona classe (o espècie), definits per

$$\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop i\ j} \right\} = 1/2\, g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \qquad [A.15]$$

essent

$$1/2\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)=[ij,l]=\Gamma_{ilj} \qquad [A.16]$$

el símbol de Christoffel de primera classe (o espècie). En coordenades cartesianes, tots els Γ^i_{jk} són nuls i la derivada covariant s'identifica amb la derivada parcial ordinària. Noti's també que

$$g^{ij}{}_{,k}=g_{ij,k}=0 \qquad [A.17]$$

i

$$\Gamma^j_{ji}=\Gamma^j_{ij}=\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial x^i} \qquad [A.18]$$

Deltes de Kronecker i Símbols de Permutació

La delta de Kronecker, δ^i_j, és un tensor mixt de segon ordre definit per

$$\delta^i_j=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \qquad [A.19]$$

i que es relaciona amb el tensor mètric mitjançant l'expressió [A.13].

El símbol de permutació, E_{ijk}, pren valors +1 o –1, segons ijk sigui una permutació parella o imparella de 123 i el valor 0 en qualsevol altre cas. Aquest símbol és un tensor covariant de tercer ordre i pes relatiu –1, per la qual cosa la llei de transformació[8]

$$E_{pqr}=\frac{1}{J}\frac{\partial x^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^j}{\partial x^q}\frac{\partial x^k}{\partial x^r}\,E_{ijk} \qquad [A.20]$$

inclou J^{-1}. Anàlogament, E^{ijk} és un tensor contravariant de tercer ordre i pes relatiu +1. Per tant, $\varepsilon^{ijk}=\dfrac{1}{J}E^{ijk}$ és un tensor absolut contravariant de tercer ordre i $\varepsilon_{ijk}=JE_{ijk}$ és un tensor absolut covariant de tercer ordre. Ambdós tensors estan relacionats amb les deltes de Kronecker mitjançant l'expressió

$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{ipq}=\delta^j_p\,\delta^k_q-\delta^j_q\,\delta^k_p \qquad [A.21]$$

Operadors Especials

Es dóna a continuació l'expressió dels operadors més usats en les equacions de transport.

Divergència d'un vector:

$$\operatorname{div} A = A^i_{,i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ij} A^j = \frac{1}{J} \frac{\partial (J A^i)}{\partial x^i} \qquad [A.22]$$

Laplaciana d'un escalar: La derivada covariant d'un escalar f, que es redueix sempre a la derivada parcial, és un vector covariant, gradient de f, que s'expressa com $f_{,i}$. Si es puja l'índex d'aquest vector, multiplicant per g^{ij} i s'aplica l'operador divergència, s'obté la laplaciana de l'escalar f,

$$\nabla^2 f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = (g^{ij} f_{,i})_{,j} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(J g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \qquad [A.23]$$

Laplaciana d'un vector: El component i de la laplaciana d'un vector A s'expressa com $g^{jk} A^i_{,jk}$ si el vector és contravariant o com $g^{jk} A_{i,jk}$ si el vector és covariant. En qualsevol cas, és necessari conèixer l'expressió de la derivada covariant segona d'un vector,

$$A^i_{,jk} = \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^i_{jl} \frac{\partial A^l}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl} \frac{\partial A^l}{\partial x^j} - \Gamma^l_{jk} \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + A^l \left[\frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} \Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{ml} \Gamma^m_{jk} \right] \qquad [A.24]$$

$$A_{i,jk} = \frac{\partial^2 A_{i,}}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^l_{ji} \frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} \frac{\partial A_l}{\partial x^j} - \Gamma^l_{jk} \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - A_l \left[\frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{mj} - \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} \right] \qquad [A.25]$$

Components Físiques.

Les components d'un vector, referides a un sistema de coordenades cartesià, tenen sempre dimensions homogènies degut a les dimensions de longitud de les coordenades cartesianes. En general, però, utilitzant com a sistema de referència un sistema de coordenadas x^i qualsevol, les diferents components d'un vector, ja sigui covariant o contravariant, no tenen la mateixa dimensió. A tall d'exemple es poden considerar les components del vector velocitat referides a un sistema de coordenades cilíndric $\tilde{u}^i = \dfrac{dx^i}{dt}$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, i $x^3 = z$. Per tant $[\tilde{u}^1] = LT^{-1}$, $[\tilde{u}^2] = T^{-1}$ i $[\tilde{u}^3] = LT^{-1}$, essent en aquest cas L i T les dimensions longitud i temps, respectivament.

Hom anomena components físiques d'un vector A(i), a

$$A(i) = A^i (g_{ii})^{1/2} \qquad [A.26]^*$$

podent-se comprovar que les dimensions de les diferents components físiques d'un vector són homogènies i iguals a les del mateix vector.

Aplicant la relació entre les components contravariants i les covariants es té que

$$A(i) = (g_{ii})^{1/2} g^{ij} A_j \qquad [A.27]^*$$

Només en sistemes ortogonals, en que $g^{ij} = 0$ si $i \neq j$, s'acompleix que

$$A(i) = \frac{A_i}{(g_{ii})^{1/2}} \qquad [A.28]^*$$

* La repetició de subíndexos en g_{ii} no implica en aquest cas suma de termes.

Notació

A, B, C	Tensors
a^i	Vector, component contravariant
C_1, C_2	Constants empíriques
c^i_j	Element de la matriu transformació
f	Escalar
f^i	Força externa, component contravariant
g_{ij}	Tensor mètric, component covariant
G^{ijmn}	Tensor contravariant isotròpic de quart ordre
J	Jacobià de la transformació
k	Energia cinètica turbulenta
L	Longitud
l_m	Longitud de barreja
P	Pressió mitjana
p	Fluctuació de pressió
S_{mn}	Tensor deformació mitjà, component covariant
s_{mn}	Fluctuació del tensor deformació, component covariant
r, θ, z	Coordenades cilíndriques
T^{ij}	Tensor esforç total, component contravariant
t^{ij}	Fluctuació del tensor esforç total, component contravariant
t, T	Temps
U^i	Velocitat mitjana generalitzada, component contravariant
u^i	Fluctuació de la velocitat generalitzada, component contravariant
u^i	Components cartesianes de la velocitat
U, V	Components cartesianes de la velocitat mitjana
U_r, U_θ	Components cilíndriques de la velocitat mitjana

V_t	Velocitat turbulenta
X	Sistema de coordenades
x, y	Coordenades cartesianes
x^i	Coordenades cartesianes
x^i	Coordenades generalitzades
δ^i_j	Delta de Kronecker
ρ	Densitat
μ	Viscositat dinàmica
ν	Viscositat cinemàtica
ν_t	Viscositat cinemàtica turbulenta
λ	Segon coeficient de la viscositat
Σ^{ij}	Tensor esforç viscós mitjà, component contravariant
σ^{ij}	Fluctuació del tensor esforç viscós, component contravariant
σ_k, σ_ε	Constants empíriques
ε	Velocitat de dissipació d'energia cinètica turbulenta
ε^{ijk}	Tensor absolut de permutació, component contravariant
E^{ijk}	Tensor relatiu de permutació, component contravariant
υ	Vector velocitat
ω^i	Vorticitat mitjana, component contravariant
ω	Component no nul de la vorticitat
Ω_{lm}	Tensor rotació, component covariant
∇^2	Laplaciana
div	Divergència
Γ_{ikj} ó $[ij,k]$	Símbol de Christoffel de primera espècie
Γ^k_{ij} o $\left\{ {k \atop i\ j} \right\}$	Símbol de Christoffel de segona espècie

Subíndexos

ijk	índexos covariants
,i	derivació covariant

Superíndexos

–	valor mitjà
~	valor instantani
ijk	índexos contravariants

BIBLIOGRAFIA

1. HAH, C. and LAKSHMINARAYANA, B.: "Measurement and prediction of mean velocity and turbulence structure in the near wake of an airfoil", J. Fluid Mech., (1981), *115*, 251-282.
2. BERNARD, H.S., VICKSBURG, M.S. and THOMPSON, J.F.: "Mass conservation on regular grids for incompressible flow", AIAA-84-1669, AIAA 17th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, Snowmass, Colorado, 1984.
3. TURKEL, E.: "Progress in computational physics", Computers & Fluids (1983), *11*, 121-144.
4. FINNIGAN, J.J.: "A streamline coordinate system for distorted two-dimensional shear flows", J. Fluid Mech. (1983), *130*, 241-158.
5. BERGER, B.S. and ALABI, B.: "Solution of Navier's equation in cylindrical curvilinear coordinates", J. of Appl. Mech., (1978), *45*, 812-816.
6. BERGER, B.S. and ALABI, B.: "Steady-State solution of Navier's equation in cylindrical curvilinear coordinates", Trans. of A.S.M.E., (1980), *47*, 682-683.
7. THOMPSON, J.F.: "Grid generation techniques in computational fluid dynamics", AIAA J,. (1984), *22*, (11), 1505-1523.
8. ARIS, R.: "Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics", Prentice-Hall, Inc., 1962.
9. SLATTERY, J.C.: "Momentum, energy and mass transfer in continua", McGraw-Hill, 1972.
10. SOKOLNIKOFF, I.S.: "Anàlisis Tensorial", Ed. Tormes, S.L. (2ª ed. castellà), 1979.
11. WARSI, Z.U.A.: "Conservation form of the Navier-Stokes equation in general nonsteady coordinates", AIAA J., (1981), *19*, (2) 240-242.
12. VOKE, P.R. and COLLINS, M. W.: "Forms of the generalized Navier-Stokes equations", J. Eng. Math., (1984), *18*, 219-233.
13. REYNOLDS, O.: "On the dynamical theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion", Phil. Trans. Royal Soc. London, (1895), Al86, 123.
14. REYNOLDS, W.C.: "Computation of turbulent flows", Annual Reviews of Fluid Mech., (1976), *8*, 183-208.
15. LAUNDER, B.E. and SPALDING, D.B.: "Mathematical models of turbulence", Academic Press, 1972.
16. TENNEKES, H. and LUMLEY, J.L.: "A first course in turbulence", M.I.T. Press, 1972.