METABOLISME I EVOLUCIÓ

EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA TEORIA DE CATÀSTROFES

per

CARLES PERELLÓ I VALLS

Una gran part de la ciència consisteix a donar models que permetin de conèixer per endavant característiques quantitatives o qualitatives de fenòmens observables. La matemàtica s'ha convertit en el llenguatge més emprat per a donar aquests models, i no només pel que fa a la part quantitativa, sinó també per a l'explicació qualitativa. En particular la teoria de les equacions diferencials s'ha desenvolupat a causa de la seva utilitat per a servir per donar el model de molts dels processos, que en podríem dir «dinàmics», de la física, la tècnica, l'economia, la biologia, etc. Darrerament, el desig de donar un model científic per a certs processos dinàmics ha originat tot un nou llenguatge matemàtic molt relacionat amb el de les equacions diferencials i que es coneix sota el nom de «teoria de catàstrofes».

La teoria de catàstrofes fou creada per René Thom i la utilitzà per a explicar, entre altres, fenòmens d'embriologia i de lingüística. Ha publicat les seves idees en un llibre que, encara que fou escrit al principi dels anys seixanta, no va veure la llum fins l'any 1972 (vegeu la referència [1] a la bibliografia del final). També ha publicat molts articles i conferències sobre el tema (vegeu [2]).

La teoria de Thom ambiciona molt més que l'explicació de fenòmens d'embriologia i de lingüística: ambiciona de donar un model vàlid per als processos evolutius en general. A pesar de la seva jovenesa, la teoria de catàstrofes ja s'ha popularitzat força en alguns medis. Per exemple, amb l'ajut de Zeeman, un metge i matemàtic que ha fet servir la teoria per donar alguns models molt interessants (vegeu [3] i [4]), el llenguatge de les catàstrofes ha estat portat, àdhuc fent servir la televisió com a mitjà de transport, al coneixement del públic anglès. Dels matemàtics, molts treballen en equacions diferencials, sistemes dinàmics i topologia diferencial, en problemes inspirats per aquesta teoria d'una manera més o menys directa. És així com Mather, Sotomayor, Williams, Smale, Arnold, Guckenheimer i molts més treballen en estratificació, bifurcació (forcació), atractors, estabilitat estructural, etc.

La teoria de catàstrofes ha comportat la creació de tot un llenguatge, que, bé que utilitza paraules d'ús corrent, els dóna, en matematitzar-les, un sentit molt més precís. A causa de la imprecisió natural que tot llenguatge té en començar a ésser utilitzat, i també a la complicació del terreny de la teoria de catàstrofes, els escrits de Thom són difícils de llegir. Hi ha una gran acumulació d'idees i conceptes nous, i comporta un cert esforç d'anar-ne esbrinant tot l'entrellat. L'objecte del treball present és de contribuir a aquest aclariment i simplificació, tot explicant quines són les idees fonamentals de la teoria i tractant de donar un significat precís, o almenys més precís que el corrent, a paraules com és ara crític, catàstrofe, evolució, organisme, metabolisme, forcació, estabilitat estructural, etc., Moltes vegades la terminologia emprada no coincideix amb la de Thom, i potser l'hauré interpretat malament en algunes coses, però espero de no haver falsejat la idea central.

Un organisme és per a nosaltres una entitat que mostra, d'una banda, una dinàmica interna, que anomenarem metabolisme, i d'una altra, una dinàmica externa, que anomenarem evolució. Entre els organismes que ens vénen al cap destaquem l'univers, la societat humana, el conjunt de totes les espècies animals, una espècie animal particular, el conjunt de totes les llengües, una llengua particular, un ésser viu, un mite, una nacionalitat, la universitat, una família, el cor, un automòbil, etc. En tots aquests exemples reconeixem el metabolisme com les lleis de comportament intern, que ens diuen com funciona per dintre cada una d'aquestes entitats: per exemple, tot el complex físico-químic en un ésser viu segueix unes certes lleis que fan que aquest ésser viu estigui en un cert estat i no en un altre. L'evolució es manifesta amb un canvi més lent, històric diríem, en alguns casos. En l'exemple anterior l'ésser viu es va fent vell i la seva dinàmica interna, el seu metabolisme, va canviant.

Se'ns pot dir que estem fent una distinció que no és clara. Que en un moment donat el que es pot mesurar és un cert conjunt de variables que ens donen l'estat de l'organisme: temperatures, concentracions, esforços, formes, volums, etc., i que aquestes variables canvien en el temps, d'acord amb les lleis naturals, o sigui segons una dinàmica global, i que no tenim, en un temps donat, un sistema dinàmic com el metabòlic. És a dir, que hi ha una contradicció en considerar d'una banda el temps fix per a determinar un sistema metabòlic donat, i d'altra banda considerar els estats del sistema metabòlic com a variables en el temps. La justificació d'això es troba en el fet que els canvis en el sistema metabòlic són molt més ràpids que en el sistema evolutiu i que, en una primera aproximació, les coses passen com si el canvi a llarg terme de l'organisme es pogués considerar com una evolució de sistemes dinàmics interns, o sigui que l'evolució d'un organisme és una trajectòria, en què cada punt és un sistema dinàmic metabòlic (en què el temps actua d'una manera molt més ràpida). Donat l'acoblament de dos sistemes dinàmics, un de lent i un altre de ràpid, és un problema de la matemàtica de veure fins a quin punt la nostra simplificació és vàlida. En molts casos ho és.

Pel que fa a la terminologia, si no distingíem entre variables lentes i ràpides, diríem organisme a la trajectòria en el temps seguida pels estats de l'ens que ens interessa. En fer la distinció, direm organisme a la trajectòria que descriu, en el sistema dinàmic evolutiu, el canvi en el temps del sistema dinàmic metabòlic. Així, un organisme en un moment donat és un sistema dinàmic metabòlic, en què els estats interns queden determinats pels valors de les variables ràpides.

Per a explicar la permanència de certes característiques en un organisme, caldrà incloure en el model certs estats o conjunts d'estats que siguin estables i envers els quals tendeix ràpidament l'organisme quan, degut a circumstàncies externes, se n'allunya. Considerarem doncs que el sistema metabòlic té atractors, o sigui estats envers els quals tendeixen les variables ràpides quan l'estat de l'organisme se n'aparta. Un cert sistema metabòlic pot tenir més d'un atractor, i direm que l'organisme té una forma o l'altra segons l'atractor en què es trobi. En anar canviant el sistema metabòlic d'acord amb una trajectòria evolutiva, els atractors també van canviant, i amb ells la forma estable de l'organisme.

Abans de prosseguir donarem un exemple que ajudarà a fixar això que hem dit i motivarà d'altres conceptes que generalitzarem més endavant.

Considerem un cas senzill en què un sol nombre real mesura una certa característica pròpia de l'estat d'un organisme en un moment donat. Suposem que el canvi d'aquest nombre real, la seva dinàmica, que serà el sistema metabòlic, és representat per una equació diferencial. Si el valor d'aquesta variable és $x(t)$ al temps t, suposem que $x'(t) = f(x(t))$ és aquesta equació diferencial. Això ens diu que en el punt x el canvi de x es produeix amb la velocitat $f(x)$. Una trajectòria del sistema dinàmic metabòlic és una solució d'aquesta equació, o sigui un moviment a la recta que en tot punt x té $f(x)$ per velocitat.

Un exemple d'aquest sistema seria donat per l'equació $x' = -x$. A cada punt la velocitat és igual a $-x$ i per tant 0 és un punt de repòs o d'equilibri. Tot moviment tendeix a portar el punt cap a 0, que en aquest cas és l'únic atractor.

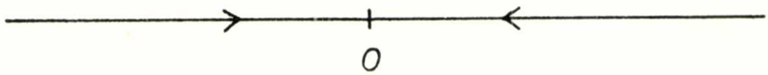

FIGURA 1

De fet si x_0 és el valor de la variable observada al temps 0, llavors $x(t) = x_0 e^{-t}$. Quan t tendeix a ∞ això tendeix a 0.

Podem posar exemples de dinàmiques internes més complicades, com pot ésser

$$x' = -(x^3 + ax + b).$$

Els punts d'equilibri són aquells per als quals $x^3 + ax + b = 0$.

Resulta que per a $a \geqq 0$, sigui el que sigui b, només hi ha un punt d'equilibri i aquest és un atractor, és a dir, totes les trajectòries tendeixen a ell quant t tendeix a ∞.

Per a $a < 0$ hi ha certs valors de b per als quals hi ha un sol punt d'equilibri, que és un atractor, i altres valors per als quals hi ha 2 i 3 punts d'equilibri. La figura 2 dóna una idea de la localització dels punts d'equilibri i de llurs tipus en funció de b, per a diferents valors decreixents de a.

Les línies verticals representen les rectes on té lloc la dinàmica metabòlica, i les interseccions amb les corbes són els punts d'equilibri. Els punts d'equilibri en què les fletxes convergeixen són atractors i l'estat de l'organisme tendeix cap a ells.

Podem considerar que dues dinàmiques internes són equivalents si tenen punts crítics del mateix tipus disposats en el mateix ordre. Resulta que per a $a > 0$ totes les dinàmiques són equivalents (del tipus I, diguem); per contra, per a $a < 0$ hi ha 3 tipus diferents de dinàmiques: un sol punt crític que és un atractor (tipus I), dos atractors i un repulsor entremig (totes les trajectòries fugen d'un repulsor) (tipus II), i un atractor i un punt de pas en què les trajectòries s'acosten per una banda i fugen per l'altra (tipus III).

Si representem en un pla els valors a i b tenim la situació de la figura 3, en què hem indicat amb I, II i III els conjunts on el sistema intern és del tipus corresponent.

El conjunt III no té punts interns i és constituït de les dues corbes mostrades a la figura, $b = \pm \frac{2\sqrt{3}}{9} (-a)^{3/2}$ per a $a < 0$, excepte el punt $a = 0$, $b = 0$, que és del tipus I.

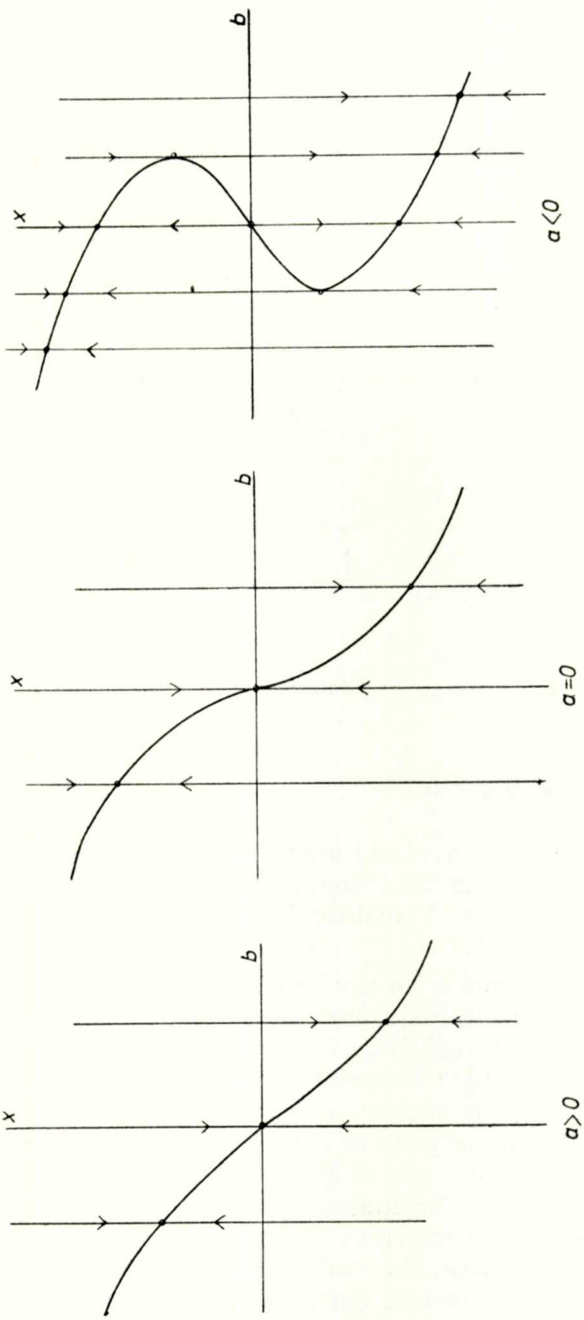

FIGURA 2

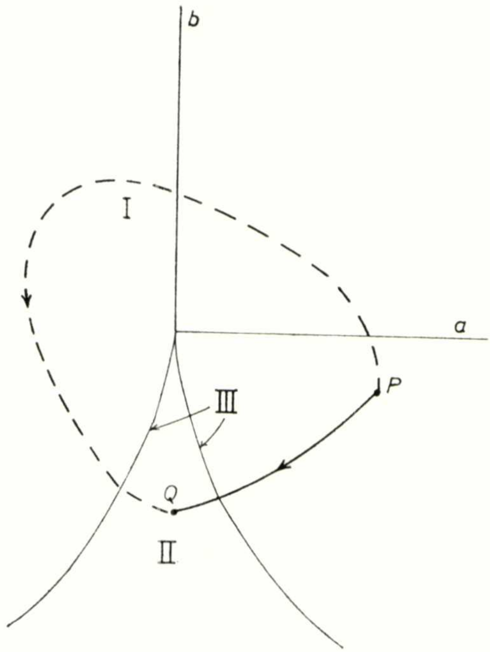

FIGURA 3

Tenim que per a $a < 0$ i $-\frac{2\sqrt{3}}{9}(-a)^{3/2} < b < \frac{2\sqrt{3}}{9}(-a)^{3/2}$ hi ha dos atractors i un repulsor i tenim sistemes del tipus II.

Si volíem representar en 3 dimensions la posició dels punts crítics en funció dels paràmetres a i b, tindríem la figura 4, en què la superfície representa $x^3 + ax + b = 0$.

Si ara els paràmetres a i b canvien d'acord amb una certa dinàmica evolutiva, tindrem definides trajectòries al pla a,b com la indicada amb línia plena a la figura 3, en què l'organisme passa de tenir un metabolisme P a tenir un metabolisme Q, o bé, tenint en compte que l'estat metabòlic es pot considerar sempre en un atractor, o almenys a l'entorn d'un atractor, tenim que l'estat de l'organisme passa de l'atractor p corresponent a P a l'atractor q corresponent a Q que és atès al llarg d'una trajectòria contínua a partir de p que no s'aparta massa d'un atractor.

D'aquesta manera la trajectòria evolutiva determina quin dels dos atractors al sistema Q és assolit. Si a partir de P la trajectòria hagués estat la indicada amb una línia discontínua fins a Q, llavors, en comptes d'arribar a la

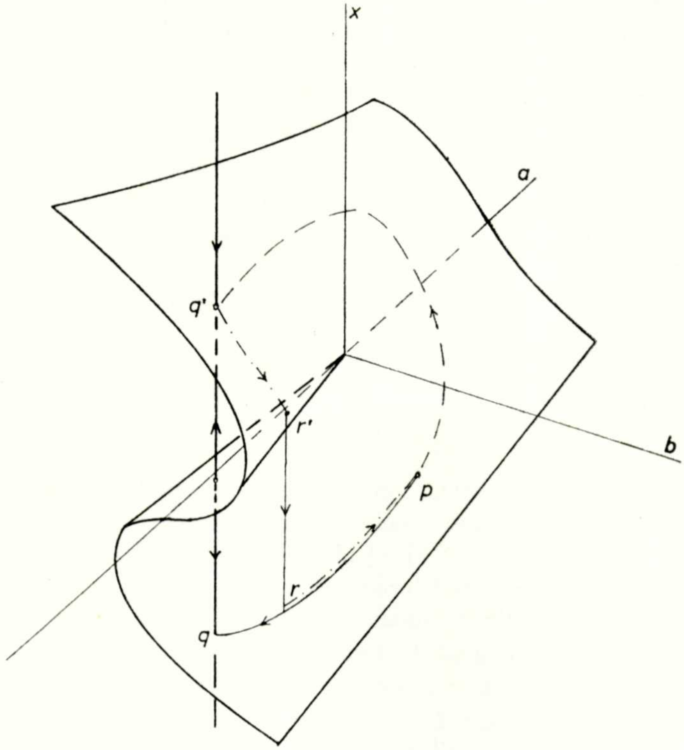

FIGURA 4

forma corresponent a l'atractor q, s'hauria arribat a l'atractor q' del mateix sistema Q. És a dir, a una altra forma diferent del mateix sistema Q.

En els dos casos esmentats l'organisme no es veu forçat a canvis bruscs en la variable x: tant per a anar de p a q com per a anar de p a q' el canvi del valor x per l'atractor és continu. Per contra, si una trajectòria ens portava de Q a P al llarg de la trajectòria amb línia plena de la figura 2 però partint de l'estat en l'atractor q', ens trobaríem que, en passar el sistema pel tipus III, hi hauria un canvi sobtat: el valor de x per a l'atractor tindria un canvi discontinu. S'hauria produït un salt. Això apareix a la figura 4 il·lustrat per la línia de punts i ratlles, en què l'atractor passa bruscament de r a r'.

En la figura 3 notem que hi ha uns certs sistemes dinàmics que són estructuralment estables, en el sentit que un petit canvi en a i b no els fa variar de tipus. Per exemple tots els del tipus II ho són, i també tots els del tipus I si excloem el punt a = 0, b = 0. Per contra, tots els sistemes del tipus III, i també el sistema corresponent a $a = 0$, $b = 0$, són tals que un canvi de a i b tan petit com es vulgui els pot fer canviar de tipus. El conjunt dels sistemes estructuralment estables se sol designar per Σ. Per $\triangle$ designarem el conjunt dels que no són estructuralment estables. Entre tots dos tenim tots els punts del pla, és a dir, totes les possibilitats per a la parella (a, b). El conjunt Σ és obert, en el sentit que tot punt de Σ conté un entorn (un disc) contingut a Σ. El conjunt $\triangle$ és anomenat conjunt crític, i en ell tenim que petites variacions poden canviar el tipus (que comporta les possibles formes o atractors). També $\triangle$ és anomenat conjunt de forcació, perquè una trajectòria que descriu el canvi temporal de a i b, en passar per $\triangle$ fa canviar el nombre d'atractors, de vegades en forma de «forcacions» d'un atractor en dos o més punts d'equilibri. Un altre nom reservat per a $\triangle$ és el de conjunt de «catàstrofes», perquè es podem produir canvis bruscs de forma en passar una trajectòria evolutiva per aquest conjunt, tal com veiem a la trajectòria de punts i ratlles de la figura 4.

Fent servir aquest exemple, Zeeman ha donat models del funcionament del cor, dels impulsos nerviosos, del comportament a les presons, de la flexió crítica de bigues, etc. (Vegeu [3] i [4] de la Bibliografia).

Per tal d'il·lustrar com pot fer-se servir el model, i sense pretendre que el cas que donem sigui d'una validesa fonamentada en observacions suficients, considerarem el comportament d'un animal actuant en contra d'un perill. Els factors determinants de la seva acció seran la mesura del perill, d'una banda, i la seva por, d'una altra. En el model més senzill, l'acció seria una funció creixent de la mesura del perill, mentre que aquesta acció serà inhibida per la por. Això no resulta massa satisfactori, perquè no té en compte la possibilitat d'un pas sobtat d'un estat inhibit a una acció violenta quan l'animal té molta por i el perill es torna imminent. Aquest comportament correspon bé a la noció de canvi catastròfic d'atractor de què hem parlat abans.

Sembla doncs que un model més fidel qualitativament podria ésser com el de la figura 5, en què quan la por és gran, hi ha estats exaltats i inhibits en les mateixes condicions de por i de perill, i que s'estigui en l'un o en l'altre depèn d'allò que haurà passat abans.

Observem que per a assolir el punt B des del punt A podem seguir una trajectòria sense catàstrofes, a, o bé una en què es produeix un salt qualitatiu, b. El que se'n segueixi l'una o l'altra depèn de la dinàmica evolutiva, és a dir, de les lleis que governen els canvis dels paràmetres por i perill que, a més a més, no semblen independents.

La mateixa figura 5, en comptes de descriure el comportament d'un animal, pot descriure el de tota una societat, en què la por i el perill siguin col·lectius. En aquest cas una trajectòria com la a correspon a una evolució

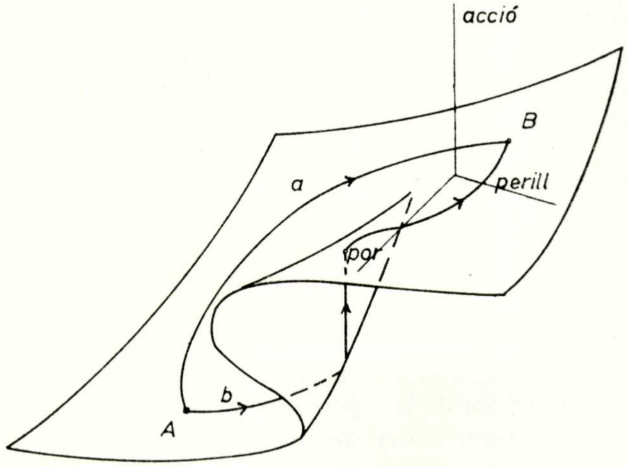

FIGURA 5

sense canvis bruscs (reformista), mentre que una com la b correspondria a un canvi brusc en les accions (ruptura).

En relació amb aquest model, observem que quan hi ha un estat tens en una societat, la distribució estadística de la posició política dels individus mostra un aspecte molt diferent de la normal amb un sol màxim, i que pot presentar dos màxims ben diferenciats (com els geps d'un camell). Això podria ésser degut al fet que la morfologia de la situació és del tipus del plec de la figura 5, que fa que en igualtat aproximada de circumstàncies externes, i segons el canvi evolutiu seguit, els uns es trobin en un atractor i els altres en un altre (polarització de dretes i esquerres).

Tornant a la figura 4 observem que la superficie $f = 0$ conté tota la informació sobre la morfologia del fenomen que ens interessa. Donada una trajectòria evolutiva (que serà dictada per una altra dinàmica que controla el canvi en el temps de a i de b), tenim definit quines són les formes de l'organisme en cada moment.

Si en comptes de tenir un sol plec, com a la figura 4, ens tinguéssim més, o d'un altre tipus, llavors la morfologia canviaria: hi hauria potser d'altres tipus de sistemes amb una altra distribució dels punts crítics i altres possibles catàstrofes. De tota manera René Thom ha demostrat que quan els sistemes metabòlics són d'una dimensió, amb dues variables evolutives, com en el cas de l'exemple, una petita pertorbació de la superfície $f(x, a, b) = 0$, fa que no es presentin complicacions més grans que plecs com l'il·lustrat a la figura. La teoria de catàstrofes estudia quines són aquestes situacions més senzilles a què es pot reduir la morfologia mitjançant un canvi petit. Es reserva el nom de catàstrofe elemental per a aquelles situacions de $f = 0$ que, com el plec, són les més senzilles que es presenten quan es varia lleugerament f. Quan el nombre de paràmetres augmenta, les catàstrofes elementals poden ésser més complicades.

Podem intentar ara de generalitzar els conceptes en què ens hem trobat en aquest exemple. Per a començar hem d'admetre sistemes dinàmics més complicats per a descriure el metabolisme. Un pas intermedi entre aquest i els que caldrien per a les situaciones naturals de la biologia o la sociologia, seria de considerar sistemes dinàmics donats per camps vectorials en una varietat.

Una varietat no és sinó la generalització del concepte de superfície (per exemple encabida a l'espai de tres dimensions) a nombres possiblement més grans de dimensions (tant de la superfície com de l'espai on l'encabim). Així doncs, una esfera (la superfície), és un exemple de varietat de dimensió 2. Un camp vectorial X definit en una varietat és l'assignació a cada punt d'ella d'un vector tangent. Intuïtivament això és el mateix que considerar un fluid que es mou sobre la varietat de tal manera que la seva velocitat en cada punt és donada per aquest vector tangent. Aquest camp vectorial defineix una dinàmica en què les trajectòries són les de les partícules del fluid. Un bon símil és el de considerar els corrents marins o el vent damunt la superfície de la terra. La velocitat de les partícules d'aigua o d'aire representen el camp vectorial, les trajectòries seguides per les partícules són les del sistema dinàmic. Si en un punt la velocitat és zero, llavors es tracta d'un punt d'equilibri. S'ha de fer notar que, encara que les partícules es mouen, en cada punt x, el valor X(x) no varia amb el temps.

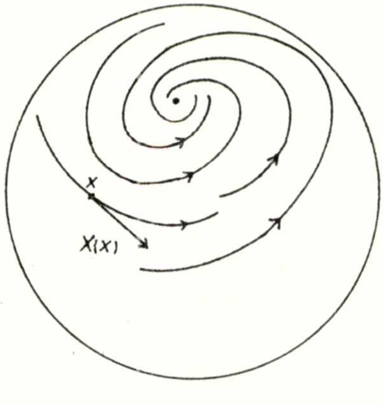

FIGURA 6

A la figura 6 s'il·lustra un camp vectorial que podria suggerir un moviment ciclònic de l'aire. El punt d'equilibri representa un atractor, que vol dir, com sempre, que en un entorn d'ell totes les trajectòries hi tendeixen.

Podem considerar ara el conjunt Ψ dels sistemes dinàmics metabòlics (camps vectorials X), que entraran en la nostra descripció del sistema evolutiu. En particular podem suposar que tenim un conjunt de camps vectorials que depenen d'uns certs paràmetres a, b, c,... Per tal de poder dir que els camps de Ψ depenen contínuament (o diferenciablement) dels paràmetres, hem de donar a Ψ una estructura topològica. Això vol dir que hem de donar un criteri segons el qual podem dir quan un canvi és continu, o, cosa que és equivalent, quins són els entorns dels punts X de Ψ. En l'exemple que hem donat abans, el criteri era que dos camps eren propers si ho eren els paràmetres a i b corresponents com a punts del pla; resultava, en aquest cas, que els camps vectorials en cada punt (és a dir f(x)) també eren propers. En la generalització, la noció de proximitat a Ψ es pot donar basada en els vectors dels camps. Direm que X i Y, camp de Ψ, són propers si ho són en cada punt x els vectors X(x) i Y(x) juntament amb les seves derivades, amb certes condicions d'uniformitat. No podem entrar en detalls en el poc espai que tenim.

Tenim ara el problema de la divisió en tipus anàlegs als I, II i III de l'exemple. Per això hem de donar una relació d'equivalència entre camps (sistemes dinàmics metabòlics), que ens digui si X i Y són del mateix tipus. La generalització del criteri triat, que era que hi hagués els mateixos punts d'equilibri del mateix tipus i en el mateix ordre, es generalitza al fet que hi hagi una transformació de la varietat en ella mateixa que preservi les trajectòries (un criteri possible diferent seria que la transformació preservés els atractors, diguem). Aquesta relació d'equivalència ens divideix el camp morfogenètic (és a dir, el conjunt dels possibles sistemes metabòlics rellevants per al nostre cas) en classes d'equivalència formades per sistemes del mateix tipus.

Ara, si un camp vectorial X és tal que tot un entorn d'ell és del mateix tipus, diem que és estructuralment estable. Si no, direm que és un sistema crític. El conjunt dels estructuralment estables el denotarem per Σ, i per $\triangle$ el conjunt dels crítics, que és X-Σ. De les definicions se segueix que tots els punts de Σ són interiors a Σ, mentre que a $\triangle$ cap no ho és.

Notem que, si X és a $\triangle$, hi ha canvis tan petits com vulguem que canvien el tipus de X.

Una trajectòria evolutiva és una trajectòria a X. Mentre es mogui a Σ, no variarà el tipus de l'organisme, però quan arribarà a $\triangle$ pot produir-se un canvi en el tipus, amb una possible aparició o desaparició d'atractors (forcació d'atractors). A més a més, si l'organisme es troba en la proximitat d'un atractor que desapareix en passar per $\triangle$, es produirà un canvi brusc en l'estat en canviar les variables metabòliques cap a un nou estat, és a dir, es produirà una catàstrofe. Per aquesta causa el conjunt crític $\triangle$ és també conegut com a conjunt de bifurcació (forcació) o com a conjunt de catàstrofes.

Hi ha situacions que necessiten un nombre més gran de variables que en el cas del plec que hem presentat amb anterioritat. Zeeman té un model del comportament d'una parella en què entren tres factors conflictius en comptes de dos, i caldria un espai de quatre dimensions per a encabir-hi la catàstrofe elemental corresponent. Pel que fa a aquestes catàstrofes elementals corresponents a atractors puntuals, moltes d'elles són ja classificades en la literatura. Encara que tot just hom comença a emprar el llenguatge de les catàstrofes, sembla que pot ésser una bona eina en l'esforç de donar una imatge racional del nostre món. Des del punt de vista dels matemàtics, s'obre tot un seguit de problemes interessants que donarà feina per molts anys.

1. THOM, René. — *Stabilité Structurelle et Morphogenèse*. Benjamin. W. A., 1972.
2. THOM, René. — *Modèles Mathématiques de la Morphogenèse*. Union Genérale d'Editions, París, 1974.
3. PEIXOTO, M. M. (Ed). — *Dynamical Systems*. Academic Press 1973.
4. *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences*. Springer-Verlag, (Lecture Notes in Mathematics, 525), Berlín, 1975.