Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 25, núm. 2, 2010. Pàg. 109–144. DOI: 10.2436/20.2002.01.29

Matemàtiques i Internet: 101 anys de teoria de cues*

Rosario Delgado

> La red mundial de Internet nos permite a hombres y mujeres llegar a los rincones más desconocidos y comunicarnos. Es como llegar con la luz del sol a los lugares donde todo parece noche.
>
> **Hebe de Bonafini, presidenta de la Asociación Madres de Plaza de Mayo**

> Imagine a world in which every single person on the planet has free access to the sum of all human knowledge.
>
> **Jimmy Wales, fundador de Wikipedia**

> I think there is a world market for maybe five computers.
>
> **Atribuïda a Thomas J. Watson, fundador i president d'IBM, el 1943**

Resum Sense precedents en el seu creixement, sense paral·lelismes en la seva heterogeneïtat i imprevisible o, fins i tot, caòtica en el seu comportament, «Internet és una revolució en si mateixa».[1] En aquest article farem un cop d'ull a com i per què el trànsit d'informació a través d'Internet difereix en aspectes fonamentals del trànsit de veu a través de les xarxes de comunicació convencionals (telefonia fixa) i presentarem un model matemàtic que ha suposat una fita en l'enginyeria del teletrànsit.

---

* Aquest article ha guanyat el Premi Albert Dou 2010 de la Societat Catalana de Matemàtiques. Aquest premi distingeix els treballs «que contribueixin a fer visible la importància de la matemàtica en el nostre món, a transmetre el coneixement matemàtic a un públic més ampli que els mateixos especialistes, i a promoure tot el que pugui ajudar a l'extensió del prestigi de la matemàtica a la nostra societat».

1 En paraules d'Anthony-Michael Rutkowski, nomenat director executiu de la Internet Society l'any 1994, després d'haver contribuït a la seva creació el 1991 i haver-ne estat vicepresident durant dos anys. Actualment està considerat una de les veus més importants sobre el desenvolupament present i futur d'Internet. La Internet Society té com a objectiu promoure les activitats i la coordinació necessàries per al creixement, desenvolupament i expansió d'Internet a tot el món.

Paraules clau: Internet, teletrànsit, fractal, teoria de cues, procés de Poisson, autosimilitud, memòria llarga, cues pesades, moviment brownià fraccionari.

Classificació MSC2010: 60-03 (01A60, 01A65, 01A67, 01A70), 60F05, 60G07, 60G15, 60G18, 60G22, 60J65, 60K25, 90B15.

1 Introducció

Ens podríem preguntar qui i quan va dir això:

«It will be possible for a business man in New York to dictate instructions, and have them instantly appear in type at his office in London or elsewhere. He will be able to call up, from his desk, and talk to any telephone subscriber on the globe... An inexpensive instrument, not bigger than a watch, will enable its bearer to hear anywhere, on sea or land, music or song, the speech of a political leader, the address of an eminent man of science, or the sermon of an eloquent clergyman, delivered in some other place, however distant. In the same manner any picture, character, drawing, or pint can be transferred from one to another place.»[2]

Aquestes paraules a tots ens fan pensar en Internet; per això resulta sorprenent descobrir que les va dir el físic, matemàtic i enginyer elèctric Nikola Tesla (1856–1943) l'any 1908, ara fa més d'un segle. I és que Internet és la manifestació d'un gran nombre de desenvolupaments tecnològics i el vòrtex al voltant del qual s'està produint una onada de canvis i millores, no només en infraestructures, sinó també en aplicacions, innovacions i serveis. Internet lidera el camí cap a la societat de la informació del segle XXI. Ha penetrat les nostres institucions i ha canviat en gran mesura la nostra conducta i les nostres actituds. Més de mil milions de persones usen Internet avui dia. La generació més jove no pot concebre un món en què no puguin compartir les seves fotografies, parlar amb els amics, mirar vídeos o anar a comprar, tot des del seu ordinador, sense moure's. Mai no podrem fer marxa enrere per tornar al món tal com era abans de l'arribada d'Internet.

Ara que ens estem submergint a velocitat vertiginosa en aquest univers de persones, dispositius, aplicacions i serveis sempre interconnectats, sembla interessant fer un cop d'ull al passat per entendre algunes de les raons i conèixer alguns dels pioners que van ajudar que sobrevinguessin aquestes meravelles. Internet és un nou món. Un món on les exigències de l'enginyeria demanen noves solucions matemàtiques, nous models. En concret, en aquest

2 «Serà possible que un home de negocis dicti instruccions a Nova York, i que apareguin escrites instantàniament a l'oficina de Londres o a qualsevol altre lloc. Podrà trucar des del seu despatx i parlar amb qualsevol altre telèfon abonat del món... Un instrument de baix cost, no més gran que un rellotge, permetrà al seu portador escoltar des de qualsevol lloc, dins el mar o a terra, música o cançons, el discurs d'un líder polític, la conferència d'un eminent home de ciència o el sermó d'un capellà eloqüent, fet en un altre lloc, a qualsevol distància. De la mateixa manera, qualsevol imatge, caràcter, dibuix o pintura pot ser transferida d'un lloc a un altre.»

article volem explorar en quin sentit Internet difereix de manera fonamental de les xarxes de comunicació de veu tradicionals. Des del seu origen, les telecomunicacions van provocar el naixement i desenvolupament d'una teoria matemàtica, coneguda com *teoria del teletrànsit* (*teletraffic theory*, en anglès) en la seva vessant més propera a les telecomunicacions, o *teoria de cues* (*queueing theory*) en general. Veurem com va sorgir aquesta teoria de la mà del naixement de la telefonia i com va anar evolucionant, i acabarem amb la introducció d'un model matemàtic recent que es fa servir per a modelar el trànsit d'informació a través d'Internet i que va suposar la superació d'un repte en la teoria del teletrànsit.

El naixement de la teoria del teletrànsit

«Although several points within the field of Telephony give rise to problems, the solution of which belongs under the theory of probabilities, the latter has not been utilized much in this domain, so far as can be seen. In this respect the Telephone Company of Copenhagen constitutes an exception as its managing director, Mr. F. Johannsen, through several years has applied the methods of the theory of probabilities to the solution of various problems of practical importance; also, he has incited others to work on investigations of similar character. As it is my belief that some point or other from this work may be of interest, and as a special knowledge of telephonic problems is not at all necessary for the understanding thereof, I shall give an account of it below.»[3]

Aquesta és la introducció de l'article que el matemàtic danès Agner Krarup Erlang (1878–1929) va publicar l'any 1909 i que és considerat el punt de partida de la teoria de cues.[4] Per tant, l'any 2010 celebrem el 101 aniversari d'aquesta teoria. La teoria de cues és un camp de la matemàtica aplicada relativament independent, que està a cavall de la teoria de la probabilitat i de la investigació operativa i que s'ocupa de les necessitats pràctiques de l'anàlisi de sistemes que proporcionen cert servei als clients i en els quals es poden produir endarreriments. La introducció de l'article d'Erlang no pot ser més clara en relacionar la seva recerca amb la resolució, mitjançant l'aplicació de mètodes probabilístics, de problemes d'aquesta índole apareguts en el camp de la telefonia.

3 «Encara que diversos punts en el camp de la telefonia donen lloc a problemes, la solució dels quals correspon a la teoria de la probabilitat, aquesta no ha estat gaire utilitzada en aquest àmbit, fins a on es pot veure. En aquest sentit, la Telephone Company de Copenhaguen constitueix una excepció, i el seu director general, el senyor F. Johannsen, al llarg de diversos anys, ha aplicat els mètodes de la teoria de la probabilitat a la resolució de diversos problemes d'importància pràctica; també ha incitat d'altres a treballar en investigacions de caràcter similar. Com que crec que alguns punts d'aquest treball poden ser d'interès, i com que no és en absolut necessari tenir un especial coneixement dels problemes telefònics per a la seva comprensió, passo a explicar-los a continuació.»

4 L'article es titula «The theory of probabilities and telephone conversations», publicat originàriament en danès l'any 1909 a *Nyt Tidsskrift for Matematik*, B, v. 20, p. 33. La seva traducció a l'anglès es pot trobar a [1], juntament amb altres treballs i una biografia molt documentada de l'autor.

FIGURA 1: Agner Krarup Erlang (1878–1929).

En aquest treball Erlang estableix que el nombre de trucades que arriben a una centraleta telefònica manual durant un interval de temps determinat segueix una llei de Poisson, i mostra com a partir d'aquest fet es troba l'expressió per calcular el temps d'espera de les trucades fent cua per ser ateses si totes les trucades tenen la mateixa longitud fixada. El que fa realment remarcable aquest article és el fet que reconeix clarament el problema de la congestió dels sistemes telefònics com a fenomen estocàstic que pot (ha de) ser analitzat fent servir raonaments probabilístics.

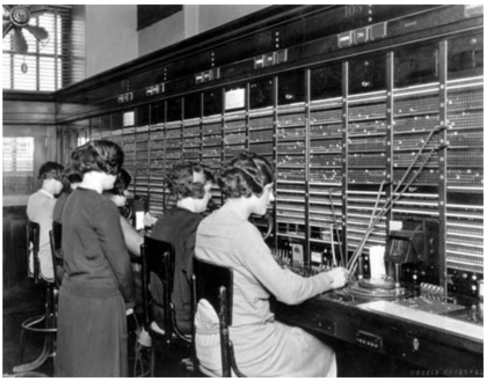

FIGURA 2: Antiga centraleta telefònica manual, 1927.

Erlang mateix va analitzar situacions més complicades en articles posteriors: en el de l'any 1917,[5] considerat el més important dels que va publicar, apareixen les seves famoses fórmules *Erlang B* i *Erlang C*. Aquesta darrera dóna la

5 «Solution of some problems in the Theory of Probabilities of significance in automatic telephone exchanges», publicat originàriament en danès a *Elektroteknikeren*, vol. 13 (1917), p. 5. La seva traducció a l'anglès també es pot trobar a [1].

probabilitat que una trucada que arriba a una centraleta telefònica manual amb un cert nombre d'operadors (hauríem de dir «operadores»?) i sistema de trucada en espera hagi d'esperar i formi una «cua». La fórmula *Erlang B* dóna la probabilitat que, si la centraleta no disposa del sistema de trucada en espera, es produeixi una *pèrdua*, és a dir, arribi una trucada que trobi tots els operadors ocupats.

Els resultats d'Erlang van ser utilitzats per altres investigadors que treballaven en allò que s'acabaria coneixent com a *teoria del teletrànsit*, la vessant aplicada a les telecomunicacions de la teoria de cues, principalment a diferents empreses relacionades amb la incipient indústria telefònica, com la Bell Telephone Company als Estats Units, els laboratoris de la qual donaven feina a enginyers i matemàtics que aviat van conèixer i utilitzar els treballs d'Erlang.

Així, doncs, els problemes associats a l'estudi de la qualitat del servei de les xarxes analògiques telefòniques amb centraleta es troben a l'origen i desenvolupament de la teoria de cues. Però molts altres problemes apareguts a molts diversos camps científics poden ser formulats en termes d'aquesta teoria i resolts mitjançant els seus mètodes. Per citar-ne només alguns: la informàtica i les comunicacions, la biologia, l'organització industrial, el transport, la logística o l'atenció sanitària pública. I avui dia segueixen apareixent noves aplicacions d'aquesta teoria tan versàtil, que va néixer ara fa un segle. En paraules del matemàtic rus Boris Vladimirovitx Gnedenko (1912–1995), molt interessat en la interrelació entre les matemàtiques i els seus camps d'aplicació, «[...] és més fàcil assenyalar les situacions en les quals la teoria de cues no pot ser utilitzada, que fer una llista de totes les àrees en què es pot aplicar».

FIGURA 3: Persones formant una cua.

El treball embrionari d'Erlang va ser continuat per diversos investigadors durant la primera meitat del segle XX, tant a Europa com als Estats Units. Entre ells, E. C. Molina, de la Bell Telephone Company, que va ser el primer de proposar, en el treball [17] de l'any 1922, la llei exponencial com a model per al temps de servei o durada de les trucades a un sistema telefònic. Tampoc no podem oblidar la contribució de Felix Pollaczek (1892–1981): l'any 1923 aquest jove austrofrancès es va incorporar al Servei de Correus de Berlín. Havia estudiat matemàtiques i enginyeria elèctrica abans de fer el seu doctorat en teoria de nombres a Berlín, i aquesta formació li va permetre aplicar tècniques clàssiques de les matemàtiques als problemes del teletrànsit. El seu primer treball en aquest sentit és de l'any 1930. És important remarcar que ni Erlang ni Pollaczek tenien a la seva disposició la teoria dels processos estocàstics que es desenvoluparia posteriorment, a partir del treball dels grans matemàtics russos Andrei Andreievitx Markov (1856–1922) i Andrei Nikolaievitx Kolmogorov (1903–1987). No podem deixar de mencionar la contribució del matemàtic Harld Crámer (1893–1985), que cooperava activament amb la Ericsson Company i que durant els anys previs a la Segona Guerra Mundial i, fins i tot, durant la Guerra dirigia un seminari de probabilitats i estadística a Estocolm en el qual van participar molts dels investigadors en la teoria del teletrànsit. Entre ells, Conrad «Conny» Palm (1907–1951), enginyer elèctric i estadístic suec conegut per la seva contribució a la teoria del teletrànsit, que l'any 1943 va presentar al seminari la seva tesi doctoral [18], en la qual estudiava les fluctuacions del trànsit telefònic.

Al llarg de tota la seva vida Pollaczek va tractar problemes de cues sense fer servir els mètodes probabilístics. Els seus treballs resultaven de difícil lectura i, potser per aquest motiu, no van tenir la difusió i el reconeixement que es mereixien. Afortunadament, sí que van arribar a un altre gran matemàtic rus, Aleksandr Iakovlevitx Khintxin (1894–1959), que coneixia els treballs de Markov i estava en contacte amb el jove Kolmogorov. Va ser Khintxin qui va reescriure, l'any 1932, el treball sobre cues de Pollaczek de l'any 1930 en termes probabilístics més senzills. Però no va ser sinó un cop ja acabada la Segona Guerra Mundial que la teoria de cues es va convertir en un tema molt actiu d'interès per als membres de la comunitat matemàtica en general, entre ells, David George Kendall (1918–2007).

La Segona Guerra Mundial i la teoria de cues

Kendall era un matemàtic britànic interessat a treballar en temes astronòmics que, com tants altres, va canviar la seva línia de recerca per les exigències bèl·liques. L'any 1945 Stalin va assetjar Berlín Occidental, i Kendall va quedar fascinat pel fet que gràcies al transport aeri els alemanys van aconseguir mantenir les comunicacions i els subministraments de la ciutat assetjada.

Kendall es va plantejar si el problema d'evitar o reduir la congestió del trànsit aeri podia ser abordat amb mètodes matemàtics. A les biblioteques d'Oxford, on era professor, va trobar la resposta gràcies als treballs d'Erlang, Khintxin i altres, els quals va decidir recopilar en un únic article que pogués ser presentat a les reunions de Londres de la Royal Statistical Society. Aquest article es va publicar l'any 1951 amb alguns comentaris [6], va tenir molt ressò i aconseguí arribar a molts investigadors que altrament no haurien conegut aquests treballs.

FIGURA 4: Soldats russos amb la seva bandera sobre Berlín en flames.

A partir de la dècada dels cinquanta hi va haver un creixement considerable de la recerca en aquests temes aplicats. Però ben aviat es va produir el fenomen de la segregació entre els enginyers que treballaven en el teletrànsit, d'una banda, i els matemàtics que treballaven en la teoria de cues, de l'altra. Aquest fet ja va quedar de manifest al Fourth International Teletraffic Congress, celebrat l'any 1964 a Londres: mentre els enginyers del teletrànsit continuaven treballant en problemes aplicats derivats del món de la telefonia, els matemàtics van anar desenvolupant la teoria de cues com una branca autònoma de la probabilitat aplicada, amb poca relació amb els seus orígens telefònics.

L'era de la informàtica i les telecomunicacions

Els primers ordinadors, dissenyats pel matemàtic britànic Alan Turing (1912–1954), que treballava per als serveis d'intel·ligència del seu país durant la Segona Guerra Mundial, amb l'objectiu de descodificar els codis de la màquina alemanya de criptografia naval Enigma, van ser construïts per enginyers de la Post Office britànica. Això ens fa pensar que devia existir una certa analogia entre la tecnologia dels primers ordinadors i la de les centraletes telefòniques. I així era.

A mesura que les xarxes telefòniques es feien més globals, i els ordinadors estaven cada vegada més integrats en xarxes, les dues tecnologies ràpidament van convergir fins a ser, actualment, quasi indistingibles: en cert sentit, avui dia «Internet és la gran centraleta telefònica mundial».

Sembla clar que juntament amb altres àrees d'aplicació també molt importants, com l'estudi del trànsit de vehicles o la gestió de les llistes de pacients del sistema sanitari, l'anàlisi de la congestió en xarxes complexes de telecomunicacions, incloent-hi Internet, serà un dels principals components del desenvolupament de la teoria de cues al llarg del segle XXI. Però l'estudi

FIGURA 5: Alan Turing amb el Colossus, un dels primers ordinadors.

del trànsit a través d'Internet ja ha plantejat, a hores d'ara, nous reptes per a aquesta teoria: els seus models clàssics no són adequats per a estudiar-lo, i ha estat necessari cercar-ne de nous. La comprensió i la modelització del trànsit d'informació a través de les xarxes de telecomunicacions, tan diferent en el seu comportament del de veu, ha estat un repte per als investigadors. A la construcció d'aquests models, s'hi ha arribat gràcies al treball coordinat de les comunitats d'enginyers en teletrànsit i de matemàtics, que han tornat a treballar conjuntament amb un objectiu comú. El present article vol explicar la història de com s'ha afrontat aquest repte, i de la seva superació.

El procés de Poisson: un model clàssic

La *teoria del teletrànsit* clàssica, que comprèn les eines matemàtiques aplicables al disseny, control i gestió de les xarxes de telefonia fixa, ha estat una de les aplicacions amb més èxit de les matemàtiques a la indústria al llarg de tota la història, ja que ha permès el desenvolupament d'una xarxa de telecomunicacions de telefonia fixa molt fiable i pràcticament universal. Quines són les característiques del trànsit de veu que han facilitat aquest èxit? El seu *caràcter marcadament estàtic* i una *limitada variabilitat*, trets distintius dels sistemes homogenis en els quals es pot parlar d'un *usuari típic* i d'un *comportament genèric*. També hi ha contribuït el fet que els models utilitzats pel trànsit de veu han resultat ser molt atractius per a la comunitat d'enginyers que els havien de fer servir, a causa del seu caràcter intuïtiu i la seva simplicitat, ja que necessiten un conjunt molt petit de paràmetres que poden ser estimats amb facilitat.

Aquest caràcter estàtic ha contribuït a la creença popular en l'existència de «lleis universals» que governen les xarxes de telecomunicacions per a la transmissió de veu. Potser la més coneguda d'aquestes lleis és la que diu que les trucades a una centraleta telefònica arriben segons un procés de Poisson.[6] Això és equivalent a dir que els temps entre arribades són variables aleatòries exponencials independents. Una altra d'aquestes lleis universals diu que els temps de servei dels clients també es distribueixen segons exponencials independents. O dit d'una altra manera, el procés de sortides del sistema, sempre que hi hagi clients, també és un procés de Poisson, que és el que havia proposat Molina l'any 1922.

A partir del treball d'Erlang, el procés de Poisson s'ha fet servir com a model bàsic de la teoria del teletrànsit durant més de mig segle. Naturalment, en els seus inicis aquesta teoria es basava en estudis empírics en els quals es prenien mesures del trànsit telefònic (Erlang prenia laboriosament aquestes mesures personalment per a la Copenhagen Telephone Company, on treballava), però aviat la creença en la universalitat del procés de Poisson com a model va fer que decaigués l'interès de prendre més mesures i, en canvi, va potenciar el desenvolupament de la teoria i dels mètodes analítics basats en el procés esmentat, que són una part molt important de la teoria de cues.

Però l'aplicabilitat a les noves tecnologies dels principis que sustenten aquesta teoria va començar a ser qüestionada, no fa encara ni trenta anys, a partir de l'aparició de tres nous avenços tecnològics: el fax, que va aparèixer a la dècada dels vuitanta, el telèfon mòbil de darrera generació, que permet enviar i rebre informació a més de mantenir una conversa, i, sobretot, Internet.

Transmissió d'informació *versus* transmissió de veu

Internet és una xarxa global de telecomunicacions en què els encaminadors (*routers*) interconnecten xarxes i subxarxes per tal de transmetre i intercanviar informació. La primera versió d'Internet porta el nom d'ARPANET, va ser construïda l'any 1968 i estava formada per quatre ordinadors (servidors o nodes), situats a diferents universitats nord-americanes. Leonard Kleinrock és un dels principals investigadors en teoria de cues en aquella època i va establir les bases que van fer possible el desenvolupament d'ARPANET; un article molt interessant sobre els aspectes històrics d'aquesta recerca i sobre el desenvolupament d'Internet escrit per ell mateix és [7].

Durant la dècada dels setanta aquesta xarxa d'ordinadors, que va ser desenvolupada com una manera de tenir en contacte persones i sistemes que treballaven en diferents projectes de ciència de la computació i d'investigació militar, no va parar de créixer. Però no va ser fins a mitjan dècada següent que

6 El procés de Poisson modela bé les arribades de clients o trucades al sistema «completament a l'atzar», és a dir, aquelles que es produeixen de manera que el nombre d'arribades en intervals disjunts de temps són independents. És precisament l'article d'Erlang de l'any 1909, el primer en el qual es justifica aquest fet, com ja hem comentat, i és per això que se'l considera com el que marca el naixement de la teoria de cues. Una introducció breu i elemental a aquests models clàssics es pot trobar a [3], i a la seva bibliografia apareixen alguns manuals de referència que són ja clàssics per a iniciar-se en el seu estudi. La definició formal d'aquest procés la donarem a la secció 3.

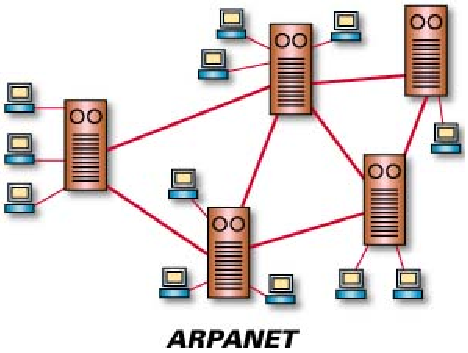

FIGURA 6: Esquema de la xarxa d'ordinadors ARPANET.

Internet literalment no va explotar: entre els anys 1985 i 1989 es va passar d'uns quants milers de servidors al món a més de 200.000. Actualment, hi ha més de 400 milions de servidors connectats a més de 60.000 xarxes acadèmiques, de negocis i governamentals, en més de 150 països. I la seva quantitat augmenta sense parar. A tall d'exemple podem dir que segons el desè informe de la Fundación Telefónica sobre la societat de la informació, corresponent a l'any 2009, el 60 % de les llars espanyoles tenen accés a Internet i d'aquestes el 87 % el tenen en banda ampla. Al mateix estudi diu que, de les llars amb fills menors de deu anys, el 97 % tenen ordinador i quasi un 90 % connexió a Internet.

FIGURA 7: L'equip humà que va desenvolupar ARPANET.

Naturalment, l'estructura física de la xarxa també s'ha anat transformant amb el temps, de manera que ara és bàsicament de banda ampla, amb sistemes de transmissió i encaminadors de gran velocitat. I no només es transmeten dades, perquè Internet ha evolucionat per poder transmetre també veu, imatge, vídeo, àudio i fitxers multimèdia.

També han anat apareixent diferents tipus de xarxes; de fet, quan ens connectem a Internet ja no fem servir la vella ARPANET, sinó que obrim el nostre navegador i escrivim una adreça que comença per «www». WWW fa referència a World Wide Web, una de les innovacions més importants d'Internet al llarg de la seva curta vida, creada l'any 1989 per Sir Tim Berners-Lee, Sir Sam Walker i Robert Caillau, investigadors del CERN (Centre Europeu per a la Recerca Nuclear), però no donada a conèixer públicament fins al 6 d'agost de 1991. La World Wide Web és una plataforma que facilita l'accés a dades a través d'Internet: fa servir «enllaços» (*links*), que són trossos de codi que connecten uns llocs d'Internet amb uns altres (i, en molts casos, un servidor amb un altre). Així, amb un navegador es pot accedir fàcilment a un enllaç simplement fent click amb el ratolí. El navegador també ajuda no només a accedir a les dades sinó a visualitzar-les.

Actualment, amb la xarxa (web) i un navegador, es pot accedir a fitxers de text, de veu, de vídeo i a altres tipus de dades multimèdia (música, cinema, videojocs) i navegar fàcilment d'una pàgina o lloc d'Internet a una altra utilitzant els enllaços. La manera en què l'ordinador es connecta a Internet és mitjançant un mòdem DSL, que fa servir una tecnologia que converteix una connexió habitual de telèfon fix en un punt d'accés a Internet d'alta velocitat. Les dades es transmeten i s'intercanvien a la xarxa en forma d'unitats discretes de transmissió, que són autònomes, es transmeten independentment les unes de les altres, i poden tenir diferents formes, segons el protocol específic que es faci servir, la més habitual de les quals és la forma de «paquet». Els encaminadors miren la font i la destinació, i en funció d'aquesta informació troben el millor camí per a cada paquet, usant tota l'amplada de banda disponible.

FIGURA 8

És un fet remarcable que les trucades telefòniques que es fan per a l'enviament d'un fax, per accedir a Internet i per a la transmissió de dades amb el telèfon mòbil tenen unes característiques molt diferents de les típiques trucades de telèfon on només es transmet la veu (de fet, el seu comportament s'assembla més al de l'antic telègraf): tendeixen a ser significativament més llargues i molt més variables en la seva durada que les trucades telefòniques de veu. Com que la seva quantitat ha pujat de manera espectacular, especialment les trucades per accedir a Internet i, en conseqüència, a determinats llocs el «bloqueig» de les trucades (les trucades rebutjades per col·lapse del sistema que es perden) s'ha incrementat fins a nivells inacceptables, especialment en determinades franges horàries, ha resultat necessari desenvolupar mètodes d'enginyeria *ad hoc* per tractar de resoldre aquest problema. I per a desenvolupar els mètodes, s'havia de trobar primer un model adequat.

Però els models que havien tingut tant d'èxit en el tractament de les xarxes de telefonia fixa a través de les quals només s'enviava la veu, ja no serveixen per a tractar els problemes que plantegen les xarxes de telecomunicacions actuals que permeten la transmissió d'informació en diferents formes. Podríem estar d'acord amb l'afirmació que «les coses canvien molt quan són els ordinadors, i no els humans, que parlen», com diuen a [22] Walter Willinger, de la AT&T Labs-Research, i Vern Paxon, de la Universitat de California. Arribar a entendre i modelar el comportament del trànsit de dades a través de les xarxes de telecomunicacions és fonamental per tal de poder dissenyar i implementar xarxes d'ordinadors que puguin oferir un servei de qualitat als usuaris.

Fins al principi de la dècada dels noranta no es van fer estudis per tractar de validar el models clàssics de la teoria de cues, basats en el procés de Poisson, en aquests nous escenaris. I tanmateix, va ser suficient obtenir unes poques observacions per adonar-se que el trànsit d'informació, a diferència del que passa amb la telefonia clàssica, en què només es transmet la veu, presenta una gran variabilitat. En general, el trànsit a través de les xarxes de telecomunicacions, sigui de veu o d'informació, es mostra irregular en certa escala de temps, és a dir, consta de períodes d'activitat relativament alta i, intercalats, períodes de treva o calma amb poca activitat. En el trànsit de veu s'observa que, a mesura que augmentem l'escala de temps, es va *suavitzant*, i es fa més regular, al contrari del que passa amb el trànsit d'informació, que encara que canviem l'escala de temps continua sent irregular.

Aquesta diferència resulta fonamental des del punt de vista de l'enginyeria de telecomunicacions. El trànsit de veu, que es modela bé a partir del procés de Poisson, permet una gestió de la xarxa relativament fàcil ja que, per sobre de certa escala de temps, és suau, regular i previsible. En canvi, les mesures del trànsit a través d'Internet mostren un caràcter molt irregular i imprevisible, fins i tot amb escales de temps grans (es diu que té un comportament *fractal*), que obliga, per exemple, a tenir grans memòries intermèdies (*buffers*) per tal d'emmagatzemar la informació que en un moment donat ha d'esperar a un determinat servidor o enllaç, que pot quedar saturat en qualsevol moment i escala de temps, a causa de les grans fluctuacions del trànsit.

Murad S. Taqqu, de la Universitat de Boston, Walter Willinger i altres col·laboradors, en el seu article de l'any 1993 [10] i la continuació publicada l'any següent [11], van ser els primers de publicar treballs mostrant evidències de comportament clarament fractal del trànsit a través d'Internet. En efecte, en aquests articles, a partir d'una anàlisi molt acurada de dades recollides a diferents xarxes locals durant un llarg període de temps, s'evidencia que el trànsit d'informació es comporta de la mateixa manera irregular encara que canviem d'escala de temps, a diferència del que passa amb el trànsit de veu. Això es pot veure molt clarament a la figura 9, on es comparen dades reals corresponents a una hora de trànsit, amb el que s'observaria segons un model de Poisson i segons un model fractal (Willinger i Paxon [22]).

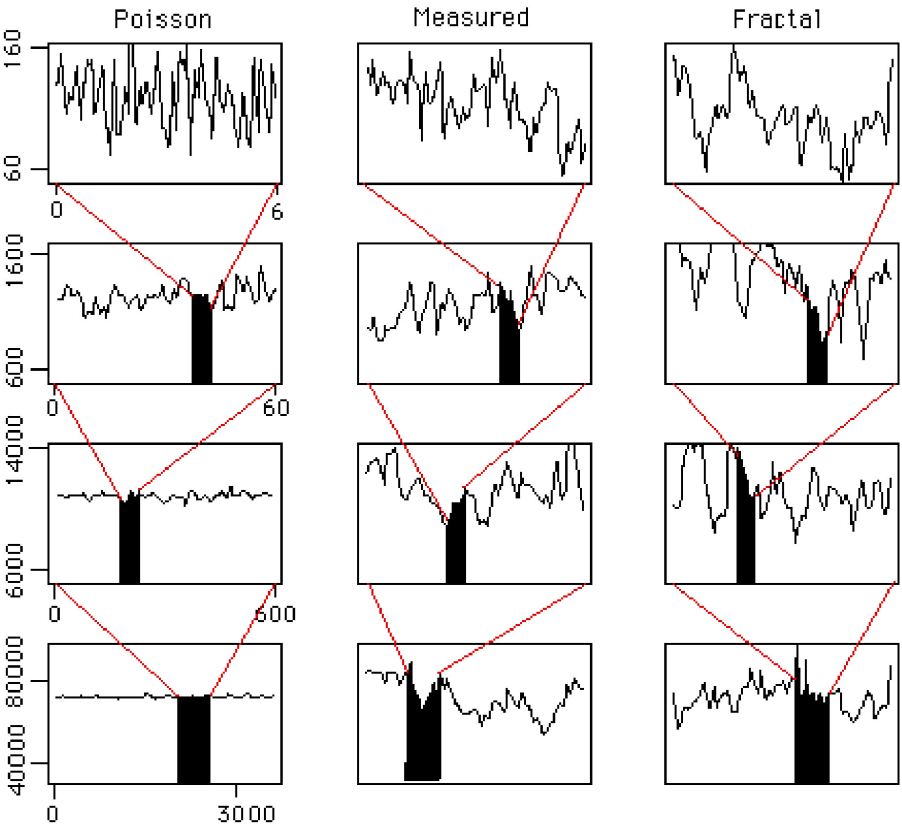

FIGURA 9: Comparació de dades reals (columna central) amb els models de Poisson i fractal.

La primera fila de la figura són les gràfiques corresponents al nombre total de paquets circulant per la xarxa per cent milisegons, en un rang de temps de sis segons. Aquestes gràfiques es comprimeixen en les zones de color negre de la fila següent, on es representa el nombre de paquets circulant per segon en un rang de seixanta segons. A la vegada, aquestes gràfiques també es comprimeixen en les zones de color negre de la fila següent, on es representen els paquets circulant per deu segons en un rang de sis-cents segons. Finalment, aquestes gràfiques es tornen a comprimir a la darrera fila, on es representa el nombre de paquets circulant per seixanta segons en un rang d'una hora de temps. Observant les gràfiques queda clar que mentre que a la primera fila els dos models (Poisson i fractal) són compatibles amb les dades observades, a mesura que fem la «compressió» del temps (augmentem l'escala), les gràfiques corresponents al model de Poisson es van suavitzant progressivament, i s'allunyen del comportament observat a les dades reals, que sí que continua sent compatible, però, amb el model fractal.

Atès que ha quedat clar que el trànsit d'informació es comporta de manera dràsticament diferent del de veu, també hauran de ser molt diferents les idees, els conceptes i els models matemàtics que es facin servir en cada cas. Per al trànsit de veu el model es basa en el procés de Poisson i presenta «memòria curta» en el temps, mentre que per al cas de les xarxes de transmissió d'informació, en canvi, el model haurà de tenir «memòria llarga» en el temps. A partir d'ara anirem explicant els conceptes i construint aquest nou model matemàtic.

2 Autosimilitud i memòria llarga: el moviment brownià fraccionari

Una mica d'història

L'hidròleg britànic Harold Edwin Hurst (1880–1978) va estudiar durant els seixanta-dos anys que va estar a Egipte les crescudes anuals del riu Nil, i va observar que els models de les sèries temporals no semblaven adequats per a les mesures hidrològiques que havia obtingut. Els models clàssics de les sèries temporals es fan servir per a tractar fenòmens les mesures dels quals es caracteritzen per una «dependència a curt termini» o «memòria curta» en el temps, és a dir, fenòmens en els quals hi ha dependència en el temps però aquesta dependència decreix ràpidament.

La dependència en el temps de les mesures obtingudes per Hurst decreixia molt més lentament del que els models de les sèries temporals permeten. El seu treball de [5] va servir de base per tal que Benoît Mandelbrot (1924–2010), plantegés a la dècada dels anys seixanta (vegeu [12]) fer servir un model alternatiu al de les sèries temporals pels nivells anuals de cabdal del riu, que fossin de «dependència a llarg termini» o «memòria llarga»: el procés estocàstic que va anomenar *moviment brownià fraccionari* (la paraula *fraccionari* fa referència al seu caràcter fractal).

Gens sorprenent atesa la seva genialitat i la seva clarividència, resulta que aquest procés ja havia estat introduït per Kolmogorov, al seu article de l'any 1940 [8], però no va ser fins que es va publicar el famós article de Mandelbrot i Van Ness el 1968 [15] que no es van començar a investigar les propietats bàsiques d'aquest procés i no es va fer èmfasi en la seva adequació com a model de diferents fenòmens naturals aleatoris que presenten «memòria llarga», com era el cas de les dades hidrològiques de Hurst i com ho és també el trànsit d'informació a Internet, com veurem.

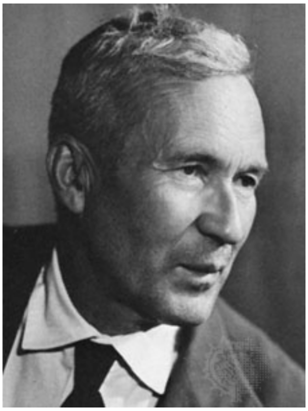

FIGURA 10: Andrei Nikolaievitx Kolmogorov.

La investigació teòrica d'aquest model a partir del treball inicial de Kolmogorov ha estat obra de molts investigadors com Iaglom, Rosenblatt, Dobruixin i Taqqu, entre altres.

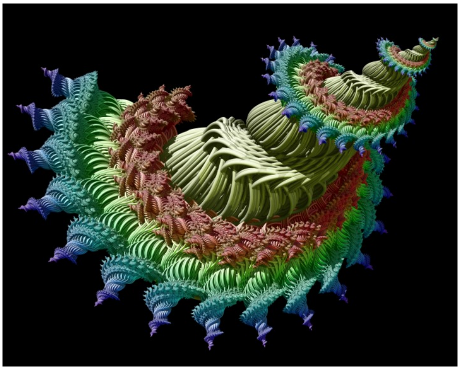

FIGURA 11: Benoît Mandelbrot i representació d'un objecte fractal.

El fenomen de la «memòria llarga» està íntimament relacionat, com veurem en aquesta secció, amb el d'*autosimilitud*. L'*autosimilitud* és una propietat associada als objectes fractals (aquells l'aparença dels quals no canvia, independentment de l'escala en la qual els mirem), que van ser introduïts i estudiats extensament per Mandelbrot a la seva famosa monografia de 1982 [14]. El terme *autosimilar* el va introduir ell mateix com a sinònim de *fractal*. En el cas dels processos estocàstics, aquesta característica es fa servir en el sentit probabilístic. A [23] es pot trobar una bibliografia molt extensa sobre autosimilitud i memòria llarga que inclou tant treballs teòrics com aplicats.

El procés de Poisson i el procés de moviment brownià

Hi ha moltes situacions reals en les quals podem observar fenòmens aleatoris que evolucionen en el temps. Per exemple, la quantitat de vehicles que passen per un determinat punt d'una autovia, des d'un moment considerat com l'inici del temps, que serà 0 per conveni, fins a un instant de temps t, va evolucionant com a funció de t. És un fenomen aleatori ja que aquesta funció del temps depèn de molts factors i no es pot saber *a priori* com serà exactament. De fet, encara que observem una determinada funció del temps, sabem que en podríem observar altres, ja que no és determinista. Malgrat que per a un temps t fixat no sabem exactament quin valor prendrà la funció, sí que pot ser que suposem un model matemàtic (aleatori) pels possibles valors que pren, que serà una *variable aleatòria* (una variable aleatòria és el model matemàtic per a una quantitat aleatòria). Informalment, quan parlem de *llei* (o *llei de probabilitat*) d'una variable aleatòria ens referim a la manera com aquest model matemàtic ens diu quins són els valors que pren aquesta quantitat aleatòria i amb quines probabilitats es prenen. Dues lleis han estat i són fonamentals tant des del punt de vista del desenvolupament de la teoria de la probabilitat i de l'estadística, com des d'un punt de vista aplicat: la de Poisson i la normal o gaussiana.

1 Definició Una variable aleatòria N es diu que segueix una *llei de Poisson* de paràmetre $\lambda > 0$ i s'escriu $N \sim \text{Pois}(\lambda)$, si pren com a possibles valors $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$ amb aquestes probabilitats: la probabilitat que la variable N sigui igual a k és:

$$P(N = k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{on} \quad k! = k(k-1)(k-2)\cdots 1\,.$$

2 Definició Una variable aleatòria X es diu que segueix una *llei normal o gaussiana* de paràmetres $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$ i s'escriu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si pren com a possibles valors tots els nombres reals, i la probabilitat que prengui valors a un interval (a, b), amb $-\infty \le a < b \le +\infty$, és la integral següent:

$$P\big(X \in (a,b)\big) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\, dx\,.$$

Aquesta integral no es pot tractar analíticament i s'ha de calcular per mètodes numèrics (o fent servir taules). A més, la probabilitat que la variable X prengui un valor concret és 0 (ja que pren valors sobre un continu). El paràmetre μ és l'*esperança matemàtica* o valor mitjà de la llei de X, i això ho denotem per $E(X) = \mu$ (és el valor al voltant del qual es distribueixen els valors que pren la variable). Si $\mu = 0$ es diu que la variable és *centrada*. Una propietat molt important de l'esperança matemàtica és que és lineal, és a dir, que commuta amb la suma i amb el producte per nombres reals. El paràmetre σ^2 és la *variància* de la llei de X, una mesura de la variabilitat o dispersió dels valors que pren la variable al voltant del seu valor mitjà o esperança. Si a més de ser centrada, la variància de la variable és 1, es diu que la normal és *estàndard*. La definició de la variància de X és: $\mathrm{var}(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$ i es pot calcular equivalentment com $\mathrm{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. La idea és que la variància es calcula com el valor mitjà de les desviacions entre els valors que pren la variable X i el seu valor mitjà (al quadrat per a evitar cancel·lacions entre desviacions per sobre i per sota). La variància no commuta amb el producte per nombres reals: les constants multiplicatives surten fora de la variància al quadrat. Una altra propietat de la variància és que no commuta en general amb la suma, però sí que ho fa si les variables són independents:[7] si tenim en compte la definició de variància i la linealitat de l'esperança,

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X+Y) &= E\big((X+Y)^2\big) - \big(E(X+Y)\big)^2\\ &= E\big(X^2+Y^2+2\,X\,Y\big) - \big(E(X)\big)^2 - \big(E(Y)\big)^2 - 2\,E(X)\,E(Y)\\ &= \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\big(E(X\,Y) - E(X)\,E(Y)\big)\end{aligned}$$

i, per tant, $\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$ si i només si $E(X\,Y) = E(X)\,E(Y)$, i això es compleix si X i Y són variables aleatòries independents. Si les variables tenen llei normal, el recíproc també és cert, és a dir, si es compleix $E(X\,Y) = E(X)\,E(Y)$, llavors les variables són independents.

Pel que acabem de dir, el model matemàtic per a l'evolució d'un fenomen aleatori en el temps serà una família de variables aleatòries $Y_\cdot = \{Y_t,\, t \geq 0\}$ de manera que a l'instant de temps $t \geq 0$ la variable Y_t indica el valor que pren la quantitat aleatòria que estem observant precisament en aquest instant de temps. D'això se'n diu *procés estocàstic*. Cada funció del temps que podríem observar rep el nom de *trajectòria del procés*. Encara que, de fet, només observarem una de les trajectòries, necessitem conèixer el model (procés estocàstic), és a dir, les *lleis* de les variables aleatòries del procés i les seves propietats, per tal de poder extreure conclusions fiables sobre el fenomen aleatori a partir de la trajectòria.

3 Definició Un procés $N_\cdot = \{N_t,\, t \geq 0\}$ es diu que és un *procés de Poisson d'intensitat* $\lambda > 0$ si compleix les propietats següents:

a) $N_0 = 0$ (parteix de l'origen, excepte potser per a un conjunt de trajectòries de probabilitat 0).

b) Els increments del procés en intervals disjunts de temps són independents. És a dir, si $0 \leq s < t \leq u < v$, tenim que $N_t - N_s$ i $N_v - N_u$ són variables aleatòries independents.

c) Per a tot $0 \leq s < t$, l'increment del procés $N_t - N_s$ és una variable aleatòria amb llei de Poisson de paràmetre proporcional a la longitud de l'interval, amb constant de proporcionalitat λ. És a dir,

$$N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}\big(\lambda\,(t-s)\big)\,.$$

7 Intuïtivament, dues variables aleatòries X i Y són independents si el fet de tenir informació sobre el valor que ha pres una d'aquestes no afecta en res els possibles valors que pren l'altra ni les probabilitats amb què els pren.

Anomenem *distribucions en dimensió finita* d'un procés $Y_\cdot = \{Y_t,\ t \geq 0\}$ les *lleis* de qualsevol conjunt finit de variables del procés $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$, per a $n \geq 1$ i $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ arbitraris. La *llei* d'un conjunt de variables del procés es defineix de manera anàloga a la llei d'una sola variable aleatòria: és el model matemàtic pels possibles valors que prenen les variables del conjunt i les probabilitats amb què ho fan, però no entrarem en els detalls tècnics d'aquesta definició.

Si $\{Y_\cdot^n\}_{n \geq 1}$ és una successió de processos estocàstics, més endavant farem servir la notació següent:

$$\widetilde{\lim_{n \to +\infty}} Y_\cdot^n = Y_\cdot$$

per indicar que les distribucions en dimensió finita dels processos $Y_\cdot^n$ convergeixen cap a les distribucions en dimensió finita del procés $Y_\cdot$ quan $n \to +\infty$. Això vol dir que per a tot $m \geq 1$ i $t_1, \ldots, t_m \geq 0$, si denotem per $F^n(x_1, \ldots, x_m)$ la probabilitat de l'esdeveniment $\{Y_{t_1}^n \leq x_1, \ldots, Y_{t_m}^n \leq x_m\}$ i per $F(x_1, \ldots, x_m)$ la probabilitat de l'esdeveniment $\{Y_{t_1} \leq x_1, \ldots, Y_{t_m} \leq x_m\}$, tenim que

$$\lim_{n \to +\infty} F^n(x_1, \ldots, x_m) = F(x_1, \ldots, x_m)$$

per a $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ qualssevol (punts de continuïtat de F).

4 Definició Es diu que un procés $Y_\cdot = \{Y_t,\ t \geq 0\}$ és un *procés gaussià* si donats $n \geq 1$, $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ i $a_1, \ldots, a_n$ arbitraris, $\sum_{i=1}^{n} a_i\, Y_{t_i}$ segueix una llei normal (això és equivalent a dir que les distribucions en dimensió finita són normals).

Els processos gaussians queden caracteritzats per l'esperança matemàtica de les seves variables, i pel que anomenem *funció de covariàncies*, que engloba la informació relativa a les variàncies de les variables, però també la que ens diu quin tipus de relació hi ha entre les variables (si són independents o no, i si no ho són, quin tipus de dependència hi ha entre aquestes). Si totes les variables del procés són centrades es diu que el procés ho és. La funció de covariàncies es defineix així: per a cada $0 < s,\ t$, la covariància entre les variables Y_t i Y_s és:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_t,\ Y_s) &= E\big((Y_t - E(Y_t))\,(Y_s - E(Y_s))\big) \\ &\quad \Big(= E(Y_t\, Y_s) \quad \text{si} \quad E(Y_t) = E(Y_s) = 0\Big).\end{aligned}$$

Observem que, amb $s = t$, $\mathrm{Cov}(Y_t,\ Y_t) = \mathrm{var}(Y_t)$, així que la funció de covariàncies ens dóna les variàncies de les variables del procés, i també ens dóna una mesura de la relació que hi ha entre aquestes (quan $s \neq t$).

D'entre tots els processos gaussians, destaca per la seva importància l'anomenat *procés de moviment brownià* o *procés de Wiener*. L'estudi d'aquest procés es va originar en un intent per explicar el fenomen físic del moviment irregular i ràpid observable al microscopi d'una partícula petita suspesa en un fluid. Aquest moviment *caòtic* es coneix com a *moviment brownià* en honor de Robert Brown (1773–1858), botànic anglès que va ser el primer que el va observar l'any 1828, i és a causa del bombardeig intensiu de la partícula per part de les molècules del fluid, com va deixar establert el Premi Nobel de Física Albert Einstein (1879–1955) l'any 1905 (el mateix any que va publicar els seus famosos treballs sobre l'efecte fotoelèctric que li valdrien el Premi Nobel l'any 1923, i el de la teoria de la relativitat).

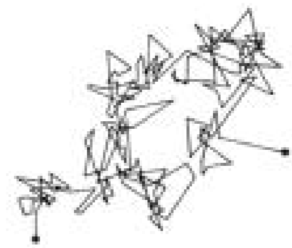

FIGURA 12: Moviment irregular d'una partícula en un fluid.

Norbert Wiener (1894–1964), un dels científics més brillants i influents del segle XX i fundador de la cibernètica, va fer una contribució fonamental a la construcció i l'estudi des d'un punt de vista matemàtic del moviment brownià, com es pot veure recollit en una sèrie de cinc articles publicats entre 1920 i 1924, per la qual cosa aquest procés també porta el seu nom. A continuació donem la seva definició, semblant a la del procés de Poisson (definició 3) però canviant la llei de Poisson per la normal.

5 DEFINICIÓ Un procés $B_\cdot = \{B_t,\ t \geq 0\}$ es diu que és un *procés de moviment brownià* (de variància $\sigma^2 > 0$) si compleix les propietats següents:

a) $B_0 = 0$ (parteix de l'origen, excepte potser per a un conjunt de trajectòries de probabilitat 0).

b) Els increments del procés en intervals disjunts de temps són independents. És a dir, si $0 \leq s < t \leq u < v$, tenim que $B_t - B_s$ i $B_v - B_u$ són variables aleatòries independents.

c) Per a tot $0 \leq s < t$, l'increment del procés $B_t - B_s$ és una variable aleatòria amb llei normal centrada i amb variància proporcional a la longitud de l'interval, amb paràmetre de proporcionalitat σ^2. És a dir,

$$B_t - B_s \sim N\big(0,\ \sigma^2\,(t-s)\big)\,.$$

Si $\sigma^2 = 1$ es diu que és un procés de moviment brownià estàndard.

6 PROPOSICIÓ *La definició 5 és equivalent a dir que $B_\cdot$ és un procés gaussià, centrat i amb funció de covariàncies:*

$$\mathrm{Cov}(B_t,\ B_s)\Big(= E(B_t\,B_s)\Big) = \sigma^2\,\min(s,\ t)\,. \tag{1}$$

JUSTIFICACIÓ En efecte, si suposem per fixar idees que $0 \le s \le t$, per la linealitat de l'esperança, pel fet que els increments són independents i que $B_t - B_s \sim N(0, \sigma^2 (t-s))$, tenim a partir de la definició 5 que, si $B. = \{B_t,\ t \ge 0\}$ és un *procés de moviment brownià* (de variància $\sigma^2 > 0$), llavors

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(B_t, B_s) &= E(B_t B_s) = E\big((B_t - B_s)B_s\big) + E(B_s^2) \\ &= E(B_t - B_s)\, E(B_s) + E(B_s^2) = 0 + \sigma^2 s = \sigma^2 \min(s, t)\,,\end{aligned}$$

és a dir, obtenim (1). I recíprocament, fent servir que el procés és gaussià i centrat, i l'expressió (1), tenim que $\operatorname{var}(B_t) = E(B_t^2) = \sigma^2 t$; així que, si $t = 0$, $\operatorname{var}(B_0) = 0$, cosa que vol dir que B_0 és constant i obtenim *a*) de la definició 5. La independència dels increments de l'apartat *b*) es deriva del fet de ser variables amb llei normal tals que l'esperança del producte és producte d'esperances, cosa que és fàcil de veure ja que, si $0 \le s < t \le u < v$,

$$\begin{aligned}E\big((B_t - B_s)(B_v - B_u)\big) &= E(B_t B_v) - E(B_t B_u) - E(B_s B_v) + E(B_s B_u) \\ &= \sigma^2\big(\min(t, v) - \min(t, u) - \min(s, v) + \min(s, u)\big) \\ &= \sigma^2(t - t - s + s) = 0\end{aligned}$$

i $E(B_t - B_s) = E(B_v - B_u) = 0$. Finalment, per obtenir *c*) només cal veure que $\operatorname{var}(B_t - B_s) = \sigma^2 (t - s)$ si $0 \le s < t$, i això es dedueix de

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(B_t - B_s) &= E\big((B_t - B_s)^2\big) = E\big(B_t^2 + B_s^2 - 2\, B_t B_s\big) \\ &= E(B_t^2) + E(B_s^2) - 2\, E(B_t B_s) = \sigma^2\big(t + s - 2 \min(s, t)\big) \\ &= \sigma^2(t + s - 2s) = \sigma^2(t - s)\,.\end{aligned}$$

□

Una propietat dels processos estocàstics de gran importància en modelització és la que tractarem a continuació.

Autosimilitud

7 DEFINICIÓ Direm que el procés estocàstic $Y. = \{Y_t,\ t \ge 0\}$ és *autosimilar* d'índex $H \in (0, 1)$ si per a tota constant $a > 0$ el procés canviat d'escala $\{a^{-H} Y_{at},\ t \ge 0\}$ té les mateixes distribucions en dimensió finita que el procés original. Ho denotem per

$$Y. \stackrel{\mathrm{d}}{=} a^{-H} Y_{a\,\cdot}\,.$$

Dit d'una altra manera, l'autosimilitud implica que un canvi a l'escala del temps que consisteix a multiplicar el temps t per una constant $a > 0$ és equivalent al canvi a l'escala de l'espai d'estats que consisteix a multiplicar l'estat del procés per a^H (llavors, Y_{at} té la mateixa llei que $a^H Y_t$).

En les aplicacions, són molt importants els processos autosimilars que compleixen a més la propietat de la definició següent:

8 Definició Direm que el procés estocàstic $Y_. = \{Y_t\,,\ t \geq 0\}$ té els *increments estacionaris* si

$$Y_{.+h} - Y_h \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y_. - Y_0 \quad \text{per a tota} \ \ h > 0\,,$$

on $Y_{.+h}$ denota el procés $\{Y_{t+h},\ t \geq 0\}$.

9 Proposició *Sigui $Y_. = \{Y_t\,,\ t \geq 0\}$ un procés autosimilar d'índex $H \in (0,1)$, amb increments estacionaris, i tal que, per a tot $t \geq 0$, $E(Y_t^2) < +\infty$. Llavors, es compleixen les propietats següents:*

a) $Y_0 = 0$ *(parteix de l'origen, excepte potser per a un conjunt de trajectòries de probabilitat* 0*).*

Això és conseqüència que per a tot $a > 0$, com que $a0 = 0$, per l'autosimilitud tenim que

$$Y_0 = Y_{a0} \quad \text{té la mateixa llei que} \quad a^H Y_0.$$

b) *El procés és centrat, és a dir,* $E(Y_t) = 0$ *per a tot* $t \geq 0$.

Això és molt fàcil de justificar, ja que per l'estacionarietat dels increments i per *a*),

$$E(Y_{2t}) = E\big((Y_{2t} - Y_t) + Y_t\big) = E(Y_{2t} - Y_t) + E(Y_t) = E(Y_t - Y_0) + E(Y_t) = 2E(Y_t).$$

D'altra banda, per la propietat d'autosimilitud, Y_{2t} té la mateixa llei que $2^H Y_t$ i, com a conseqüència, $E(Y_{2t}) = 2^H E(Y_t)$, així; obtenim que

$$2\,E(Y_t) = 2^H\,E(Y_t) \quad \text{per a tot} \ \ t \geq 0,$$

cosa que implica necessàriament la propietat ja que $H \in (0,1)$.

c) $E(Y_t^2) = t^{2H}\,\sigma^2$ *si* σ^2 *denota* $E(Y_1^2)$.

Això és a causa de l'autosimilitud, ja que pel fet que $t = 1t$, tenim que Y_t té la mateixa llei que $t^H\,Y_1$ i, per tant,

$$E(Y_t^2) = E\big((t^H\,Y_1)^2\big) = t^{2H}\,E(Y_1^2) = t^{2H}\,\sigma^2.$$

d) *La funció de covariàncies del procés és*

$$\Gamma_H(s,t) = \frac{\sigma^2}{2}\Big(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\Big). \tag{2}$$

En efecte, com que el procés és centrat, usant $a\,b = \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2 - (a-b)^2)$, la funció de covariàncies és

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y_t,\,Y_s) = E(Y_t\,Y_s) &= \frac{1}{2}\Big(E(Y_t^2) + E(Y_s^2) - E\big((Y_t - Y_s)^2\big)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(E(Y_t^2) + E(Y_s^2) - E(Y_{|t-s|}^2)\Big) = \frac{\sigma^2}{2}\Big(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\Big),
\end{aligned}$$

on hem fet servir l'estacionarietat dels increments i l'apartat *c*).

La proposició anterior ens diu quines propietats compleixen els processos autosimilars i amb increments estacionaris però... estem segurs de l'existència d'aquests processos? El resultat següent ens assegura que sí que existeixen.

El moviment brownià fraccionari

10 Proposició *Sigui* $H \in (0, 1)$ *i* $\sigma^2 > 0$*. La funció definida per (2), és a dir,*

$$\Gamma_H(s, t) = \frac{\sigma^2}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\right) \quad s, t \geq 0$$

és definida no negativa.[8]

La demostració de la proposició, molt elegant, es pot trobar a [19]. La seva importància rau en el fet que el caràcter de definida no negativa de la funció Γ_H fa que pugui ser realment la funció de covariàncies d'un procés. En efecte, resultats clàssics de probabilitat ens asseguren que existeix un procés estocàstic, que denotem per $B^H_\cdot = \{B^H_t, t \geq 0\}$, gaussià, centrat i amb funció de covariàncies

$$\mathrm{Cov}(B^H_t, B^H_s) = \Gamma_H(s, t).$$

Notem que amb $s = t$ a l'expressió de la funció de covariàncies

$$\mathrm{Cov}(B^H_t, B^H_t) = \mathrm{var}(B^H_t) = E\left((B^H_t)^2\right) = \sigma^2\, t^{2H} < +\infty.$$

A més, com que un procés gaussià i centrat queda caracteritzat per la seva funció de covariàncies, com ja hem comentat just després de la definició 4, donat $0 < H < 1$, per la proposició 9 tenim que tots els processos gaussians, centrats, autosimilars d'índex H i increments estacionaris, són el mateix procés (llevat de constants multiplicatives). Per això podem donar la definició següent:

11 Definició Un procés $B^H_\cdot = \{B^H_t, t \geq 0\}$ gaussià, centrat, autosimilar d'índex $H \in (0, 1)$, amb increments estacionaris i $E\left((B^H_1)^2\right) = \sigma^2 > 0$, rep el nom de *moviment brownià fraccionari (mbf)* (de variància σ^2). Es diu que el procés és *estàndard* si $\sigma^2 = 1$.

La funció de covariàncies d'aquest procés, com hem vist, serà

$$\mathrm{Cov}(B^H_t, B^H_s) = \Gamma_H(s, t) = \frac{\sigma^2}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\right).$$

Observació Quan $H = 1/2$ aquest procés coincideix amb el procés de moviment brownià clàssic, que hem introduït a la definició 5, ja que

$$\Gamma_{H=1/2} = \frac{\sigma^2}{2}\left(t + s - |t - s|\right) = \sigma^2 \min(s, t),$$

que coincideix amb (1).

L'índex H s'anomena *índex de Hurst* en honor a H. E. Hurst, que en els seus estudis hidrològics al riu Nil va trobar empíricament que el model adequat per a les dades que havia obtingut era un procés autosimilar d'índex $H \cong 0,7$ en lloc

8 Una funció de dues variables f és definida no negativa si, per a tot $n \geq 1$, $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ i $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, es compleix que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(t_i, t_j)\, a_i\, a_j \geq 0$.

de $H = 0,5$, corresponent al cas del moviment brownià clàssic, com en principi havia esperat (vegeu [5]).

Existeixen processos autosimilars i amb increments estacionaris que no són gaussians, encara que cap d'aquests ha tingut la importància del moviment brownià fraccionari, que ha estat utilitzat amb molt d'èxit en modelització.

A partir del que hem vist tenim els resultats següents:

12 PROPOSICIÓ *Sigui* $Y_\cdot = \{Y_t,\ t \geq 0\}$ *un procés estocàstic tal que:*

a) *és un procés gaussià, centrat, i amb* $Y_0 = 0$ *(parteix del* 0 *excepte potser per a un conjunt de trajectòries de probabilitat* 0*),*

b) *existeixen* $\sigma^2 > 0$ *i* $0 < H < 1$ *tals que, per a tot* $t \geq 0$, $E(Y_t^2) = t^{2H}\sigma^2$,

c) *té increments estacionaris;*

llavors, el procés $Y_\cdot$ *és un mbf d'índex* H *i variància* σ^2.

13 PROPOSICIÓ *Siguin* $Y_\cdot = \{Y_t, t \geq 0\}$ *un procés estocàstic i* $\sigma^2 = E(Y_1^2) > 0$. *Fixat* $H \in (0,1)$, *les afirmacions següents són equivalents:*

a) Y *és un procés gaussià, autosimilar d'índex* H *i amb increments estacionaris.*

b) Y *és un mbf d'índex* H *i variància* σ^2.

c) Y *és un procés gaussià, centrat i amb funció de covariàncies donada per*

$$\mathrm{Cov}(Y_t,\ Y_s) = \Gamma_H(s,\ t)\ \Big(= \frac{\sigma^2}{2}\,(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})\Big),\quad s,t \geq 0.$$

Què podem dir de les trajectòries del procés mbf? Per a qualsevol $0 < H < 1$, les trajectòries del mbf d'índex H són contínues però no són diferenciables en cap punt. És a dir, que, tot i ser contínues, les trajectòries són molt irregulars (fan ziga-zaga), encara que són menys irregulars com més gran és H. Més concretament, podem considerar la covariància entre dos increments del procés en intervals $(s_1,\ s_2]$ i $(t_1,\ t_2]$ qualssevol,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_{t_2} - Y_{t_1},\ Y_{s_2} - Y_{s_1}) &= E\Big((Y_{t_2} - Y_{t_1})(Y_{s_2} - Y_{s_1})\Big)\\ &= \frac{\sigma^2}{2}\Big(-|t_2 - s_2|^{2H} + |t_2 - s_1|^{2H} + |t_1 - s_2|^{2H} - |t_1 - s_1|^{2H}\Big). \qquad (3)\end{aligned}$$

Si prenem ara $0 \leq s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2$ (és a dir, els intervals disjunts) tenim que en el cas $H = 1/2$, que correspon al moviment brownià clàssic, la covariància és zero, és a dir, els increments en intervals disjunts són variables aleatòries independents, mentre que si $0 < H < 1/2$ la covariància és negativa (els increments tendeixen a tenir signes oposats, la qual cosa es tradueix en un efecte ziga-zaga més gran) i si $1/2 < H < 1$, és positiva (els increments tendeixen a tenir el mateix signe i disminueix l'efecte ziga-zaga; d'això últim, se'n diu *efecte Josep* pels set anys seguits de vaques grasses i els set anys seguits de vaques magres de l'episodi bíblic). La justificació del signe de la covariància per al cas $H = 1/2$ és immediata, i si $H \neq 1/2$ es basa en el fet que, si definim per a $t \geq 0$

la funció $g(t) = t^{2H}$, resulta que g és estrictament convexa si $1/2 < H < 1$ i estrictament còncava si $0 < H < 1/2$. Per tant, si $1/2 < H < 1$ tenim que

$$g(t_2 - s_2) < \frac{s_2 - s_1}{(t_2 - t_1) + (s_2 - s_1)}\, g(t_1 - s_2) + \frac{t_2 - t_1}{(t_2 - t_1) + (s_2 - s_1)}\, g(t_2 - s_1)$$
$$g(t_1 - s_1) < \frac{t_2 - t_1}{(t_2 - t_1) + (s_2 - s_1)}\, g(t_1 - s_2) + \frac{s_2 - s_1}{(t_2 - t_1) + (s_2 - s_1)}\, g(t_2 - s_1)$$

i sumant dóna:

$$g(t_2 - s_2) + g(t_1 - s_1) < g(t_1 - s_2) + g(t_2 - s_1),$$

amb la qual cosa queda provat que (3) és > 0. El cas $0 < H < 1/2$ es faria anàlogament.

Autosimilitud i memòria llarga

Sigui $Y. = \{Y_t,\ t \geq 0\}$ un procés amb increments estacionaris i autosimilar d'índex H, amb $0 < H < 1$. Podem considerar el procés d'increments associat definit així:

$$X. = \{X_k,\ k \geq 1\}\,, \quad \text{amb } \ X_k = Y_{k+1} - Y_k\,, \quad \text{per a tot } k \in \mathbb{N}\,.$$

14 Definició Si $Y.$ és un mbf de variància σ^2, llavors el procés d'increments associat que acabem de definir, $X.$, rep el nom de *soroll gaussià fraccionari* (de variància σ^2).

Aquestes són les propietats fonamentals del soroll gaussià fraccionari:

15 Proposició *El soroll gaussià fraccionari* $X. = \{X_k,\ k \geq 1\}$ *(de variància* σ^2*) compleix les propietats següents:*

a*) les variables* X_k *tenen totes la mateixa llei* (obvi, ja que el procés $Y.$ té els increments estacionaris)*,*

b*) és centrat* (per ser-ho el procés $Y.$)*,*

c*) la variància de* X_k *és*

$$\operatorname{var}(X_k) = E\big(X_k^2\big) = E\big((Y_{k+1} - Y_k)^2\big) = \frac{\sigma^2}{2}\Big(- 0^{2H} + 1^{2H} + 1^{2H} - 0^{2H}\Big) = \sigma^2$$

per la fórmula (3) amb $s_1 = t_1 = k$ i $s_2 = t_2 = k + 1$ (o bé, directament, ja que, per l'estacionaritat dels increments, $E\big((Y_{k+1} - Y_k)^2\big) = E\big((Y_1)^2\big) = \sigma^2$).

d*) la funció d'autocovariàncies del procés* X*, definida per:*

$$\rho(\ell) = \operatorname{Cov}(X_k, X_{k+\ell}) \quad \textit{per a } \ell \geq 1,$$

és:

$$\rho(\ell) = E(X_k\, X_{k+\ell}) = \frac{\sigma^2}{2}\Big((\ell + 1)^{2H} + (\ell - 1)^{2H} - 2\,\ell^{2H}\Big),$$

fent servir de nou (3) als intervals $(k,\, k+1]$ i $(k+\ell,\, k+\ell+1]$, i tenim que

$$\rho(\ell) \begin{cases} < 0 & \text{si } 0 < H < 1/2, \\ = 0 & \text{si } H = 1/2, \\ > 0 & \text{si } 1/2 < H < 1\,. \end{cases}$$

e*) Si $H \neq 1/2$, tenim que*

$$\rho(\ell) \textit{ es comporta com } \sigma^2 H(2H-1)\,\ell^{2(H-1)} \textit{ quan } \ell \to +\infty.$$

Aquest comportament és conseqüència immediata de *d*), ja que

$$\begin{aligned} \rho(\ell) &= \frac{\sigma^2}{2}\Big((\ell+1)^{2H} + (\ell-1)^{2H} - 2\,\ell^{2H}\Big) \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\,\ell^{2(H-1)}\,\underbrace{\Big(\ell^2\,\big((1+\frac{1}{\ell})^{2H} + (1-\frac{1}{\ell})^{2H} - 2\big)\Big)}_{\text{tendeix a } 2H(2H-1) \text{ quan } \ell\to+\infty}\,. \end{aligned}$$

Per la propietat *e*) veiem que $\lim\limits_{\ell\to+\infty} \rho(\ell) = 0$ com una potència, però quan $1/2 < H < 1$ ho fa tan lentament que la sèrie $\sum\limits_{\ell\geq 1} \rho(\ell)$ divergeix. Llavors diem que el procés $X.$ té *memòria llarga*, a diferència del que passa quan $0 < H < 1/2$, cas en què la sèrie convergeix. En general, podem donar la definició següent:

16 Definició Donada una successió de variables aleatòries, totes amb la mateixa llei, centrades i amb variància finita, $X. = \{X_k,\, k \geq 1\}$, direm que $X.$ té *memòria llarga* si es compleix que

$$\rho(\ell)\Big(= E(X_k\, X_{k+\ell})\Big) \quad \text{es comporta com} \quad \ell^{-\beta}\, L(\ell) \quad \text{quan} \quad \ell \to +\infty$$

amb $0 < \beta < 1$ i L una funció *de variació lenta* a l'infinit[9] (en aquest cas la sèrie $\sum\limits_{\ell\geq 1} \rho(\ell)$ divergeix).

La divergència d'aquesta sèrie captura la intuïció que hi ha darrere de la memòria llarga: encara que les autocorrelacions $\rho(\ell)$ amb ℓ gran (és a dir, en un interval llarg) són petites individualment considerades, el seu efecte acumulat resulta ser important i dóna lloc a un comportament marcadament diferent del que tenen els processos amb memòria curta.

Pel que hem vist, el *soroll gaussià fraccionari* amb $1/2 < H < 1$ és una successió que té memòria llarga, amb $\beta = 2(1-H) \in (0,\,1)$ i L constant i igual a $\sigma^2\, H\,(2H-1)$.

9 Una funció L es diu que és *de variació lenta* a l'infinit si és acotada a cada interval finit i per a tot $a > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{L(a\,x)}{L(x)} = 1$. Les constants i els logaritmes en són exemples.

3 El model de fonts On/Off

Autosimilitud i «cues pesades»

Quan van aparèixer els primers treballs on es donaven evidències del caràcter *fractal* o *autosimilar* del trànsit a través d'Internet els anys 1993 i 1994 (vegeu [10, 11]), va sorgir la qüestió fonamental de quin era el motiu d'aquest fenomen tan sorprenent. Els matemàtics que havien realitzat aquests treballs no estaven en disposició en aquells moments de donar-ne la resposta, però sí que van poder especular sobre aquesta i van acabar enviant un missatge a tota la comunitat d'investigadors en teletrànsit que, parafrasejant la coneguda frase d'Alexandre Dumas (pare), podria escriure's com «Busqueu les cues pesades!».[10] I ho van fer. Un cop sabien què havien de buscar, van començar a trobar «cues pesades» per tot arreu: als temps de CPU consumit per diferents processos, a les mides dels fitxers, al temps entre pulsacions a un teclat d'ordinador, a les durades dels períodes d'activitat elevada i dels períodes de descans de les connexions individuals a Internet, etc. Per exemple, a [2] s'estableix que la llei que modela les mides dels fitxers disponibles a un servidor té «cues pesades», i, en conseqüència, la llei dels seus temps de transmissió també complirà la mateixa propietat. Aquest és un bon exemple de com la col·laboració entre matemàtics i investigadors d'una àrea molt aplicada ha contribuït de manera significativa a una millora en la seva recerca.

Però, què són les cues pesades? Es diu que una llei de probabilitat té *cues pesades* quan les seves cues[11] se'n van cap a zero més lentament que l'exponencial; concretament, quan se'n van cap a zero a la velocitat d'una potència. Més formalment, direm que una variable aleatòria X (o que la seva llei) té *cues pesades* si existeix una constant $K > 0$ tal que

$$P(|X| > x) \text{ es comporta com } K\,x^{-\beta}, \quad \text{amb } \beta \in (0,2), \quad \text{quan } x \to +\infty$$

(encara que també es fa servir aquest nom si en comptes de tenir una constant K es té una funció de x, $L(x)$, que sigui de variació lenta a l'infinit). Una tal variable aleatòria té necessàriament variància infinita (això vol dir que pot fluctuar molt i prendre valors molt allunyats del seu valor mitjà o esperança), i l'esperança també és infinita en el cas particular $\beta \leq 1$. Un exemple de llei d'aquest tipus és la de Pareto.[12] Mandelbrot es refereix a aquest fenomen com a *efecte Noè* o *síndrome de la variància infinita* (fent referència a l'episodi bíblic del diluvi universal).

S'ha vist que hi ha una relació entre el fet que alguns descriptors, com ara la mida o durada de les connexions d'una xarxa de comunicació, tinguin «cues pesades» i l'«autosimilitud» del trànsit de dades a través seu. D'altra banda,

10 La frase a la qual es fa referència és la famosa «Cherchez la femme!» («Busqueu la dona!») de la novela de 1854 *Les mohicans de Paris*, que també apareix a la seva adaptació teatral l'any 1864.

11 Quan x és gran, $P(X > x)$ i $P(X < -x)$ se solen anomenar «cues» de la variable aleatòria X o de la seva llei.

12 La llei de Pareto rep aquest nom en honor del sociòleg italià Vilfredo Pareto (1848–1923), que la va fer servir com a model per a la distribució de la riquesa a una societat.

les «cues pesades» són la base per a la construcció d'una explicació física de la natura autosimilar observada empíricament a les dades del trànsit a través d'Internet: el model de fonts `On/Off` que expliquem en aquesta secció.

El model

Ara presentem un model *estructural* simple i intuïtiu que permet la simulació i que captura l'autosimilitud i la «memòria llarga» observades al trànsit d'informació a través d'Internet. És estructural perquè, a diferència del que succeeix amb els models de tipus «caixa negra», explica les característiques de les dades obtingudes utilitzant el coneixement del qual es disposa sobre el trànsit a través de la xarxa, és a dir, sobre la seva estructura, com per exemple el fet que aquest trànsit és el resultat de la superposició d'un gran nombre de fonts que comparteixen els recursos (les sessions dels usuaris individuals).

Aquest model va ser introduït per primera vegada pels investigadors W. Willinger, M. S. Taqqu i els seus col·laboradors l'any 1997 [24], desenvolupant una aproximació suggerida originalment per Mandelbrot el 1969 a [13] i donada a conèixer als probabilistes per Taqqu i Levy l'any 1986 [20]. La seva importància rau a haver estat el primer model que donava una explicació física plausible del fenomen de l'autosimilitud de les mesures obtingudes del trànsit a través d'una xarxa, presentant sense demostració un resultat que establia que la superposició de moltes fonts que poden estar o bé `On` (enviant dades de manera constant) o bé `Off` (no enviant res) alternativament, amb les longituds dels períodes `On` totes amb la mateixa llei de probabilitat i les longituds dels períodes `Off` també amb la mateixa llei (no necessàriament la mateixa que els `On`), totes independents entre si i amb «cues pesades» (*efecte Noè*), dóna lloc a un trànsit agregat (acumulat) autosimilar. Aquest tipus de fonts es coneixen com a *packet trains* en anglès. El mateix article [24] presenta anàlisis estadístiques molt completes que avalen la presència de «cues pesades» a les mesures obtingudes.

El resultat cabdal des del punt de vista de la modelització que s'enunciava a [24] va ser demostrat pels mateixos investigadors el mateix any a [21]. Com ells mateixos escriuen a la introducció, l'*efecte Noè* (cues pesades) queda identificat com el punt clau en la construcció dels nous models pel trànsit autosimilar (com el de dades a través de les xarxes de telecomunicacions), alternatius als models tradicionals (basats en el procés de Poisson i generalitzacions). A més, el seu resultat relaciona el paràmetre que descriu la intensitat de les cues pesades dels períodes `On` i `Off` d'una font «típica» amb l'índex d'autosimilitud H del trànsit agregat. Aquest trànsit agregat es modelarà mitjançant un procés de moviment brownià fraccionari de paràmetre $H > 1/2$, com veurem a continuació, i com ja sabem, en aquest cas els increments del moviment brownià fraccionari tendeixen a tenir el mateix signe i disminueix l'efecte ziga-zaga de les seves trajectòries (*efecte Josep*).

Concretament, el model suposa que a determinat servidor arriba la informació provinent de N de fonts diferents (independents i del mateix tipus). Cada font pot estar activada (`On`, i en aquest cas envia informació en forma de «paquets» amb un flux constant) o bé estar desactivada (`Off`). Podem definir per a cada instant de temps $t \geq 0$ i per a cada font $n = 1, \ldots, N$, les variables aleatòries

$$U_t^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si la font } n \text{ a l'instant } t \text{ és } \mathtt{On} \\ 0 & \text{si la font } n \text{ a l'instant } t \text{ és } \mathtt{Off} \end{cases}$$

que en variar $n = 1, \ldots, N$ són totes independents i amb la mateixa llei. Suposem que per a cada font, els períodes de temps `On` i `Off` s'alternen estrictament, formant cicles `On–Off`, i que les longituds dels períodes `On` tenen totes la mateixa llei i les longituds dels períodes `Off` també tenen totes la mateixa llei, totes independents entre si. Sigui X_1 una variable aleatòria amb la llei de la longitud d'un període `On`, i X_2 el mateix amb un període `Off`. Notem que tant X_1 com X_2 són variables aleatòries que només prenen amb probabilitat positiva valors no negatius. Suposem que les lleis de probabilitat de les longituds dels períodes `On` i `Off` tenen «cues pesades», és a dir, que quan $x \to +\infty$, $P(X_1 > x)$ es comporta com $x^{-\beta_1} L_1(x)$ i $P(X_2 > x)$ es comporta com $x^{-\beta_2} L_2(x)$ amb $1 < \beta_1, \beta_2 < 2$, L_1 i L_2 funcions de variació lenta a l'infinit tals que, si $\beta_1 = \beta_2$, existeix $\lim_{x \to +\infty} \frac{L_1(x)}{L_2(x)} \in (0, +\infty)$. Llavors, les corresponents esperances, μ_1 i μ_2, són finites, però no ho són les variàncies σ_1^2 i σ_2^2.

Observació En realitat, només cal suposar que o bé X_1 o bé X_2 tenen «cues pesades»; no cal que siguin les dues a la vegada. De tota manera, per simplificar la presentació, ho suposarem així, agafant tant β_1 com β_2 a l'interval $(1, 2)$.

Considerem la suma $\sum_{n=1}^{N} U_u^{(n)}$, que és el nombre de fonts que són `On` a l'instant u. Llavors,

$$A_t^N = \int_0^t \Big(\sum_{n=1}^{N} U_u^{(n)} \Big) \, du$$

és la suma del temps que les fonts han estat `On` a l'interval $[0, t]$. El nombre de paquets arribats a l'interval $[0, t]$ és proporcional a A_t^N, i és per això que fent un abús de llenguatge es diu que A_t^N és la quantitat acumulada o agregada de paquets arribats al servidor, des de l'instant 0 fins a l'instant t. A [21] es demostra que, normalitzant convenientment, A^N convergeix, quan $N \to +\infty$, a un procés de moviment brownià fraccionari, en el sentit de la convergència de les distribucions en dimensió finita. Per tal de donar detalls concrets d'aquesta normalització, necessitem introduir prèviament unes definicions. En primer lloc, el límit

$$b = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{-\beta_1} L_1(x)}{x^{-\beta_2} L_2(x)} = \lim_{x \to +\infty} x^{\beta_2 - \beta_1} \frac{L_1(x)}{L_2(x)}$$

sempre existeix i és ≥ 0, encara que pot ser $+\infty$. Depenent de si aquest límit és finit, zero o infinit, definim una funció L i una quantitat β, de la manera següent:

$$\text{Si} \quad \begin{cases} b = 0 & \text{llavors } \beta_1 > \beta_2 \text{ i es defineixen } L = L_2 \text{ i } \beta = \beta_2. \\ 0 < b < +\infty & \text{llavors } \beta_1 = \beta_2 \text{ i es defineixen } L = L_2 \text{ i } \beta = \beta_2\ (= \beta_1). \\ b = +\infty & \text{llavors } \beta_1 < \beta_2 \text{ i es defineixen } L = L_1 \text{ i } \beta = \beta_1. \end{cases}$$

En qualsevol cas, $\beta \in (1, 2)$; així que si definim

$$H = \frac{3 - \beta}{2}$$

tenim que $H \in (1/2, 1)$. Aquesta és la relació entre un paràmetre que descriu la intensitat de les «cues pesades» amb variància infinita dels períodes `On`/`Off`, que és β, d'una part, i l'índex de Hurst H que mesurarà el grau d'autosimilitud del trànsit agregat, pel que veurem a continuació, de l'altra.

La normalització que es fa del procés A^N és la següent: fixat $t > 0$, per a $T > 0$ qualsevol es considera el procés a l'instant de temps Tt i es defineix

$$\hat{A}_t^{T,N} = \frac{A_{Tt}^N - TtN\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}}{T^H\sqrt{N\,L(T)}}\,. \tag{4}$$

17 Teorema [21, Teorema 1 (1997)]

$$\boxed{\widetilde{\lim_{T\to+\infty}}\ \widetilde{\lim_{N\to+\infty}}\ \hat{A}_\cdot^{T,N} = B_\cdot^H}$$

on $B_\cdot^H$ és un procés de moviment brownià fraccionari de variància σ^2, i σ^2 s'obté a partir de $\beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2$ i el límit b.

La idea de la demostració es pot trobar a l'apèndix.

Intuïtivament, aquest resultat estableix que $TtN\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$, que és el valor mitjà de A_{Tt}^N, dóna la principal contribució a aquest procés per a N i T grans,[13] i que les fluctuacions respecte d'aquest valor mitjà vénen donades per $T^H\sqrt{NL(T)}\,B_\cdot^H$, que és un moviment brownià fraccionari de variància $\sigma^2 T^{2H} NL(T)$ ja que

$$E\big((T^H\sqrt{NL(T)}\,B_1^H)^2\big) = \sigma^2 T^{2H} NL(T),$$

13 Intuïtivament, per a cada font n, $E(\int_0^{Tt} U_u^{(n)}\,du)$ és el temps esperat que la font estarà `On` a l'interval de temps $[0, Tt]$. Aquest interval de temps està dividit en cicles formats per un període `On` i el període `Off` que el segueix, i les longituds dels cicles són independents i totes amb la mateixa llei, d'esperança $\mu_1 + \mu_2$. El procés que compta el nombre de cicles a l'interval s'anomena *procés de renovació*, i quan T és gran, és conegut que el nombre de cicles a $[0, Tt]$ és aproximadament $Tt/(\mu_1 + \mu_2)$. Com que a cada cicle l'esperança de la integral de $U_u^{(n)}$ coincideix amb l'esperança de X_1, que és μ_1, tenim que, per a T gran, $E(\int_0^{Tt} U_u^{(n)}du)$ s'aproxima per $Tt\mu_1/(\mu_1 + \mu_2)$.

és a dir, que, per a N i T grans,

$$\boxed{A^N_{Tt} \quad \text{es comporta com} \quad TtN\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} + T^H\sqrt{NL(T)}\,B^H_t}$$

Observació Uns comentaris sobre aquest resultat:

- Notem que si β s'apropa a 2 (cua poc pesada) H tendeix a $1/2$, que correspon al procés de moviment brownià, mentre que si β s'apropa a 1 (cua molt pesada) H tendeix a 1, és a dir, tindrà les trajectòries més regulars. Per tant, com més pesades siguin les cues, més regulars seran les trajectòries del procés límit.
- En realitat, es pot demostrar un resultat una mica millor que el que hem enunciat, en què el límit quan $T \to +\infty$ és en un sentit més fort que el de la convergència de les distribucions en dimensió finita, però no entrarem en aquesta qüestió. El lector interessat pot trobar-ho a [21].
- L'ordre en què es prenen els dos límits és important. Si aquest ordre s'intercanvia, el procés límit deixa de ser un moviment brownià fraccionari (seria un procés que s'anomena *procés estable de Lévy*, que també és autosimilar i amb increments estacionaris, però independents, cosa que fa que no sigui gaire adequat per a la modelització del trànsit d'informació a través d'Internet).

  I què passaria si T i N anessin conjuntament cap a infinit, és a dir, si considerem una funció de T a valors enters, $N(T)$, no decreixent en T i tal que $N(T) \longrightarrow +\infty$ quan $T \to +\infty$? A l'article [16] es dóna resposta a aquesta pregunta i es demostra que sota la

  $$\text{condició de creixement ràpid:} \quad \lim_{T\to+\infty} \frac{N(T)}{T^{\beta-1}} = +\infty\,,$$

  el límit és un moviment brownià fraccionari d'índex $H = \frac{3-\beta}{2}$, però sota la

  $$\text{condició de creixement lent:} \quad \lim_{T\to+\infty} \frac{N(T)}{T^{\beta-1}} = 0\,,$$

  el límit és un procés estable de Lévy.

4 Conclusions

La descoberta sorprenent de la natura *fractal* o autosimilar del trànsit a través d'Internet feta a principi dels anys noranta va ser rebuda, inicialment, amb escepticisme per gran part de la comunitat matemàtica, que va pensar que es tractava d'una manifestació similar a aquelles que s'havien donat en altres àrees de les ciències naturals i socials, com la hidrologia, l'economia o la biofísica, on la «moda» fractal va ser relativament passatgera i no va tenir molta significació pràctica.

Però s'equivocaven. Aquest descobriment ha estat fonamental per a l'estudi i modelització adequada del trànsit. Per què? Principalment perquè les característiques de les dades disponibles sobre aquest trànsit les fan ser excepcionals en molts sentits: no només quant a la seva quantitat i qualitat sinó, el que és més important encara, quant a la quantitat d'informació que contenen. Es fa difícil pensar en alguna altra aplicació en la qual les dades que es puguin recollir proporcionin una informació tan detallada sobre tants aspectes del comportament del sistema del qual provenen com a Internet. D'altra banda, la possibilitat de detectar efectivament en la realitat la presència de les «cues pesades» va fer que el caràcter fractal del trànsit per Internet perdés el seu misteri, ja que s'havia trobat una explicació real i plausible.

Motivats per la necessitat de donar una explicació física a l'autosimilitud observada empíricament al trànsit d'informació per Internet, un grup de matemàtics va proposar un model basat en la superposició de moltes fonts `On/Off`, tals que els períodes de temps que es troben `On` i/o `Off` tenen lleis amb «cues pesades» (variància infinita). Llavors, el trànsit agregat que generen aquestes fonts en una escala de temps adequada, en el límit es comporta com un moviment brownià fraccionari amb índex de Hurst $H \in (1/2, 1)$, que és un procés amb un comportament autosimilar compatible amb les dades observades. I encara més, l'índex H, que indica el grau d'autosimilitud del trànsit agregat, es pot obtenir a partir d'un paràmetre que mesura el «pes» de les «cues pesades».

Les matemàtiques utilitzades per a la modelització de la natura fractal del trànsit per Internet són a la vegada rigoroses i simples, concorden amb la intuïció i poden ser explicades de manera relativament simple als no especialistes. Aquest és el motiu del seu èxit: han aconseguit el pas històric que representa la substitució del model clàssic basat en el procés de Poisson, que va ser l'únic, amb variants, que es va utilitzar durant més de vuitanta anys, des que Erlang el va introduir l'any 1909, per un nou model més adequat per a la transmissió d'informació a l'àmbit de les telecomunicacions, especialment a Internet.

I el futur, amb quins reptes ens enfrontarà? Les necessitats d'uns usuaris cada vegada més exigents demanen a les xarxes de telecomunicacions actuals que ofereixin accés a qualsevol informació disponible per part de qualsevol usuari, en qualsevol instant de temps i des de qualsevol lloc. Aquest darrer requeriment vol dir que els usuaris no necessiten trobar-se necessàriament en un determinat lloc per tal de poder-se connectar per cable a la xarxa.[14] Intentar respondre a aquesta demanda, encara que pugui semblar contradictori, ha acabat sobrecarregant les xarxes de telecomunicacions per cable. I és que, encara que el sistema de telefonia mòbil opera sense cables, ho fa només quant a la connexió entre el terminal que fa servir l'usuari i l'estació base més propera, mentre que la major part de les connexions entre les estacions base utilitzen les xarxes per cable existents, que així es saturen pel gran volum de trànsit que han de suportar. Els darrers avenços en l'ús dels sistemes de transmissió sense cables i mòbils, entre els quals les xarxes mòbils *ad hoc*

14 En el moment d'escriure aquest article, el nombre de telèfons mòbils a tot el món ja supera clarament el de telèfons fixos.

(MANET), ja han generat i encara generaran nous problemes a la teoria del teletrànsit. Ara que tot just encetem el segon centenari de la teoria de cues, una de les seves tasques per al futur és precisament el desenvolupament de les eines matemàtiques per solucionar aquests problemes.

Apèndix: sobre la demostració del teorema

Donarem en aquest apèndix les idees més importants de la demostració del teorema 17, sense entrar a fons en els detalls tècnics complicats (la demostració dels quals es pot trobar a [21]).

Primer pas:
El primer pas de la demostració consisteix a adonar-se que, pel teorema central del límit habitual,

$$\widetilde{\lim_{N\to+\infty}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \left(U_{\cdot}^{(n)} - E(U_{\cdot}^{(n)}) \right) = G_{\cdot} \tag{5}$$

amb $G_{\cdot} = \{G_u, u \geq 0\}$ un procés gaussià i estacionari[15] (això a causa que, per a cada n, $U_{\cdot}^{(n)} = \{U_u^{(n)}, u \geq 0\}$ és un procés estacionari), que és un procés centrat i amb funció d'autocovariàncies $\{\rho(u), u \geq 0\}$, la mateixa que $U_{\cdot}^{(n)}$, per a qualsevol n, és a dir,

$$\rho(u) = E(G_u G_0) = E(U_u^{(n)} U_0^{(n)}) - (E(U_0^{(n)}))^2.$$

Segon pas:
Ara ens fixem que, per (5), l'expressió de (4) es pot reescriure com

$$\widetilde{\lim_{N\to+\infty}} \hat{A}_{\cdot}^{T,N} = \frac{\int_0^{T\cdot} G_u \, du}{T^H \sqrt{L(T)}}, \tag{6}$$

on hem fet servir la notació $\frac{\int_0^{T\cdot} G_u \, du}{T^H \sqrt{L(T)}}$ per al procés $\left\{ \frac{\int_0^{Tt} G_u \, du}{T^H \sqrt{L(T)}}, t \geq 0 \right\}$. Això és a causa que, per a tot $n = 1, \ldots, N$,

$$\int_0^t E(U_u^{(n)}) \, du = t \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} .$$

Per tant, per demostrar el teorema, fem servir (6) i el que hem de provar és que

$$\widetilde{\lim_{T\to+\infty}} \frac{\int_0^{T\cdot} G_u \, du}{T^H \sqrt{L(T)}} = B_{\cdot}^H . \tag{7}$$

I això serà conseqüència del teorema clàssic de l'any 1962, degut a John W. Lamperti [9], en què es veu com apareixen els processos autosimilars a partir

15 Un procés $X_{\cdot} = \{X_t, t \geq 0\}$ és *estacionari* si les seves distribucions en dimensió finita no canvien en fer una translació en el temps, és a dir, si per a tot $n \geq 1, \ell > 0, t_1, \ldots, t_n \geq 0$ i $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ es compleix que $P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n) = P(X_{t_1+\ell} \leq x_1, \ldots, X_{t_n+\ell} \leq x_n)$.

de cert tipus de límit. Lamperti va ser el primer a observar aquest resultat fonamental, que presentem en una versió lleugerament simplificada, tal com es pot trobar en el capítol 2 del llibre [4] (llevat que a (9) elevem L a $1/2$ per fer una aplicació directa del teorema).

18 Teorema (Lamperti) *Sigui* $Y_\cdot = \{Y_t,\ t \ge 0\}$ *un procés tal que existeixen una funció* f *positiva que compleix* $\lim_{\xi\to+\infty} f(\xi) = +\infty$ *i un procés* $X_\cdot = \{X_t,\ t \ge 0\}$*, de manera que*

$$\tilde{\lim_{\xi\to+\infty}} \frac{X_{\xi\,\cdot}}{f(\xi)} = Y_\cdot \tag{8}$$

on $X_{\xi\,\cdot}$ *denota el procés* $\{X_{\xi t},\ t \ge 0\}$*. Llavors,*

a) *el procés* $Y_\cdot$ *és autosimilar d'índex* H *per a certa* $H \in (0,1)$*, i*

b) *per a certa funció* L *de variació lenta a l'infinit,*

$$f(\xi) = \xi^H L^{1/2}(\xi)\,. \tag{9}$$

Recíprocament, tot procés $Y_\cdot$ *autosimilar d'índex* $H \in (0,1)$ *resulta ser un límit del tipus (8) per a cert procés* $X_\cdot$ *i certa funció* f *que compleix (9).*

(Aquesta darrera afirmació, si agafem $X_\cdot = Y_\cdot$ i $f(\xi) = \xi^H$, és trivial.)

Tercer pas:
Ara apliquem aquest teorema al procés $X_\cdot$ donat per $X_t = \int_0^t G_u\,du$, tenint en compte que $\{G_u,\ u \ge 0\}$ és un procés gaussià, centrat, estacionari i amb funció d'autocovariàncies $\rho(u)$ tal que compleix

$$\int_0^t \Big(\int_0^v \rho(u)\,du\Big)\,dv \quad \text{es comporta com} \quad \frac{\sigma^2 t^{2H} L(t)}{2} \quad \text{quan } t \to +\infty\,, \tag{10}$$

amb $\sigma^2 > 0$, $H \in (0,1)$ i L una funció de variació lenta a l'infinit.

La justificació de (10) és un detall tècnic però és el que porta més feina de la demostració i, per això, no la donarem aquí, i adrecem el lector interessat a l'article original [21, p. 13–15].

Llavors, amb $\xi = T \to +\infty$ i $f(T) = T^H L^{1/2}(T)$, tenim que

$$\tilde{\lim_{T\to+\infty}} \frac{\int_0^{T\,\cdot} G_u\,du}{T^H L^{1/2}(T)} = B^H_\cdot$$

amb $B^H_\cdot$ un mbf amb variància σ^2. La justificació d'aquest límit és que el procés límit a (8) en aquest cas és gaussià, centrat, parteix de l'origen i té increments estacionaris, ja que la integral de $G_\cdot$ ho compleix, i a més el teorema ens diu que és un procés autosimilar d'índex H. D'altra banda,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\Big(\int_0^t G_u\,du\Big) &= E\Big(\big(\int_0^t G(v)\,dv\big)^2\Big) = 2\int_0^t \Big(\int_0^v E(G(v)\,G(r))\,dr\Big)\,dv \\ &= 2\int_0^t \Big(\int_0^v \rho(v-r)\,dr\Big)\,dv = 2\int_0^t \Big(\int_0^v \rho(u)\,du\Big)\,dv\,.\end{aligned}$$

Per tant, fent servir (10) tenim que

$$\operatorname{Var}\Big(\int_0^{Tt} G_u\,du\Big) \quad \text{es comporta com} \quad \sigma^2 (Tt)^{2H} L(Tt) \quad \text{quan} \quad T \to +\infty\,,$$

així que

$$\operatorname{Var}\Big(\frac{\int_0^{Tt} G_u\,du}{T^H\,L^{1/2}(T)}\Big) \text{ es comporta com } \sigma^2 t^{2H} \quad \text{quan } T \to +\infty\,,$$

i aquestes propietats caracteritzen el procés de moviment brownià fraccionari amb variància σ^2, per la proposició 12. □

Agraïments

L'autora voldria agrair al revisor anònim la seva acurada lectura d'una versió prèvia de l'article i els seus comentaris, que han estat molt pertinents i han permès redactar aquesta versió final millorada.

Aquest treball està subvencionat pel projecte de recerca del Ministeri de Ciència i Innovació amb referència MTM2009-08869.

Referències

[1] Brockmeyer, E.; Halstrom, H. L.; Jensen, A. *The life and works of A. K. Erlang*. The Copenhagen Telephone Company, 1848. (Transactions of the Danish Academy of Technical Sciences, 2). [http://oldwww.com.dtu.dk/teletraffic/Erlang.htm].

[2] Crovella, M. E.; Bestavros, A. «Self-similarity in World Wide Web traffic: evidence and possible causes». *IEEE/ACM Trans. Networking*, 5 (6) (1997), 835–846. 160–169.

[3] Delgado, R. «Recordando a Erlang: Un breve paseo (sin esperas) por la Teoría de Colas». *Materials Matemàtics*, 5 (2009). Accessible lliurement a: http://www.mat.uab.cat/matmat/PDFv2009/v2009n05.pdf

[4] Embrechts, P.; Maejima, M. *Selfsimilar processes*. Princeton: Princeton Univ. Press, 2002. (Princeton Ser. Appl. Math.)

[5] Hurst, H. E. «Long-term storage capacity of reservoirs». *Trans. Amer. Soc. Civ. Eng.*, 116 (1951), 770–808.

[6] Kendall, D. G. «Some problems in the theory of queues». *J. R. Stat. Soc. B*, 13 (1951), 151–173 (discussió: 173–185).

[7] Kleinrock, L. «History of the Internet and its flexible future». *IEEE Wireless Communications*, (2008), 8–18.

[8] Kolmogorov, A. N. «Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen raum». *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS (N. S.)*, 26 (1940), 115–118.

[9] Lamperti, J. «Semi-stable stochastic processes». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104 (1) (1962), 62–78.

[10] Leland, W.; Taqqu, M.; Willinger, W.; Wilson, D. V. «On the self-similar nature of the Ethernet traffic». *Proceedings of SIGCOMM'93, San Francisco, California*, (1993), 183–193.

[11] Leland, W.; Taqqu, M.; Willinger, W.; Wilson, D. V. «On the self-similar nature of the Ethernet traffic (extended version)». *IEEE/ACM Trans. Networking*, 2 (1) (1994), 1–15.

[12] Mandelbrot, B. B. «Une classe de processus stochastiques homothetiques a soi; application a loi climatologique de H. E. Hurst». *C. R. Acad. Sci. Paris*, 240 (1965), 3274–3277.

[13] Mandelbrot, B. B. «Long-Run linearity, locally Gaussian processes, H-Spectra and Infinite Variances». *Internat. Econom. Rev.*, 10 (1969), 82–113.

[14] Mandelbrot, B. B. *The fractal geometry of nature*. Nova York: W. H. Freeman and Co., 1982.

[15] Mandelbrot, B. B.; Van Ness, J. W. «Fractional Brownian motions, fractional noises and applications». *SIAM Rev.*, v. 10, (1968), 422–437.

[16] Mikosch, T.; Resnick, S.; Rootzén, H.; Stegeman, A. «Is network traffic approximated by stable Lévy motion or fractional Brownian motion?» *Ann. Appl. Probab.*, 12 (2002), 23–68.

[17] Molina, E. C. «The theory of probabilities applied in telephone trunking problems». *Bell Syst. Tech. J.*, 1 (1922), 69–81.

[18] Palm, C. «Intensity fluctuations in telephone traffic». *Ericsson Technics*, v. 44 (1943), 1–189.

[19] Taqqu, M. S. «Fractional Brownian motion and long-range dependence». A: Doukhan, P.; Oppenheim, G.; Taqqu, M. S. [ed.]. *Theory and applications of long-range dependence*. Boston: Birkhäuser, 2003.

[20] Taqqu, M. S.; Levy, J. «Using renewal processes to generate long-range dependence and high variability». A: Eberlein, E.; Taqqu, M. S. [ed.]. *Dependence in Probability and Statistics*. Birkhäuser, 1986.

[21] Taqqu, M. S.; Willinger, W.; Sherman, R. «Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling». *Comput. Commu. Rev.*, 27 (2) (1997), 5–23.

[22] Willinger, W.; Paxon, V. «Where mathematics meets the Internet». *Notices Amer. Math. Soc.*, (setembre 1998).

[23] Willinger, W.; Taqqu, M. S.; Erramilli, A. «A bibliographical guide to self-similar traffic and performance modeling for modern high-speed networks». A: Kelly, F. P.; Zachary, S.; Ziedins, I. [ed.]. *Stochastic networks: Theory and applications*. Oxford Sci. Publ., 1996. (Royal Statistical Society. Lecture Note Series, 4.)

[24] WILLINGER, W.; TAQQU, M. S.; SHERMAN, R.; WILSON, D. V. «Self-similarity through high-variability: Statistical analysis of Ethernets LAN traffic at the source level». *IEEE/ACM Trans. Networking*, 5 (1) (1997).

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
EDIFICI C, CAMPUS DE LA UAB
08193 BELLATERRA (CERDANYOLA DEL VALLÈS)
Rosario.Delgado@uab.cat