Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 24, núm. 2, 2009. Pàg. 85–96. DOI: 10.2436/20.2002.01.22

La conjectura de Köthe: un dels problemes oberts més antics de la teoria d'anells*

Ferran Cedó Giné

Resum En aquest article s'exposen els conceptes bàsics per entendre la conjectura de Köthe, el context històric en què va sorgir, els avenços més importants sobre la conjectura al llarg de la història i altres conjectures i problemes relacionats.

Paraules clau: anells no commutatius, ideals nil, conjectura de Köthe.

Classificació MSC2010: 16N40.

1 Inicis de l'àlgebra no commutativa

Per entendre bé el context històric en què apareix la conjectura de Köthe, comencem amb unes pinzellades sobre els inicis de l'àlgebra no commutativa i la teoria d'anells.

El 16 d'octubre del 1843, Hamilton descobreix els quaternions. Per analogia amb el producte de nombres complexos, Hamilton intentava trobar una manera de multiplicar ternes de nombres reals escrivint-los com a $a + bi + cj$, amb $a, b, c \in \mathbb{R}$ pensant en $1, i, j$ com a *segments dirigits* mútuament perpendiculars i de longitud 1 a l'espai. A més, com en el producte de complexos, volia que el mòdul del producte de ternes fos igual al producte de mòduls i que $i^2 = j^2 = -1$. D'aquesta manera només li calia decidir quant valia el producte ij (si suposava que $ij = ji$). Però, després d'alguns intents, va veure que s'havia de complir que $ji = -ij$. Poc després es va adonar que ij s'havia de pensar com una nova unitat imaginària: $k = ij$. Així, $k^2 = -1$, i llavors ja va veure com s'havien de multiplicar els elements de la forma $a + bi + cj + dk$, amb $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, anomenats *quaternions*, respectant la *llei dels mòduls*. El conjunt

* Aquest article està basat en la lliçó inaugural de la Secció de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona que vaig pronunciar el 28 d'octubre del 2009. Aquí es donarà informació més especialitzada, però amb la intenció que la pugui entendre qualsevol matemàtic.

Aquest treball està parcialment subvencionat amb els ajuts de MICIN-FEDER (Espanya) MTM2008-06201-C02-01 i de la Generalitat de Catalunya 2009 SGR 1389.

dels quaternions amb la suma i el producte és el primer exemple conegut d'anell no commutatiu amb tots els elements no nuls invertibles. Podeu trobar més detalls sobre aquesta història a [23, p. 179–183].

És clar que la primera estructura algebraica introduïda i estudiada va ser la de grup. Es poden trobar idees de teoria de grups publicades cap al 1800. El treball de Galois del 1831 també és anterior al de Hamilton, però no va ser publicat fins al 1846 per Liouville, catorze anys després de la mort de Galois. La idea de grup abstracte va ser proposada per Cayley el 1849, però no és fins a la publicació de quatre articles seus sobre grups abstractes, el 1878, quan es veu la importància d'aquest concepte [15, p. 1501–1503].

Durant la segona meitat del segle XIX, es van anar introduint diferents exemples d'anells i àlgebres. Paral·lelament, anava avançant la teoria d'invariants, fins a l'aportació fonamental de Hilbert, a finals del segle XIX, amb el seu teorema de la base.

Però la vertadera fundació de la teoria d'anells es podria atribuir a Emmy Noether (1882–1935), a principis del segle XX. Noether va escriure la seva tesi doctoral sobre teoria d'invariants el 1907, sota la direcció de Gordan.

Als anys vint del segle XX, Noether va unificar i estructurar resultats i conceptes de la teoria d'invariants i d'àlgebres de dimensió finita d'autors com ara Hilbert, Wedderburn, Artin i altres, creant la teoria d'anells moderna. En aquest període va crear escola i va influir en molts matemàtics amb les seves idees profundes. Un dels matemàtics de la coneguda com a «escola Noether» va ser Köthe, que va anar a Göttingen el 1928 per assistir a cursos (avui en diríem seminaris) de Noether sobre àlgebra no commutativa [23, 24].

2 Definicions bàsiques

Recordem algunes definicions bàsiques.

Un *anell* és una terna $(R, +, \cdot)$ on R és un conjunt i $+$ i $\cdot$ són dues operacions binàries sobre R tals que $+$ és associativa, commutativa, té element neutre i té element simètric i $\cdot$ és associativa i distributiva respecte de $+$. Normalment (per abús de notació) ens referirem a l'anell R, entenent que sobre R hi tenim definides dues operacions $+$ i $\cdot$ amb les propietats anteriors.

Si en un anell R existeix un element $1 \in R$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ per a tot $a \in R$, es diu que R és un anell *amb unitat*.

Si en un anell R es compleix que $a \cdot b = b \cdot a$ per a tot $a, b \in R$, es diu que R és un anell *commutatiu*.

A la resta de l'article, *anell* voldrà dir anell amb unitat (si no es diu res en contra explícitament).

Exemples 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ és un anell commutatiu.

2) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ és un anell commutatiu.

3) $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ és un anell no commutatiu.

4) $T_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ amb la suma i el producte de matrius és un anell no commutatiu.

Un *ideal per la dreta* d'un anell R és un subconjunt no buit I de R tal que

1) $a + b \in I$ per a tot $a, b \in I$,
2) $ar \in I$ per a tot $a \in I$ i tot $r \in R$.

Anàlogament, es defineix *ideal per l'esquerra*, canviant la condició 2) anterior per

2') $ra \in I$ per a tot $a \in I$ i tot $r \in R$.

Un *ideal* d'un anell R és un ideal per la dreta i per l'esquerra.

EXEMPLES 1) $3\mathbb{Z} = \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ és un ideal de $\mathbb{Z}$.

2) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ és un ideal per la dreta de $M_2(\mathbb{R})$.

3) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ és un ideal per l'esquerra de $M_2(\mathbb{R})$.

4) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ és un ideal de $T_2(\mathbb{R})$.

Un element x d'un anell R és *nilpotent* si existeix un enter positiu n tal que $x^n = 0$.

Un subconjunt S d'un anell R és *nil* si tot element de S és nilpotent.

EXEMPLES 1) L'element 0 de qualsevol anell R és nilpotent.

2) La matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ és nilpotent.

3) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ és un ideal nil de l'anell $T_2(\mathbb{R})$.

4) L'únic ideal per l'esquerra nil de $M_2(\mathbb{R})$ és l'ideal zero $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Vegem-ho. Sigui I un ideal per l'esquerra nil de $M_2(\mathbb{R})$. Sigui $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in I$. Llavors, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$. Es comprova fàcilment que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & a^{n-1}b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per a tot enter positiu n. I com que els elements de I són nilpotents, tenim que $a = 0$. També tenim que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I.$$

Anàlogament, veiem que $c = 0$. Per tant,

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in I.$$

Com que

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & bd^{n-1} \\ 0 & d^n \end{pmatrix},$$

tenim que $d = 0$.

Finalment, com que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in I,$$

veiem anàlogament que $b = 0$.

Per tant, hem vist que $a = b = c = d = 0$ i, en conseqüència, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és l'únic element de I.

3 La conjectura

Ara ja podem enunciar la conjectura del títol de l'article:

Conjectura de Köthe (1930) Tot ideal per l'esquerra nil d'un anell R és dins d'un ideal nil de R.

Observem que en un anell commutatiu tot ideal per l'esquerra és també ideal per la dreta, i per tant, per a anells commutatius la conjectura es compleix trivialment. A més, en un anell commutatiu R hi ha un únic ideal nil N tal que a R/N l'únic ideal nil és l'ideal zero. Aquest ideal nil N s'anomena *el nilradical* de R, coincideix amb la intersecció de tots els ideals primers de R i, a més, $N = \{a \in R \mid a \text{ és nilpotent}\}$.

En un anell no commutatiu, les coses són una mica més complicades. Un ideal I d'un anell R és *nilpotent* si existeix un enter positiu n tal que $a_1a_2\cdots a_n = 0$ per a tot $a_1, \dots, a_n \in I$. És cert que si R és un anell (commutatiu o no), la intersecció de tots els ideals primers de R és un ideal nil, que denotem per $\mathrm{Nil}_*(R)$. A més, l'únic ideal nilpotent de $R/\mathrm{Nil}_*(R)$ és l'ideal zero. Però si R és no commutatiu, pot contenir altres ideals nils amb aquesta propietat de l'anell quocient. Aquest tipus d'ideal s'anomena *un nilradical* de R. De fet, $\mathrm{Nil}_*(R)$ és el nilradical més petit de R. Tot altre nilradical de R conté $\mathrm{Nil}_*(R)$. Per això es diu que $\mathrm{Nil}_*(R)$ és *el nilradical inferior* de R. La suma de tots els ideals nils de R també és un nilradical de R, que denotem per $\mathrm{Nil}^*(R)$. Clarament, $\mathrm{Nil}^*(R)$ conté tots els nilradicals de R, i per això es diu que és *el nilradical superior* de R.

El 1930, Köthe va introduir el nilradical superior d'un anell [16]. És fàcil comprovar que a $R/\mathrm{Nil}^*(R)$ l'únic ideal nil és l'ideal zero. Però podria passar que aquest anell quocient contingués algun ideal per l'esquerra nil no nul, i això ens diria d'alguna manera que l'estructura d'aquest anell quocient encara és massa complicada (la idea és intentar estudiar l'estructura de R entenent com és algun ideal I de R i com és l'estructura de R/I). Observem que la conjectura de Köthe implica que $R/\mathrm{Nil}^*(R)$ no conté cap ideal per l'esquerra nil no nul (ni tampoc per la dreta).

El primer de donar una solució satisfactòria per a l'estudi de l'estructura dels anells va ser Jacobson, el 1945, amb la introducció del radical que porta el seu nom [14]. Recordem que *el radical de Jacobson* $J(R)$ d'un anell R és la intersecció de tots els ideals per la dreta maximals de R, que coincideix amb la intersecció de tots els ideals per l'esquerra maximals de R. De fet, un element $a \in R$ pertany a $J(R)$ si i només si $1 + ar$ és invertible per a tot $r \in R$. Observem que si I és un ideal per la dreta nil i $b \in I$, llavors br és nilpotent per a tot $r \in R$, i per tant existeix un enter positiu n_r tal que $(br)^{n_r} = 0$. En conseqüència, $1 + br$ és invertible i

$$(1 + br)^{-1} = \sum_{i=0}^{n_r - 1} (-br)^i.$$

Així, tenim que $I \subseteq J(R)$. També es pot veure que $J(R)$ conté tots els ideals per l'esquerra nils i que a $R/J(R)$ l'únic ideal per la dreta (o per l'esquerra) nil és l'ideal zero. En canvi, $J(R)$ no és nil en general.

4 Algunes observacions

Estudiem una mica el problema plantejat per la conjectura de Köthe.

Sigui I un ideal per l'esquerra nil d'un anell R. Siguin $a \in I$ i $r \in R$. Llavors, com que $ra \in I$, existeix un enter positiu n tal que

$$(ra)^n = 0.$$

Per tant, $(ar)^{n+1} = a(ra)^n r = 0$. Així, l'ideal per la dreta de R

$$aR = \{ar \mid r \in R\}$$

és nil.

Però, si $a, b \in I$, és cert que l'ideal per la dreta de R

$$aR + bR = \{ar + bs \mid r, s \in R\}$$

és nil?

Observem que si la conjectura de Köthe fos certa, existiria un ideal nil N de R tal que $I \subseteq N$ i, en conseqüència,

$$aR + bR \subseteq N.$$

Per tant, $aR + bR$ seria nil.

En canvi, si calculem directament

$$(ar + bs)^2 = (ar)^2 + arbs + bsar + (bs)^2,$$

$$(ar + bs)^3 = (ar)^3 + (ar)^2bs + arbsar + bs(ar)^2 + ar(bs)^2 + bsarbs + (bs)^2ar + (bs)^3,$$

veiem que surten termes que no es veu clar que siguin potències d'elements nilpotents o que es cancel·lin amb altres termes. Per tant, no és clar que l'element $ar + bs$ sigui nilpotent. Observem que sabem que aR i bR són ideals per la dreta nils, però no sabem si la seva suma $aR + bR$ és nil o no.

De fet, no costa gaire demostrar que la conjectura de Köthe és equivalent al fet que en tot anell la suma d'ideals per la dreta nils és nil (i també és equivalent al fet que en tot anell la suma d'ideals per l'esquerra nils és nil).

5 Alguns resultats importants

Van passar vint-i-sis anys des de la formulació de la conjectura de Köthe fins a l'aparició del primer avenç important sobre la conjectura.

El 1956, Amitsur demostrà els resultats següents [1, 2]:

2 Teorema (Amitsur) *Sigui R un anell. Llavors, $N = R \cap J(R[x])$ és un ideal nil de R i $J(R[x]) = N[x]$.*

Podeu trobar-ne una demostració a [19, p. 71–73].

3 Teorema (Amitsur) *Sigui K un cos no numerable. Sigui R una K-àlgebra. Si I és un ideal per l'esquerra nil de R, llavors $I[x]$ és un ideal per l'esquerra nil de $R[x]$.*

Com que la demostració és relativament senzilla, la reproduïm.

Prova Com que I és ideal per l'esquerra de R, és fàcil comprovar que $I[x]$ és un ideal per l'esquerra de $R[x]$.

Veiem que $I[x]$ és nil. Sigui $a(x) \in I[x]$. Hem de veure que $a(x)$ és nilpotent.

Per a cada enter positiu m, definim

$$C_m = \{\lambda \in K \mid a(\lambda)^m = 0\}.$$

Com que per a tot $\lambda \in K$, $a(\lambda) \in I$ i I és nil, tenim que

$$K = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m.$$

Com que K és no numerable, existeix un enter positiu m tal que C_m és infinit.

Siguin $b_0, b_1, \dots, b_n \in I$ tals que

$$a(x)^m = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n,$$

i siguin $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ $n+1$ elements diferents de C_m. Llavors tenim que $a(\lambda_i)^m = 0$ per a tot $i = 0, 1, \dots, n$, és a dir,

$$\left.\begin{array}{l} b_0 + b_1\lambda_0 + \cdots + b_n\lambda_0^n = 0 \\ b_0 + b_1\lambda_1 + \cdots + b_n\lambda_1^n = 0 \\ \vdots \\ b_0 + b_1\lambda_n + \cdots + b_n\lambda_n^n = 0 \end{array}\right\}$$

que escrit en forma matricial queda

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \dots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com que $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ són diferents, tenim que la matriu de les lambdes és invertible. De fet, el seu determinant és $\prod_{1 \le i < j \le n}(\lambda_j - \lambda_i)$ (el conegut determinant de Vandermonde).

Multiplicant la fórmula anterior per la inversa de la primera matriu per l'esquerra, tenim

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \dots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $b_0 = b_1 = \cdots = b_n = 0$, i així

$$a(x)^m = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n = 0.$$

Llavors, $I[x]$ és nil, com volíem demostrar. □

Com a conseqüència d'aquests resultats, Amitsur obté el resultat següent [1].

4 COROL·LARI (AMITSUR) *Sigui K un cos no numerable. Sigui R una K-àlgebra. Llavors, tot ideal per l'esquerra nil de R està contingut en un ideal nil de R.*

Demostrem també aquest resultat.

PROVA Sigui I un ideal per l'esquerra nil de R. Pel teorema 3, $I[x]$ és un ideal per l'esquerra nil de $R[x]$. Sabem que tot ideal per l'esquerra nil de qualsevol anell està contingut en el seu radical de Jacobson. Per tant, $I[x] \subseteq J(R[x])$. Pel teorema 2, existeix un ideal nil N de R tal que $J(R[x]) = N[x]$. Per tant, $I \subseteq N$. □

És a dir, la conjectura de Köthe és certa per a àlgebres sobre cossos no numerables!

Passen quinze anys, i el 1971 Amitsur fa la pregunta següent [3]:

Sigui R una àlgebra sobre un cos. És cert que si I és un ideal per l'esquerra nil de R, llavors $I[x]$ és nil?

Amitsur sabia des del 1956 que si aquesta pregunta tingués resposta afirmativa, aleshores la conjectura de Köthe seria certa per a àlgebres sobre cossos.

Un any més tard, el 1972, Krempa demostra l'equivalència de la conjectura de Köthe amb altres conjectures de teoria d'anells. A més, obté el resultat següent [17]:

5 Teorema (Krempa) *Si la conjectura de Köthe és certa per a tota K-àlgebra per a tot cos K, llavors la conjectura de Köthe és certa.*

Observem que això encara dóna més importància als resultats i a la pregunta d'Amitsur. De fet, Amitsur coneixia aquest resultat de Krempa (abans de la seva publicació, mitjançant un *preprint*) en el moment de formular la seva pregunta el 1971.

A partir dels resultats de Krempa, molts matemàtics s'interessen novament per la conjectura i s'obtenen resultats parcials, que demostren que la conjectura de Köthe és certa en algunes classes d'anells (per exemple, en la classe dels anells amb dimensió de Krull [20]).

Però l'avenç més significatiu i més important es produeix nou anys després. El 2000, Agata Smoktunowicz demostra el resultat següent [21]:

6 Teorema (Smoktunowicz) *Per a tot cos finit o numerable K existeixen una K-àlgebra R i un ideal nil I de R tal que $I[x]$ no és nil.*

Per tant, la pregunta d'Amitsur té resposta negativa! I la conjectura de Köthe? Doncs bé, continua essent això, una conjectura, encara que el resultat de Smoktunowicz indueix a pensar que aquesta conjectura potser és falsa.

6 Problemes relacionats amb la conjectura de Köthe

Com hem dit en la secció anterior, Krempa [17] demostra l'equivalència de la conjectura de Köthe amb altres conjectures de teoria d'anells. Concretament, Amitsur havia formulat a [2] la pregunta següent:

7 Qüestió *Sigui I un ideal nil d'un anell R. És cert que $I[x] \subseteq J(R[x])$?*

Krempa [17] formula la pregunta següent:

8 Qüestió *Sigui I un ideal nil d'un anell R. És cert que $M_2(I)$ és nil?*

A més, Krempa demostra que la conjectura de Köthe és certa si i només si la qüestió 7 té resposta afirmativa i que això passa si i només si la qüestió 8 té resposta afirmativa.

Al llarg del segle XX, s'han plantejat també alguns problemes que, com la pregunta d'Amitsur, tenen una relació estreta amb la conjectura de Köthe. Anem a comentar alguns d'aquests problemes.

El 1941, Kurosh [18] formula la pregunta següent:

9 QÜESTIÓ *Sigui I un anell sense unitat nil. Suposem que I és finitament generat com a anell sense unitat. És cert que I és nilpotent?*

No és gaire difícil demostrar que una resposta afirmativa a la qüestió 9 implica una resposta afirmativa a la qüestió 8 i, per tant, també la certesa de la conjectura de Köthe.

El 1964, Golod (basant-se principalment en un treball d'ell mateix i Shafarevitch [12]) dóna un exemple d'un anell sense unitat nil i finitament generat que no és nilpotent [11], responent negativament a la pregunta de Kurosh. Com a conseqüència, en el mateix article, dóna un exemple d'un grup periòdic finitament generat infinit i respon negativament al conegut com a problema general de Burnside (enunciat el 1902 [7]).

El 1945, Jacobson [14] formula la pregunta següent:

10 QÜESTIÓ *Sigui R una àlgebra algebraica sobre un cos K. És cert que $M_2(R)$ és algebraica sobre K?*

Recordem que una K-àlgebra R és algebraica si per a tot $r \in R$ existeix un polinomi no nul $p(x) \in K[x]$ tal que $p(r) = 0$.

Amitsur [2] va demostrar que si K és un cos no numerable, la resposta a la qüestió 10 és positiva. Per a cossos arbitraris continua essent un problema obert. No és difícil demostrar que una resposta afirmativa a aquesta qüestió implica una resposta afirmativa a la qüestió 8, i per tant, també implicaria la certesa de la conjectura de Köthe.

Recordem que un anell R és *fortament π-regular* si per a tot $a \in R$ existeixen $b \in R$ i un enter positiu n tals que $a^n = a^{n+1}b$. El 1976, Dischinger [9, 10] demostra que aquesta condició és simètrica dreta-esquerra, és a dir, un anell R és fortament π-regular si i només si per a tot $a \in R$ existeixen $c \in R$ i un enter positiu m tals que $a^m = ca^{m+1}$. A més, també observa que si aquesta condició passa en els anells de matrius, llavors la conjectura de Köthe és certa [9, 10]. El 1978, Armendariz, Fisher i Snider [5] demostren el resultat següent (demostrat independentment per Dischinger, segons Goodearl [13]):

11 TEOREMA (ARMENDARIZ, FISHER I SNIDER) *Sigui R un anell. Llavors les condicions següents són equivalents:*

a) *$M_n(R)$ és fortament π-regular per a tot enter positiu n.*

b) *Tot endomorfisme injectiu de tot R-mòdul per la dreta finitament generat és un automorfisme.*

c) *Tot endomorfisme injectiu de tot R-mòdul per l'esquerra finitament generat és un automorfisme.*

Això dóna una altra raó per saber si la condició de ser fortament π-regular passa en les matrius o no.

El 1998, l'autor i Rowen [8] donen un exemple d'un anell R fortament π-regular tal que $M_2(R)$ no és fortament π-regular.

El 1987, Goodearl [13] caracteritza els anells R tals que tot endomorfisme exhaustiu de tot R-mòdul per la dreta finitament generat és un automorfisme. Per això, introdueix la definició següent: un anell R és *repetitiu per la dreta* si per a tot $a, b \in R$ existeixen un enter positiu n i elements $r_0, r_1, \dots, r_{n-1} \in R$ tals que

$$a^n b = br_0 + abr_1 + \cdots + a^{n-1}br_{n-1}.$$

El resultat de Goodearl és el següent:

12 Teorema (Goodearl) *Sigui R un anell. Llavors, les condicions següents són equivalents.*

a) *$M_n(R)$ és repetitiu per la dreta per a tot enter positiu n.*

b) *Tot endomorfisme exhaustiu de tot R-mòdul per la dreta finitament generat és un automorfisme.*

Goodearl també dóna exemples d'anells repetitius per la dreta que no són repetitius per l'esquerra. A [13, Proposition 12] demostra que si K és un cos i totes les àlgebres de matrius sobre K-àlgebres repetitives per la dreta són repetitives per la dreta, llavors la pregunta de Jacobson (qüestió 10) té resposta afirmativa, i per tant, això implicaria la certesa de la conjectura de Köthe. Així, tenim una altra qüestió relacionada amb la conjectura de Köthe.

13 Qüestió (Goodearl) *Sigui R un anell repetitiu per la dreta. És l'anell $M_2(R)$ repetitiu per la dreta?*

De fet, una resposta afirmativa a aquesta qüestió implica la certesa de la conjectura de Köthe.

Aquesta qüestió de Goodearl encara és un problema obert. També és un problema obert saber si la condició de ser repetitiu per la dreta passa a l'anell de polinomis o no. L'autor i Herbera van demostrar, el 1995, que si per a tot anell R repetitiu per la dreta, $R[x]$ és repetitiu per la dreta, llavors la qüestió 13 té resposta afirmativa (vegeu [4, p. 43]).

Per acabar, comentarem un altre problema que és equivalent a la conjectura de Köthe. El 2001, Beidar, Fong i Puzyłowski, a [6], formulen la pregunta següent:

14 Qüestió *Sigui R un anell sense unitat nil. És cert que llavors $R[x]$ no és primitiu per la dreta?*

Recordem que un anell S sense unitat és *primitiu per la dreta* si S conté un ideal per la dreta maximal Q tal que

1) $\{0\}$ és l'únic ideal de S contingut a Q,

2) existeix $b \in S$ tal que $a - ba \in Q$ per a tot $a \in S$.

El 2005, Smoktunowicz [22] demostra que la conjectura de Köthe és certa si i només si la qüestió 14 té resposta afirmativa.

Referències

[1] Amitsur, A. S. «Algebras over infinite fields». *Proc. AMS*, 7 (1956), 35–48.

[2] Amitsur, A. S. «Radicals of polynomial rings». *Canad. J. Math.*, 8 (1956), 355–361.

[3] Amitsur, A. S. «Nil radicals. Historical notes and some new results». A: *Rings, modules and radicals*. (*Proc. Internat. Colloq., Keszthely, 1971*). Amsterdam: North-Holland, 1973, 47–65. (Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, vol. 6).

[4] Antoine, R. *Anells repetitius*. Treball de recerca Universitat Autònoma de Barcelona, 1997.

[5] Armendariz, E. P.; Fisher, J. W.; Snider, R. L. «On injective and surjective endomorphisms of finitely generated modules». *Comm. Alg.*, 6 (1978), 659–672.

[6] Beidar, K.; Fong, Y.; Puzyłowski, E. R. «Polynomial rings over nil rings can not be homomorphically mapped onto rings with nonzero idempotents». *J. Algebra*, 238 (2001), 389–399.

[7] Burnside, W. «On an unsettled question in the theory of discontinuous groups». *Quart. J. Math.*, 33 (1902), 230–238.

[8] Cedó, F.; Rowen, L. H. «Addendum to "Examples of semiperfect rings"». *Israel J. Math.*, 107 (1998), 343–348.

[9] Dischinger, F. «Sur les anneaux fortement π-réguliers». *C. R. Acad. Sci. Paris* Sér. A, 283 (1976), 571–573.

[10] Dischinger, F. *Stark π-reguläre Ringe*. Dissertació. Ludwig-Maximilians-Universität München, 1977.

[11] Golod, E. S. «On nil algebras and finitely approximable groups». *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, 28 (1964), 273–276.

[12] Golod, E. S.; Shafarevitch, I. R. «On towers of class fields». *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, 28 (1964), 261–272. [En rus]

[13] Goodearl, K. R. «Surjective endomorphisms of finitely generated modules». *Comm. Alg.*, 15 (1987), 589–609.

[14] Jacobson, N. «The radical and semi-simplicity for arbitrary rings». *Amer. J. Math.*, 67 (1945), 300–320.

[15] Kline, M. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, III*. Madrid: Alianza, 1992.

[16] Köthe, G. «Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollstandig reduzibel ist». *Math. Zeitschrift*, 32 (1930), 161–186.

[17] Krempa, J. «Logical connections between some open problems concerning nil rings». *Fundamenta Mathematicae*, 76 (1972), 121–130.

[18] Kurosh, A. G. «Ringtheoretische Probleme, die mit dem Burnsideschen Problem über periodische Gruppen in Zusammenhang stehen». *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, 5 (1941), 233–240. [En rus]

[19] LAM, T. Y. *A First Course in noncommutative rings*. 2a ed. Nova York: Springer, 2001.

[20] LENAGAN, T. H. «The nilradical of a ring with Krull dimension». *Bull. London Math. Soc.*, 5 (1973), 307–311.

[21] SMOKTUNOWICZ, A. «Polynomial rings over nil rings need not be nil». *J. Algebra*, 233 (2000), 427–436.

[22] SMOKTUNOWICZ, A. «On primitive ideals in polynomial rings over nil rings». *Algebras and Representation Theory*, 8 (2005), 69–73.

[23] WAERDEN, B. L. VAN DER *A history of algebra: From al-Khwārizmī to Emmy Noether*. Berlín: Springer, 1985.

[24] WEIDMANN, J. «Gottfried Köthe, 1905-1989: Dedicated to the memory of Professor Gottfried Köthe». *Note di Matematica*, 10 (1990), 1–7.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 BELLATERRA (BARCELONA)
cedo@mat.uab.cat