Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 25, núm. 1, 2010. Pàg. 31–41. DOI: 10.2436/20.2002.01.26

Els treballs d'Hèrcules o els de Sísif? Una visió renovada del fenomen de la incompletesa en lògica matemàtica

Bernard R. Hodgson

Resum L'original anglès [5] d'aquest article[1] es va preparar per al concurs «Raising Public Awareness of Mathematics» de la Societat Matemàtica Europea (EMS), i està basat en material aparegut en francès a [9]. Es va publicar al número de març de 2004 de la *Newsletter* de la EMS. L'autor hi exposa algunes versions modernes del teorema d'incompletesa de Gödel, on el fenomen de la incompletesa s'observa en alguns contextos matemàtics ordinaris, en comptes del context metamatemàtic, més formal, que és el dominant en les versions tradicionals.

Paraules clau: incompletesa, successions de Goodstein, batalles Hèrcules-hidra.

Classificació MSC2010: 03F40, 00A09, 97A80.

1 Introducció

Hèrcules o Sísif? L'heroi dotat d'una força excepcional, capaç de proeses formidables? O l'infortunat predestinat a una tasca sens fi, condemnat a arrossegar muntanya amunt una roca que tan bon punt arriba al cim torna a esmunyir-se pendent avall? Quin d'aquests dos personatges de la mitologia grega ens ve al cap espontàniament quan pensem en alguns problemes matemàtics dels quals no sabem *a priori* si la seva solució representa una tasca realitzable per bé que colossal o, per contra, una tasca totalment inassolible? Considerem per exemple la possibilitat que, per a un exponent n més gran que 2, l'equació $x^n + y^n = z^n$ tingui solucions senceres no nul·les. Una proposició famosa, deguda a Pierre de Fermat (1601–1665), afirma precisament que un exponent així no existeix. Fins que el matemàtic britànic Andrew Wiles, el 1994, va obtenir definitivament[2] una demostració satisfactòria d'aquest «darrer teorema de

1 Agraïm a l'autor i als editors de la *EMS Newsletter* el permís per a publicar aquesta traducció, deguda a Josep Maria Font.

2 La prova anunciada per Wiles el 1993 contenia un error que va ser finalment corregit l'any següent.

Fermat», molts tenien la sensació que això podria molt bé ser un cas típic de situació «sisifiana». O potser hauríem de dir «doblement sisifiana», ja que no solament havien fracassat els oponents de la tesi de FERMAT en els seus intents d'identificar valors concrets de n que donessin solucions, sinó que també havien vist decebudes les seves esperances els que, al llarg dels anys, havien cregut tenir a l'abast una demostració de l'afirmació de Fermat. Ara sabem, gràcies a Wiles, que la solució d'aquest problema representa més aviat una tasca hercúlia: d'una dificultat extrema, però malgrat tot assolible. Els darrers anys s'han descobert altres situacions de naturalesa aparentment sisifiana però que de fet són hercúlies. El que és força sorprenent és que s'han establert lligams entre alguns d'aquests problemes i el fenomen de la *incompletesa del formalisme matemàtic* descobert a començament dels anys trenta del segle passat pel lògic austríac Kurt Gödel (1906–1978). Això ha fet observar, contra l'opinió d'un gran nombre de matemàtics i epistemòlegs, que la incompletesa no gira únicament al voltant d'afirmacions més o menys esotèriques sense relació amb la pràctica diària del matemàtic. La recerca recent ha mostrat que la incompletesa és sempre present i pot aparèixer inopinadament en multitud de contextos matemàtics. Diguem adéu, doncs, a la còmoda indiferència dels matemàtics envers les consideracions «metamatemàtiques»! Però en què consisteix exactament aquest important canvi de perspectiva?

2 Gödel a l'abast de tothom

La *metamatemàtica* estudia la matemàtica tal com es practica i, en particular, el que fa referència a la naturalesa i la funció del raonament formalitzat. L'empresa metamatemàtica tingué les seves arrels en la «crisi de fonaments» desencadenada a començament del segle XX pel descobriment d'inconsistències en alguns racons del paisatge matemàtic (vegeu el requadre *La paradoxa de Russell*, p. 33), i assolí el seu apogeu en l'anomenat *programa de Hilbert*, en referència al gran matemàtic alemany David Hilbert (1862–1943), que va intentar provar rigorosament la no contradicció de la matemàtica formalitzada.

La idea de traslladar el raonament a un marc formal introduint un simbolisme apropiat i unes regles deductives es troba ja en Leibniz (1646–1716). I quan Hilbert proposa el seu programa, ja s'ha progressat considerablement vers aquest objectiu, especialment des de mitjan segle XIX. Però el 1931, *coup de théatre*: Gödel sacseja la comunitat científica amb la publicació dels seus famosos *teoremes d'incompletesa*, que revelen unes estrictes limitacions inherents al formalisme matemàtic i al mateix temps donen un cop mortal al programa de Hilbert.

El *primer* d'aquests teoremes estableix que, en qualsevol sistema formal que satisfaci unes condicions molt generals —per exemple, ha de contenir la *teoria aritmètica elemental* de la suma i el producte, requeriment realment mínim si hom vol fer qualsevol mena de matemàtica—, existeix una *afirmació veritable però indemostrable* en aquest sistema.

La paradoxa de Russell (1902)

Designem amb C la col·lecció de tots els conjunts X que compleixen la propietat següent: X no és un element de X. Pertànyer a C es redueix, doncs, a que sigui veritat la propietat que la defineix; en altres paraules, X és un element de C si i només si X no és un element de X. Si considerem en particular l'afirmació «C és un element de C», deduïm que aquesta afirmació és veritat si i només si una segona afirmació és veritat, concretament l'afirmació «C no és un element de C». Aquesta situació contradictòria ens porta a concloure que la propietat que defineix C no és acceptable.

Aquesta paradoxa, descoberta pel matemàtic i filòsof britànic Bertrand Russell (1872–1970), mostra que la teoria de conjunts *intuïtiva* és inconsistent, de manera que no podem treballar amb conjunts sense introduir alguns mecanismes reguladors. L'objectiu de les diverses formalitzacions de la teoria de conjunts que s'han desenvolupat durant el segle XX és precisament el de restringir les regles de formació de conjunts de forma que s'evitin les inconsistències. En un sentit més ampli, la recerca metamatemàtica pretén enfortir els fonaments de les matemàtiques i assegurar un entorn de treball per al matemàtic on no hagi de témer trobar-se una contradicció en cap moment.

Pel que fa al *segon* teorema d'incompletesa de Gödel, presenta un exemple específic d'una tal afirmació: en concret, l'afirmació que expressa la consistència del sistema formal mateix. I no serveix de res intentar arreglar aquestes deficiències simplement adoptant aquestes afirmacions indemostrables com a nous principis bàsics (*axiomes*), ja que immediatament sorgiran noves afirmacions veritables i indemostrables.

Les reaccions als resultats de Gödel van ser molt variades. Mentre que a alguns els fascinava aquest nou reconeixement de les limitacions intrínseques del formalisme, els matemàtics normals i corrents —en concret, els matemàtics que no es preocupaven de qüestions epistemològiques— veien el fenomen de la incompletesa com a aliè a la seva feina. O bé (segon teorema) perquè ho consideraven l'expressió d'una limitació molt raonable —una prova de consistència d'un sistema formal que tingués lloc a dins del mateix sistema difícilment seria creïble— o bé perquè percebien l'afirmació indemostrable construïda per Gödel en el seu primer teorema, una enginyosa variació sobre la *paradoxa del mentider* (vegeu el requadre *L'afirmació no demostrable de Gödel*, p. 34), com a molt poc susceptible de tenir connexions amb els problemes que «normalment» s'estudien en matemàtiques. Aquest és precisament l'aspecte en què recentment les coses han canviat d'una manera dràstica. I aquí és on trobem Hèrcules i Sísif.

L'afirmació no demostrable de Gödel

Des de temps antics hom sap que les afirmacions que es refereixen a si mateixes poden dur a situacions estranyes. Un exemple és l'afirmació «la present afirmació és falsa», atribuïda al filòsof grec Eubúlides (segle IV aC): si l'afirmació és veritat, aleshores esdevé falsa, i, recíprocament, si és falsa aleshores esdevé veritable. L'afirmació de Gödel, que també es basa en la noció d'*autoreferència*, es pot mirar com una variant de la paradoxa del mentider; simplificant, diu que «la present afirmació no és demostrable». La formulació detallada de l'afirmació de Gödel requereix un cert nombre de construccions tècniques bastant serioses, però no és gaire difícil de veure per què és *veritat* i *indemostrable* alhora. Si l'afirmació de Gödel fos demostrable, el que diu seria veritat, ja que el formalisme s'ha muntat de tal manera que només demostra afirmacions que són veritat. Però què diu l'afirmació? Que ella mateixa és indemostrable. Per tant, si fos demostrable aleshores seria indemostrable, una situació contradictòria. Hom conclou, per tant, que l'afirmació ha de ser indemostrable, i per consegüent, ha de ser veritat, ja que el que afirma és la seva indemostrabilitat. De tota manera, per a molts l'afirmació de Gödel és una mena de joc amb el llenguatge sense connexió amb la pràctica matemàtica real.

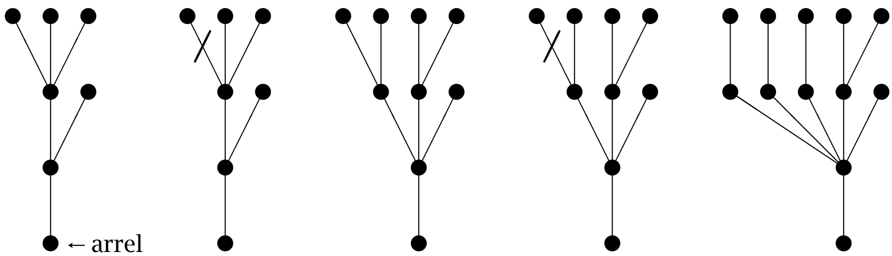
3 On Hèrcules troba l'hidra

El segon dels dotze «treballs» imposats a Hèrcules va ser una lluita contra l'hidra de Lerna, un monstre de nou caps, o més segons alguns autors, que es regeneraven tan bon punt eren tallats —en algunes versions cada cap tallat era substituït per dos. La llegenda explica com Hèrcules va guanyar finalment l'hidra, ajudat pel seu nebot Iolaos, que anava cremant les ferides de cada cap tallat, per impedir que tornés a créixer.

Els lògics Laurie Kirby i Jeff Paris van idear fa alguns anys una hidra encara més diabòlica per a enfrontar-la a Hèrcules, ja que el nombre de caps que sorgeixen va augmentant a mesura que la batalla es va desenvolupant (vegeu el requadre *Les regles de la batalla*, p. 35). Malgrat la seva aparent innocuïtat, les regles que defineixen la batalla tenen un efecte realment dramàtic, ja que al cap d'uns pocs passos Hèrcules s'està enfrontant a una hidra increïblement frondosa. Podrà Hèrcules dominar l'hidra, malgrat tot? Dit cruament, es comportarà com l'Hèrcules mític, o es trobarà embolicat en una tasca interminable, com el patètic Sísif?

La resposta és que Hèrcules *sempre guanya la batalla*, sigui quina sigui l'hidra a què s'enfronti i l'estratègia que faci servir per anar tallant caps (confirmant així la seva reputació). Aquest resultat de Kirby i Paris, molt impressionant, es basa en un remarcable teorema numèric del lògic Reuben L. Goodstein (1912–1985) [3], i contradiu totalment la intuïció que s'adquireix considerant unes quantes batalles concretes, que semblen senzillament inacabables —proveu-ho, *Les regles de la batalla*

Una hidra és un arbre, és a dir, una configuració de punts cadascun connectat per un únic camí a un punt específic anomenat arrel. Un cap és qualsevol punt situat al final d'un camí, llevat de l'arrel. En el pas n-èsim de la batalla, Hèrcules talla un cap (indicat a la figura per un traç inclinat) i a continuació l'hidra es regenera fent créixer en el punt situat *dos nivells per sota* del tall (cap a l'arrel) n còpies de la secció restant de l'arbre, que contenia el cap tallat, a partir d'aquest punt. En canvi, si el cap és connectat directament a l'arrel, no passa res. Hèrcules guanya la batalla quan aconsegueix tallar tots els caps de l'hidra, fins a l'arrel.



Una hidra amb 4 caps *Pas 1* *La nova hidra* *Pas 2* *La nova hidra*

i ja ho veureu. En la seva batalla contra una hidra, Hèrcules necessitarà tallar un nombre increïblement gran, però *finit*, de caps. Encara que la disposició dels caps s'eixampli, no es farà més alta, ja que va formant un arbre que roman a prop de terra, com un bonsai, i amb les branques connectades més i més a prop de l'arrel. Amb paciència Hèrcules anirà reduint l'hidra a un conjunt de caps connectats directament a l'arrel, i aleshores només haurà d'ocupar-se d'aquests caps un a un, sense que en surti cap més.

La batalla d'Hèrcules amb l'hidra, encara que superficialment sembla sisifiana, és de fet una tasca genuïnament hercúlia: una tasca d'un abast absolutament fabulós, però malgrat tot realitzable.

4 Algunes successions explosives

Deixem Hèrcules amb la seva hidra, i considerem un altre context amb treballs herculis que a primera vista semblen sisifians. Podríem imaginar Hèrcules canviant l'espasa per un llapis, a fi de calcular els termes d'una successió numèrica.

El nombre $3 \cdot 2^{402\,653\,211} - 3$ és un nombre gegantí[3] que va fer la seva aparició a la literatura matemàtica fa alguns anys. Aquí teniu la seva història.

El 1944, Goodstein va inventar un procés per a generar successions de nombres naturals que, contra tota expectativa, acaben inevitablement en el 0. El nombre $3 \cdot 2^{402\,653\,211} - 3$ és precisament el nombre de passos que li calen a la *successió de Goodstein* amb valor inicial 4 per assolir el valor 0!

Una versió restringida del procés de Goodstein s'obté a partir de la representació dels nombres en una base determinada. Donat un nombre natural $b \geq 2$, qualsevol enter m es pot escriure com la suma de múltiples de potències de b; quan $b = 10$ això dóna simplement la notació usual: $266 = 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$.

Ara modifiquem aquesta representació de m en base b canviant sistemàticament b per $b + 1$, i després restem 1 al resultat obtingut. Això produeix un nou nombre, al qual li podem aplicar el mateix procés, canviant $b + 1$ per $b + 2$ i tornant-li a restar 1 (vegeu el requadre *Successions de Goodstein febles*, p. 37).

Els nombres produïts successivament d'aquesta manera semblen créixer més i més. Però això és una observació enganyosa, ja que el fenomen és temporal: qualsevol d'aquestes successions acabarà inevitablement en 0. Sens dubte això és un resultat molt sorprenent, que reflecteix el fet que malgrat l'increment de la base, la substracció d'1 «es menja» gradualment tots els termes que apareixen en les expressions successives, un darrere l'altre.[4]

El procés estudiat per Goodstein és més general, de fet, i hi apareixen nombres molt més espectaculars. Es basa en la noció de *representació completa*[5] *en base b* d'un nombre natural: com en el cas anterior, escrivim el nombre com a suma de múltiples de potències de b, però després fem el mateix amb els exponents que surten a la representació, i també amb els exponents d'aquests exponents, etc., fins que la representació sencera s'estabilitza. Per exemple, la representació completa en base 2 de 266 ($= 2^8 + 2^3 + 2^1$) és $2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$.

El procés de Goodstein consisteix a canviar també totes les ocurrències de b per $b + 1$ en la representació completa en base b d'un enter, i després restar-li 1. El creixement que podrem observar en els primers termes de les successions resultants (vegeu el requadre *Successions de Goodstein*, p. 38) és senzillament fenomenal comparat amb el de les successions febles, i els termes de la successió esdevenen ràpidament d'una grandària realment aclaparadora!

També aquí, malgrat la fantàstica explosió que podem observar, un hèrcules que vagi calculant els termes de la successió no podrà evitar d'obtenir finalment el 0. Cal reconèixer que aquest fet va totalment contra la intuïció. Goodstein [3] va provar justament que totes les successions de Goodstein arriben a 0 —però

3 Aquest nombre és de l'ordre de $10^{121\,210\,695}$ i la seva representació decimal usual té més de 121 000 000 xifres. Si escrivíssim aquestes xifres a raó de 100 xifres per línia i 50 línies per pàgina, tindríem un llibre de més de 24 000 pàgines!

4 Fixeu-vos que, encara que alguns dels càlculs de vegades augmenten el nombre de termes —vegeu el pas de m_3 a m_4 al requadre *Successions de Goodstein febles*, p. 37—, els exponents es van fent més petits. Això ens recorda els caps de l'hidra, que augmenten en nombre però inexorablement van quedant més a prop de l'arrel.

5 També anomenada *representació en superbase b* en algunes obres de divulgació. [N. del t.]

Successions de Goodstein febles

Sigui b un enter positiu ≥ 2 (la *base*). Tot nombre natural m es pot escriure (d'una única manera) en la forma

$$m = k_1 \cdot b^{a_1} + k_2 \cdot b^{a_2} + \cdots + k_n \cdot b^{a_n},$$

on els exponents $a_1, a_2, \ldots, a_n$ són enters positius estrictament decreixents ($a_1 > a_2 > \cdots > a_n$) i els coeficients $k_1, k_2, \ldots, k_n$ són «xifres» en la base b —per tant, cada coeficient és un nombre natural menor que b. Per exemple, amb $b = 2$ i $m = 266$ tenim:

$$\begin{aligned} 266 &= 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= 2^8 + 2^3 + 2^1 \end{aligned}$$

La *successió de Goodstein feble* amb valor inicial 266 es defineix així: el seu primer terme m_0 és 266. Per a obtenir m_1, el segon terme de la successió, prenem la representació anterior, incrementem la base en una unitat, passant de 2 a 3, i després restem 1 al resultat:

$$m_1 = 3^8 + 3^3 + 3^1 - 1 = 3^8 + 3^3 + 2 = 6\,590.$$

Per a calcular els termes següents de la successió es procedeix anàlogament. En cada pas la representació es reescriu, si cal, com una suma de múltiples de la base corresponent —vegeu el càlcul de m_4 més avall. Aquests són els primers termes de la successió de Goodstein feble amb valor inicial 266:

$$\begin{aligned} m_0 &= 2^8 + 2^3 + 2^1 = \mathbf{266} \\ m_1 &= 3^8 + 3^3 + 3^1 - 1 = \mathbf{6\,590} = 3^8 + 3^3 + 2 \\ m_2 &= 4^8 + 4^3 + 1 = \mathbf{65\,601} \\ m_3 &= 5^8 + 5^3 = \mathbf{390\,750} \\ m_4 &= 6^8 + 6^3 - 1 = \mathbf{1\,679\,831} = 6^8 + 5 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 5 \\ m_5 &= 7^8 + 5 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 4 = \mathbf{5\,765\,085} \end{aligned}$$

en general trigaran molta estona! Per exemple, si comencem amb $m = 4$, l'índex del terme m_r on la successió arriba finalment a 0 és precisament el nombre $r = 3 \cdot 2^{402\,653\,211} - 3$, del qual hem parlat abans.[6] L'efecte encara és més fantàstic si prenem com a valor inicial de la successió un enter més gran.

Tenim aquí un altre cas d'una tasca que aparentment és de tipus sisifià, però que en realitat és hercúlia: el càlcul dels termes d'una successió de Goodstein sembla una feina inacabable, i és veritat que serà molt llarga, però és inevitablement finita ja que sempre arribarem a 0… si tenim prou paciència!

6 Aquest resultat no és gaire difícil d'establir i es fa en un exercici dirigit a [4].

Successions de Goodstein

Donat un nombre natural m, la *successió de Goodstein* amb valor inicial m és la successió d'enters $m_0, m_1, m_2, \ldots$ definida com segueix:

- $m_0 = m$;
- m_1 s'obté de m_0 substituint cada 2 de la representació completa de m_0 en base 2 per un 3, i després restant 1;
- m_2 s'obté de m_1 substituint cada 3 de la representació completa de m_1 en base 3 per un 4, i després restant 1;
- etc.

i el procés s'atura si un terme pren el valor 0.

Els primers termes de la successió de Goodstein amb valor inicial 266 són aquests:

$$m_0 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1 = \mathbf{266}\,,$$

$$\begin{aligned} m_1 &= 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3^1 - 1 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \\ &= 443\,426\,488\,243\,037\,769\,948\,249\,630\,619\,149\,892\,886 \approx \mathbf{10^{38}}\,, \end{aligned}$$

$$m_2 = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \approx \mathbf{10^{616}}\,,$$

$$m_3 = 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} \approx \mathbf{10^{10\,921}}\,,$$

$$\begin{aligned} m_4 &= 6^{6^{6+1}} + 6^{6+1} - 1 \\ &= 6^{6^{6+1}} + 5 \cdot 6^6 + 5 \cdot 6^4 + 5 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 5 \\ &\approx \mathbf{10^{217\,832}}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_5 &= 7^{7^{7+1}} + 5 \cdot 7^7 + 5 \cdot 7^4 + 5 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 4 \\ &\approx \mathbf{10^{4\,871\,822}}\,. \end{aligned}$$

Donar una explicació senzilla de l'estrany comportament de les successions de Goodstein no és fàcil. De tota manera, cal remarcar que, encara que la part exponencial del procés de Goodstein sembla que origini una veritable explosió numèrica, això només és un fenomen limitat, ja que aquest creixement il·limitat només ho és en aparença. Com en el cas feble, la substracció d'una unitat acabarà empassant-se els nombres gegantins que resulten dels canvis successius de la base —però pot ser que això no passi fins després d'un viatge molt llarg, a causa dels nombres monstruosos trobats pel camí. Per exemple, observem l'impacte del -1 sobre la successió de Goodstein de valor inicial 3, que és excepcionalment curta:

$$
\begin{aligned}
m_0 &= &&= \mathbf{3} = 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
m_1 &= 3^1 + 1 \cdot 3^0 - 1 &&= \mathbf{3} = 1 \cdot 3^1 \\
m_2 &= 1 \cdot 4^1 - 1 &&= \mathbf{3} = 3 \cdot 4^0 \\
m_3 &= 3 \cdot 5^0 - 1 &&= \mathbf{2} = 2 \cdot 5^0 \\
m_4 &= 2 \cdot 6^0 - 1 &&= \mathbf{1} = 1 \cdot 6^0 \\
m_5 &= 1 \cdot 7^0 - 1 &&= \mathbf{0}\,.
\end{aligned}
$$

Fixem-nos que el terme $m_2 = 3 \cdot 4^0 = 3$ és, per dir-ho d'alguna manera, independent de la base 4; això fa que els termes següents no es vegin afectats pels canvis ulteriors en les bases, de manera que, senzillament, la successió decreix cap a 0. En cada successió de Goodstein es dóna exactament el mateix fenomen, però potser a partir dels termes d'índex molt més alt: per exemple, és remarcable que la successió de Goodstein de valor inicial 4 sigui moltíssim més llarga que la de valor inicial 3.

El comportament de les successions de Goodstein també recorda les batalles d'Hèrcules amb l'hidra. En ambdós casos hom afronta una situació que sembla que explota incontroladament. Però la veritat és que, encara que ambdós contextos són extraordinàriament complexos, tenen relació amb processos finits, ja que realment acaben després d'un cert temps —extremament llarg! Encara que aparentment sisifianes, les tasques corresponents són genuïnament hercúlies.

Però encara hi ha més: la dicotomia herculi-sisifià, tant en el context de l'hidra com en el de Goodstein, adquireix un regust nou si ens la mirem des d'un altre punt de vista, el que posa en primer pla el fenomen de la incompletesa.

5 Què passa amb la incompletesa?

La quantitat de caps tallats per Hèrcules durant una batalla és absolutament enorme: finita, però no hi ha dubte que excedeix la imaginació més delirant. Per exemple, encara que Hèrcules eliminés caps al ritme endimoniat d'un per segon, la lluita amb una hidra modesta, amb només uns pocs caps al començament, duraria tant que el nombre de segons que han passat des del Big Bang semblaria trivial! I és precisament en aquest aspecte de la situació on rau la incompletesa.

Situant-nos en el marc de l'aritmètica elemental, com he suggerit abans, tenim el següent fenomen doble: d'una banda, és possible simular les batalles d'Hèrcules en aquest marc, a través de complexos càlculs numèrics: és una qüestió tècnica però no gaire dificultosa (cal associar a cada hidra un codi numèric adequat). Però d'altra banda és *impossible* demostrar en aquest marc que Hèrcules sempre guanyarà: la prova rigorosa d'aquesta imbatibilitat necessita un marc més ric, com és la *teoria dels ordinals transfinits*. De fet, es pot trobar una fita per a la raó de creixement de les funcions tractables dins de l'aritmètica elemental, i la funció que dóna la durada de les batalles justament supera aquesta fita: creix molt més de pressa! De manera semblant, la funció que expressa la longitud de les successions de Goodstein, és a dir, el nombre de termes necessaris per a trobar 0, sempre pren valors finits, però el seu creixement també supera el marc de l'aritmètica elemental.[7]

Mentre que un matemàtic normal i corrent tendirà a considerar artificial l'afirmació construïda per Gödel, percebrà la lluita entre Hèrcules i l'hidra o el càlcul de les successions de Goodstein com a problemes matemàtics genuïns — pertanyents a la branca de les matemàtiques anomenada *combinatòria*. Aquest matemàtic sap demostrar, amb les eines apropiades, que les batalles sempre acaben amb la victòria d'Hèrcules, i que totes les successions de Goodstein convergeixen a 0, però no ho pot fer amb l'aritmètica elemental, que d'altra banda és el marc natural per a la combinatòria. Per tant, s'enfronta a una proposició que és *veritat*, però que és *indemostrable* en el marc de la teoria a la qual pertany. Malgrat que les lluites amb les hidres o els càlculs *estil* Goodstein, de fet, són herculis, semblaran sisifians a qui prengui l'aritmètica elemental com a «sistema de referència». La situació es tenyeix d'una mena de relativitat: la tasca apareix com a inacabable per a un observador situat «a dintre» de l'aritmètica elemental, però en realitat és finita —per bé que colossal—, cosa que es pot veure observant-la «des de fora» de l'aritmètica, en un marc formal més potent.

El darrer teorema de Fermat també pertany a l'aritmètica elemental, pel que fa al seu contingut; però la prova donada per Wiles es basa en eines matemàtiques d'alt nivell, superant àmpliament el marc teòric de l'aritmètica elemental. Hi ha alguna esperança que algun dia es pugui demostrar que l'afirmació de Fermat, encara que hercúlia, es vegi com a sisifiana quan es considera des del punt de vista de l'aritmètica elemental? Un tal resultat seria molt revelador, ja que ens donaria una mena de mesura de la dificultat intrínseca d'aquest teorema. Encara que no podem excloure aquesta possibilitat, cal dir que la recerca en lògica matemàtica no ha assolit encara aquest estadi.

Per anar més enllà

Hofstadter [6] presenta una exposició popular dels resultats de Gödel i desenvolupa una analogia amb la música de Johann Sebastian Bach (1685–1750) i els dibuixos de l'artista holandès Maurits Cornelius Escher (1898–1972). Les nostres analogies mitològiques tenen el seu origen en l'article tècnic [8], on Kirby i Paris van presentar els seus resultats, i en l'exposició popular de Gardner [2]. La distinció entre les successions de Goodstein generals i les febles es pot trobar a Cichon [1]. L'article [7] explora la possibilitat d'emprar propietats de les successions de Goodstein per a definir marcs formals on es pugui demostrar

7 En canvi, l'aritmètica elemental sí que permet demostrar que les successions de Goodstein febles són sempre finites. El procés és força complicat, però a la pràctica molt menys que el de les successions de Goodstein generals.

el caràcter finit d'alguns processos algorísmics que s'estudien en informàtica teòrica.

Referències

[1] CICHON, E. Adam. «A short proof of two recently discovered independence results using recursion theoretic methods». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 87 (1983), 704–706.

[2] GARDNER, Martin. *The last recreations*. Nova York: Springer, 1998. [Vegeu el capítol 2: «Bulgarian solitaire and other seemingly endless tasks», 27–43; va ser publicat originalment a *Scientific American* (agost 1983) 12–21]

[3] GOODSTEIN, Reuben L. «On the restricted ordinal theorem». *J. Symbolic Logic*, 9 (1944), 33–41.

[4] HENLE, James M. *An outline of set theory*. Nova York: Springer, 1986.

[5] HODGSON, Bernard R. «Herculean or Sisyphean tasks? A renewed look at the incompleteness phenomenon in mathematical logic». *EMS Newsletter*, 51 (març 2004), 11–16.

[6] HOFSTADTER, Douglas R. *Gödel, Escher, Bach: An eternal golden braid*. Nova York: Basic Books, 1979. [Traducció espanyola: *Gödel, Escher, Bach: Un eterno y grácil bucle*. Barcelona: Tusquets, 1987. (Metatemas; 14)]

[7] KENT, Clement F.; HODGSON, Bernard R. «Extensions of arithmetic for proving termination of computations». *J. Symbolic Logic*, 54 (1989), 779–794.

[8] KIRBY, Laurie; PARIS, Jeff. «Acccessible independence results for Peano arithmetic». *Bull. Lond. Math. Soc.*, 14 (1982), 285–293.

[9] PALLASCIO, Richard; LABELLE, Gilbert [ed.]. *Mathématiques d'hier et d'aujourd'hui*. Mont-real: Modulo Éditeur, 2000.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE, UNIVERSITÉ LAVAL
1045 AVENUE DE LA MÉDECINE, QUEBEC (QUEBEC), G1V 0A6 CANADÀ
bhodgson@mat.ulaval.ca