

BUTLLETÍ DE LA SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES
Vol. 12, núm. 1, 1997. Pàg. 7-16.

Sistemes dinàmics: les matemàtiques del professor W. Szlenk*

LLUÍS ALSEDA

...

Hoy sobrevivo apenas a mi suerte
lejano de mi estrella de mi gente.

El trance me ha mostrado otra lección:
el mundo propio siempre es el mejor.

Me voy debilitando lentamente
Quizá ya no sea yo cuando me encuentren.

Silvio Rodríguez

1 Introducció

L'objectiu d'aquesta xerrada és donar a conèixer a nivell humà i matemàtic la figura d'en Wiesław Szlenk, mort el 26 de juliol de 1995 a l'Hospital Clínic de Barcelona, a aquells membres de la comunitat matemàtica de la Universitat Autònoma de Barcelona que no hi varen tenir un contacte intens.

A nivell personal, per ser breu, el que es pot dir està molt ben resumit a la següent nota necrològica, que va ser distribuïda a nivell internacional, a través del correu electrònic, el dia 28 de juliol de 1995:

Göttingen 28.07.1995

Amb gran pena informem de la mort, després d'una llarga malaltia, de

Wiesław Szlenk

a Barcelona, el 26 de juliol de 1995.

Wiesław Szlenk era Professor de Matemàtiques a la Universitat de Varsòvia i, actualment, membre electe del Senat de la Universitat. Va ser professor visitant durant llargs períodes a Mèxic i a Barcelona, i va ensenyar a la Universitat Agrària de Varsòvia.

* Conferència inaugural de la llicenciatura de matemàtiques; celebrada el dimecres 11 d'octubre de 1995, per encàrrec de la Secció de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Va ser una figura central en la formació del grup de recerca en sistemes dinàmics a la Universitat de Varsòvia al final dels anys 60. Durant la dècada següent va tenir un paper protagonista en el seu desenvolupament cap a un centre de categoria mundial i, després, va continuar inspirant diverses generacions com a director i mentor.

Els seus articles més coneguts inclouen «On invariant measures of expanding differentiable mappings» (amb K. Krzyżewski, 1969) i «Entropy of piecewise monotone mappings» (amb M. Misiurewicz, 1980).

També va estar activament interessat en les aplicacions dels sistemes dinàmics, en particular a la biologia matemàtica, i en fer arribar les matemàtiques a una audiència més àmplia. Va escriure dos llibres: *An Introduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems* i un llibre de text de teoria de la probabilitat que és utilitzat per estudiants d'ensenyament secundari de tot Polònia.

Durant molts anys va participar en l'organització de l'Olimpíada Matemàtica per a estudiants d'ensenyament secundari a Polònia, i també en nombrosos congressos científics a Varsòvia, inclòs el Congrés Internacional de Matemàtics de l'any 1983.

Recordem Wiesław com un home de gran generositat personal i increïble energia.

Wiesław Szlenk serà pregonament recordat i profundament trobat a faltar pels seus col·legues i amics de la comunitat matemàtica de tot el món.

Lluís Alsedà (Barcelona)
 Stefan Jackowski (Warsaw)
 Zbigniew Nitecki (Medford, Mass.)
 Mariusz Urbański (Denton, Texas)

Pel que fa a nosaltres, cal destacar l'esforç per aprendre el català i integrar-se al nostre món que va fer en Wiesław quan va venir a Barcelona per primera vegada. Molts recordareu que als tres mesos de viure a Catalunya ja va començar a donar totes les seves classes en un català sorprenentment bo i a editar en aquesta llengua (amb una mica d'ajuda) els apunts del seu seminari.

Podríem continuar l'exposició parlant de la qualitat humana d'en Wiesław i recordant algunes de les anècdotes de la seva vida; però crec que l'essencial ja ha estat dit. En la resta de la xerrada ens preocuparem de la seva vessant matemàtica. Crec que, per il·lustrar les idees i tècniques que utilitzava, és suficient de considerar dos problemes concrets:

1. Un dels resultats teòrics sobre l'entropia topològica de les aplicacions monòtones a trossos de l'interval i del cercle («Entropy of piecewise monotone mappings», *Studia. Math.* **67** (1980), p. 45–63); que va demostrar juntament amb M. Misiurewicz i simultàniament amb d'altres autors.
2. Un exemple de modelització en el context dels models matemàtics a la biologia, als quals es va dedicar cap al final de la seva vida.

2 Preliminars

La part principal del treball matemàtic d'en Wiesław Szlenk s'emmarca dins dels anomenats sistemes dinàmics discrets. En aquesta secció intentarem explicar breument què són i preparar el terreny per exposar els dos problemes esmentats anteriorment.

A grans trets es pot dir que l'objectiu dels sistemes dinàmics és la modelització de fenòmens naturals (processos) que depenen del temps. Un sistema dinàmic consta, bàsicament, de dos elements:

- a) L'espai de «fases» (d'«estats» o de «configuracions»).
- b) Una regla de variació dels estats del model.

Cada punt de l'espai de fases representa un possible estat del model. Exemples:

- (i) Nombre d'individus d'una població de bacteris en una depuradora biològica d'aigües residuals.
- (ii) Quantitat de llops, ovelles i herba en un model (món ideal) depredador-presa. En aquest cas l'espai de fases és un subconjunt de \mathbb{R}^3 .
- (iii) Els vectors posició i velocitat de n cossos a l'espai sotmesos a la mútua atracció gravitatòria (problemes de n cossos).

Pel que fa a la regla de variació dels estats, els sistemes dinàmics es divideixen en dos grans grups:

Continus: La regla descriu l'evolució contínua del sistema al llarg del temps i s'acostuma a expressar com una equació diferencial

$$\dot{x} = f(x, t)$$

on $t \in \mathbb{R}$ és el temps i $x \in X$ és un punt de l'espai de fases.¹ Les possibles solucions són corbes a l'espai de fases.

Discrets: Descriuen l'evolució del sistema en instants determinats i (usualment) equidistants de temps $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$. La regla acostuma a ser una funció (o, de vegades, correspondència) f , de l'espai de fases en ell mateix, tal que si x_n és l'estat del sistema a l'instant de temps t_n , llavors $x_{n+1} = f(x_n)$ és l'estat del sistema a l'estat t_{n+1} .² L'evolució del sistema està descrita pels iterats de la funció f (o més precisament pels iterats de la condició inicial per la funció f que defineix el sistema).

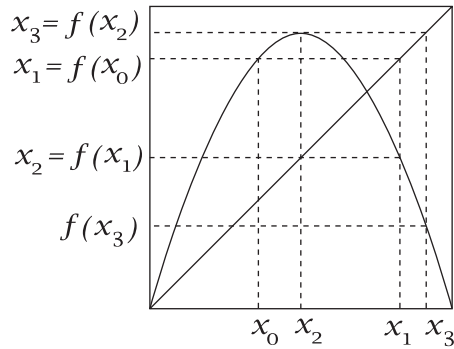
A la resta de la xerrada ens concentrarem en el cas dels sistemes dinàmics Discrets. Com ja hem dit, l'evolució del sistema està descrita pels iterats de la condició inicial per a la funció f . Per exemple sigui x_0 la configuració a l'instant t_0 i sigui f

¹ Els models més generals són equacions en derivades parcials que involucren derivades d'ordre superior respecte del temps i de les altres variables del sistema.

² Els models més generals són «amb retard». És a dir, són models del tipus

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k})$$

per a un cert k .

FIGURA 1: Els iterats de x_0 .

com a la figura 1. Tenim:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= f(x_0) \\
 x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\
 &\vdots \\
 x_n &= f(x_{n-1}) = f(f(x_{n-2})) \\
 &= \dots = f^n(x_0)
 \end{aligned}$$

on $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$.

Objectiu: Donat un sistema dinàmic discret (X, f) on X és l'espai de fases i f és la regla d'iteració, descriure l'evolució (trajectòria) de les seves condicions inicials, els seus règims periòdics, ... Hi ha moltes possibilitats de comportament diferents. Com a exemple considerem els dos casos extrems que mostren les figures 2 i 3.

Nota: La primera situació no és necessàriament millor que la segona. Les dues estan presents a la natura.

Arribats a aquest punt hi ha moltes direccions en les quals podríem continuar el nostre estudi. L'objectiu de la primera que considerarem és mesurar la complexitat d'un sistema amb la finalitat de ser capaços de diferenciar els dos exemples anteriors (i tots els intermedis). Amb aquesta finalitat introduïrem la noció d'*entropia topològica* i exposarem un resultat fonamental de cara al càlcul i l'ús d'aquesta noció que es deu a W. Szlenk (juntament amb M. Misiurewicz). La segona direcció que prendrem és la de l'estudi d'un model concret en el camp de la biologia. En particular, intentarem modelitzar i descriure la digestió dels remugants amb especial èmfasi en algunes peculiaritats observades.

3 L'entropia topològica i el teorema de Misiurewicz i Szlenk

El concepte d'entropia arrenca de la teoria de la informació i d'idees de Kolmogorov i Shannon. La definició d'*entropia topològica* es deu a Adler, Konheim i McAndrew [1] però en la nostra exposició seguirem Bowen [2].

Suposem que el nostre espai X està equipat amb una mètrica d . Per a cada $n \geq 1$ considerem la funció $d_n : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)).$$

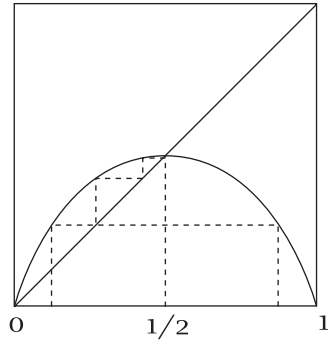


FIGURA 2. Toda trajectòria acaba a $1/2$ (si $x \in [1/2, 1]$, llavors $f(x) \in [0, 1/2]$; si $x \in [0, 1/2]$, llavors $\{f^n(x)\}_{n=0}^\infty$ és monòtona creixent i convergeix a $1/2$).

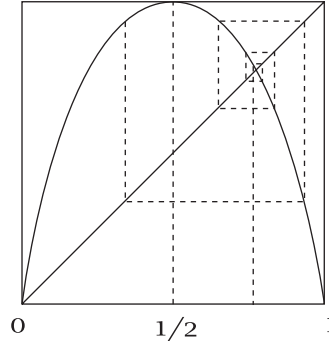


FIGURA 3. Hi ha una trajectòria *densa* (vegeu, per exemple, [3]).

Un conjunt $E \subset X$ direm que és (n, ε) -separat si $d_n(x, y) > \varepsilon$ per a cada $x, y \in E$ amb $x \neq y$.

Intuïtivament: Tenim un «microscopi de mida (n, ε) » que ens permet diferenciar parells de punts que en algun moment de la seva trajectòria fins «temps n » es separen més que ε . Un conjunt és (n, ε) -separat si tots els seus punts són diferents dos a dos usant el «microscopi de mida (n, ε) ».

Idea: Un sistema és més complicat que un altre si, quan n (el temps) tendeix a infinit, el primer té més trajectòries diferents (és a dir distingibles amb el «microscopi de mida (n, ε) ») que el segon a mesura que ε tendeix a zero. La manera de decidir quin sistema té més trajectòries diferents és comparant el creixement exponencial assimptòtic d'aquest nombre.

Formalització: Sigui $S_n(f, \varepsilon)$ el nombre màxim d'elements que pot tenir un conjunt (n, ε) -separat (és a dir, el nombre màxim de trajectòries diferents que té el sistema «segons el criteri del microscopi de mida (n, ε) »). Aquest nombre és finit si l'espai X és compacte. Llavors definim

$$h(f, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S_n(f, \varepsilon),$$

que és el creixement exponencial asimptòtic del nombre d'òrbites diferents (mesurant aquest nombre amb el «microscopi de mida (n, ε) » amb ε fixat). Finalment, es defineix l'*entropia topològica* de f , denotada per $h(f)$, com:

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(f, \varepsilon).$$

Notem que aquesta noció està ben definida per a funcions d'espais mètrics compactes.

Així, si tenim dues funcions $f, g : X \rightarrow X$ és natural dir que el sistema dinàmic (X, f) és més complicat que el (X, g) si

$$h(f) > h(g).$$

Un dels problemes de la noció entropia topològica és que, si bé intuïtivament recull bé la idea de la mesura de la complexitat d'un sistema, a la pràctica és incalculable a partir de la definició. El teorema de Misiurewicz i Szlenk³ és una solució a aquest problema per a una classe prou general de funcions, en el cas particular en què l'espai X és un interval tancat de la recta real. Primer ens cal definir quina és la classe de funcions per les quals val el teorema i introduir una mica de notació.

Sigui I un interval tancat de \mathbb{R} i $f \in C^0(I, I)$. Direm que f és *monòtona a trossos* si existeixen $\min I = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \max I$ tals que $f|_{[x_i, x_{i+1}]}$ és monòtona per a cada $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Al nombre natural n tal que és minimal amb aquesta propietat l'anomenarem el *nombre de voltes*⁴ de f i el denotarem per $l(f)$.

Notem que si f és monòtona a trossos, llavors f^k també ho és per a cada $k \geq 1$. Així, si f és monòtona a trossos, $l(f^k)$ està definit per a cada $k \geq 1$.

Ara ja podem enunciar el teorema de Misiurewicz i Szlenk [4].

1 TEOREMA *Sigui $f \in C^0(I, I)$ monòtona a trossos. Llavors*

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log l(f^n) = \inf \left\{ \frac{1}{n} \log l(f^n) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Notes:

1. El teorema val per a una classe de funcions «genèrica» a $C^0(I, I)$.
2. També val per a funcions contínues monòtones a trossos del cercle i de tots els espais mètrics compactes «sensats» (arbres, grafs, etc.) de dimensió 1 (amb les extensions de les definicions adequades).

La pregunta natural ara és: per què aquest teorema és tan útil si, al cap i a la fi, ens cal calcular $l(f^n)$ per a cada n per calcular $h(f)$? Aquesta pregunta té diverses respostes:

- a) El teorema de Misiurewicz i Szlenk ens permet d'obtenir informació parcial (fites) de l'entropia fàcilment, cosa que és difícil de fer a partir de la definició. Per exemple: per a cada f es té $h(f) \leq \log l(f)$.
- b) És més fàcil trobar fórmules per al càlcul de $l(f^n)$ (o $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log l(f^n)$) que per al càlcul de $S_n(f, \varepsilon)$ (o $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S_n(f, \varepsilon)$). En particular, per a una classe encara més restrictiva de funcions es pot representar tota la dinàmica de la funció per un graf combinatori i, llavors, resulta que $h(f)$ és el logaritme del radi espectral de la matriu de transició T del graf combinatori associat. En definitiva el que passa és que la successió $\{T^n\}_{n=1}^{\infty}$ conté informació asimptòtica sobre $\{l(f^n)\}_{n=1}^{\infty}$. Pararem aquí aquest tipus de comentaris ja que aquesta teoria se'n va una mica de l'objectiu de la xerrada i, en particular, del treball de W. Szlenk.
- c) En alguns casos no és tant difícil d'aplicar directament el teorema de Misiurewicz i Szlenk per a calcular $h(f)$. Com a exemples considerem les funcions representades a les figures 2 i 3. En el cas de la funció f de la figura 2 és clar que el conjunt d'extrems relatius de f^n és $\{1/2\}$ per a cada $n \geq 1$. Així,

³ Demostrat simultàniament i independentment per Rothschild [5] i per Young [7].

⁴ De l'anglès *lap number*.

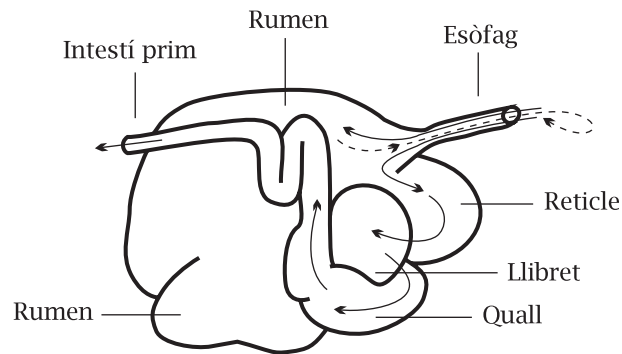


FIGURA 4: L'estómac dels rumugants.



FIGURA 5: L'esquema de moviments del rumen.

$l(f^n) = l(f)$ per $n \geq 1$ i, per tant, $h(f) = 0$. Si anomenem g a la funció de la figura 3 no és difícil demostrar que

$$\text{Card}\{x \in [0, 1] : (f^n)'(x) = 0\} = \text{Card}\{x \in [0, 1] : f^n(x) = 1/2\} = 2^n.$$

Per tant, $l(f^n) = 2^n + 1$ i, llavors, $h(f) = \log 2$.

4 Un model matemàtic de la digestió dels rumugants⁵

Quan W. Szlenk era a la Universitat Agrària de Varsòvia, al Departament de Fisiologia Animal, es va observar el següent fenomen en el procés digestiu de les ovelles: a cada ovella se li donaven dos tipus d'aliment que anomenarem A i B . Cada 5 minuts s'obtenia una mostra de menjar d'un lloc fixat del rumen. Després d'una hora, les mostres estaven formades quasi exclusivament pel component A o pel component B ; és a dir, els dos tipus d'aliment pràcticament no es barrejaven. Això planteja de manera natural la pregunta: quin és el mecanisme de barreja al rumen? En particular: com s'explica aquest fenomen tan contradictori amb la intuïció?

En aquesta secció presentarem el model d'Szlenk del mecanisme de barreja al rumen dels rumugants i, en el seu context, intentarem explicar el fenomen observat. Aquest model és un exemple il·lustratiu, interessant i divertit de modelització en sistemes dinàmics.

El rumen (vegeu la figura 4) és el primer dels quatre estòmacs dels rumugants. Les seves funcions són similars en tots els rumugants (vaques, ovelles, cabres, etc.).

⁵ Extret de [6].

L'aliment, al rumen, flota a la superfície d'un líquid que està sotmès a moviments, com es mostra a la figura 5, que són més o menys periòdics. L'activitat del rumen es divideix en dues fases. A la primera fase l'aliment, principalment, es barreja. A la segona, simultàniament es barreja i es transporta a d'altres parts del sistema digestiu.

Ens concentrarem en la primera fase (la de barreja). Simplificant, podem dividir aquesta fase en dues parts. A la primera part —a causa de l'aplicació d'una força horitzontal— el rumen s'allarga verticalment i s'escurça horitzontalment (passos *A* i *B* de la figura 5). A la segona part —a causa d'una força vertical— el rumen torna a la seva posició inicial (passos *C* i *D* de la figura 5).

Un cicle complet tarda, aproximadament, un minut. Això representa unes 60 iteracions per hora que, en el món dels sistemes dinàmics, representa haver arribat a l'estat estacionari del sistema.

Modelització:

En la realització del model prendrem la (forta) simplificació que el moviment al rumen «viu» en un espai de dimensió 2, ja que les forces que actuen són essencialment verticals i horitzontals. Llavors, l'espai de fases el prendrem com un quadrat a \mathbb{R}^2 . Malgrat aquesta simplificació, com veurem, els resultats s'avenen amb la realitat.

Precisant més, prenem com a espai de fases el quadrat $Q = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ (que correspon al rumen) i l'aplicació $T_0 : Q \rightarrow Q$ definida de la manera següent. Donat $\lambda \in [1, 2]$ definim:

$$T_0(x, y) = \begin{cases} (\lambda x, \lambda^{-1} y) & \text{si } x \leq \lambda^{-1}, \\ (1 - y, x) & \text{si } x > \lambda^{-1}. \end{cases}$$

La definició de T_0 està inspirada en l'anomenada *aplicació del forner* i reproduïx el moviment dins del rumen (canviant la direcció horitzontal per la vertical respecte del rumen «real»). Per veure que això és efectivament així, dividim Q en dos trossos: Q' i Q'' on $Q' = [0, \lambda^{-1}] \times [0, 1]$ i $Q'' = (\lambda^{-1}, 1] \times [0, 1]$. Llavors es pot veure que la funció T_0 s'obté com a composició de les següents funcions de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 (vegeu la figura 6):

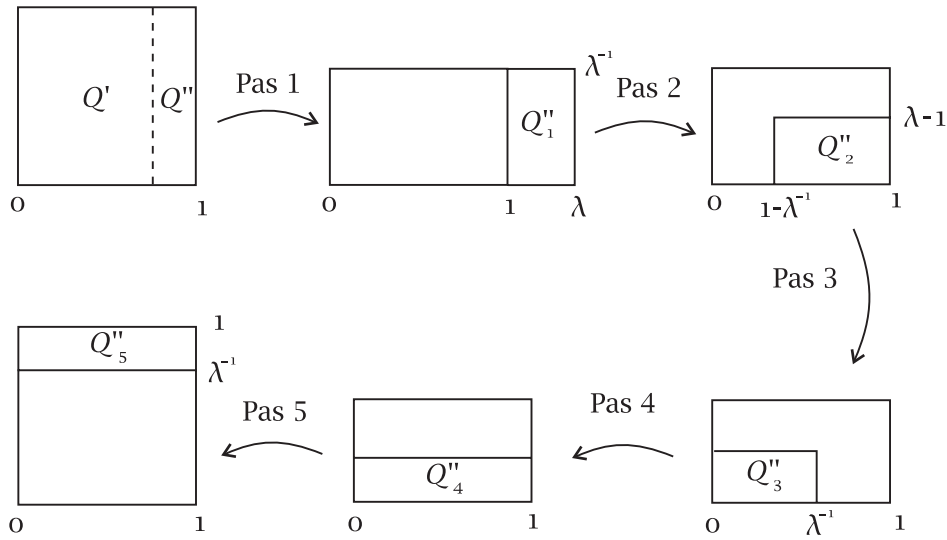
Pas 1: Apliquem Q sobre $[0, \lambda] \times [0, \lambda^{-1}]$ mitjançant la funció lineal donada per la matriu $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Denotem amb Q_1'' la imatge de Q'' per aquesta funció.

Pas 2: Prenem Q_1'' (que és el rectangle $[1, \lambda] \times [0, \lambda^{-1}]$) i la girem un angle de 90° en sentit contrari a les agulles del rellotge. Així, aquesta part queda ara com $Q_2'' = [1 - \lambda^{-1}, 1] \times [0, \lambda - 1]$. Com que $\lambda - 1 < \lambda^{-1}$ tenim que $Q_2'' \subset Q$.

Pas 3: Apliquem a Q_2'' la translació $(-(1 - \lambda^{-1}), 0)$. Així obtenim $Q_3'' = [0, \lambda^{-1}] \times [0, \lambda^{-1}]$.

Pas 4: A Q_3'' li apliquem la funció lineal donada per la matriu $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Així obtenim $Q_4'' = [0, 1] \times [0, 1 - \lambda^{-1}]$.

Pas 5: Finalment, a Q_4'' li apliquem la translació $(0, \lambda^{-1})$ per obtenir $Q_5'' = [0, 1] \times [\lambda^{-1}, 1]$.

FIGURA 6: Construcció de la funció T_0 en passos elementals.

En vista del procés de construcció de la funció T_0 queda clar que aquesta modelitza una iteració del moviment de barreja al rumen dels remugants descrit abans (canviant la direcció vertical i horitzontal per conveniència).

El sistema dinàmic (Q, T_0) és difícil d'estudiar. Per simplificar el procés considerarem un sistema una mica diferent. Es defineix com segueix. Sigui $R = [0, 1] \times [0, \lambda^{-1}]$. No és difícil comprovar que per a cada $P \in Q$ es té $\{T_0(P), T_0^2(P), T_0^3(P)\} \cap R \neq \emptyset$. Llavors, per a cada $P \in Q$ definim $i(P) \in \{1, 2, 3\}$ com el més petit tal que $T_0^{i(P)}(P) \in R$. Així, definim $T : R \rightarrow R$ de manera que $T(P) = T_0^{i(P)}(P)$ per a cada $P \in R$. L'aplicació T té l'expressió següent:

$$T(x, y) = \begin{cases} (\lambda x, \lambda^{-1} y) & \text{si } x \leq \lambda^{-1} & (i(P) = 1), \\ (\lambda(1 - y), \lambda^{-1} x) & \text{si } x > \lambda^{-1} \text{ i } y > 1 - \lambda^{-1} & (i(P) = 2), \\ (\lambda(1 - x), \lambda^{-1}(1 - y)) & \text{si } x > \lambda^{-1} \text{ i } y \leq 1 - \lambda^{-1} & (i(P) = 3). \end{cases}$$

Clarament, de l'estudi del sistema dinàmic (R, T) es pot obtenir tota la informació desitjada sobre (Q, T_0) . El resultat principal sobre (R, T) és el següent.

2 TEOREMA *Suposem que $\lambda \in ({}^{k+2}\sqrt{2}, {}^{k+1}\sqrt{2})$ per algun $k \in \mathbb{N}$. Llavors existeix $U = \bigcup_{i=1}^{nk} Q_i$, una unió de $4k$ rectangles continguda a R , tal que $T^{nk}|_{Q_i} = \text{id}$ per a cada $i \in \{1, 2, \dots, nk\}$. Per tant, T no barreja punts a U .*

Observacions:

1. Si prenem mostres d'aliment dins d'un rectangle Q_i observarem que l'aliment no s'ha barrejat. Per tant, l'existència del conjunt U modela el comportament observat empíricament.
2. La funció T a $R \setminus U$ realment barreja punts (és a dir, el procés de digestió funciona) per a certs valors de λ .

3. Aquest model depèn del paràmetre λ . Aquest paràmetre modela l'amplitud dels moviments del rumen. No està clar quin ha de ser el seu valor (probablement depèn de l'animal). El que importa és que la tesi del teorema és certa per a un conjunt «genèric» de valors de λ .

Referències

- [1] ADLER, R. L.; KONHEIM, A. G.; MCANDREW, M. H. «Topological entropy». *Trans. Amer. Math. Soc.* 114 (1965), p. 309-319.
- [2] BOWEN, R. «Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces». *Trans. Amer. Math. Soc.* 153 (1971), p. 401-414; erratum: *Trans. Amer. Math. Soc.* 181 (1973), p. 509-510.
- [3] DEVANEY, R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems*, Benjamin-Cummings. 1986.
- [4] MISIUREWICZ, M.; SZLENK, W., «Entropy of piecewise monotone mappings». *Studia Math.* 67 (1980), p. 45-63.
- [5] ROTHSCHILD, J. *On the computation of topological entropy*. CUNY, 1971. [tesis].
- [6] SZLENK, W. «Mathematical Model of Mixing in Rumen». *Applicationes Math.* 24 (1996), p. 87-95.
- [7] YOUNG, L.-S., «On the prevalence of horseshoes». *Trans. Amer. Math. Soc.* 263 (1981), p. 75-88.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 BELLATERRA
alseda@mat.uab.es