View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Revistes Catalanes amb Accés Obert

Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 18, núm. 2, 2003. Pàg. 39–57

Kolmogorov: la 'K' de KAM*

Henk W. Broer

La teoria de Kolmogorov-Arnold-Moser (o KAM) va ser desenvolupada per sistemes dinàmics conservatius que estan prop d'integrables. Típicament els sistemes integrables contenen molts tors invariants en el seu espai de fases. La teoria KAM estableix resultats de persistència d'aquests tors, en els quals el moviment és quasiperiòdic. Fem un esbós d'aquesta teoria al voltant de la figura de Kolmogorov.

1 Introducció

A l'International Mathematical Congress de 1954, celebrat a Amsterdam, A. N. Kolmogorov donava una lliçó de clausura amb el títol «The general theory of dynamical systems and classical mechanics» [41], sobre l'article [40]. L'esdeveniment va tenir lloc a l'Amsterdam Concertgebouw i ha jugat un paper important en el desenvolupament del que actualment s'anomena la teoria de Kolmogorov-Arnold-Moser (o teoria KAM).

En aquella lliçó Kolmogorov tractava l'existència de moviments multi o quasiperiòdics, que a l'espai de fases estan confinats a un tor invariant. Es restringia a sistemes dinàmics conservatius (o hamiltonians), com són els que generalment s'usen com a models en la mecànica clàssica. Era ben conegut que en els sistemes integrables Liouville apareixen tors invariants (lagrangians) amb moviments quasiperiòdics. La lliçó de Kolmogorov tractava sobre la seva persistència sota petites pertorbacions no integrables del hamiltonià.

El missatge general de la teoria KAM és que, genèricament, per petites pertorbacions de sistemes integrables la unió de tors lagrangians quasiperiòdics

* Conferència pronunciada a la sisena Trobada Matemàtica de la SCM, celebrada el 4 d'abril de 2003 dedicada al centenari d'A. Kolmogorov. Si esteu interessats en una versió en anglès de l'article vegeu [12].

Traducció de Regina Martínez, Departament de Matemàtiques, UAB.

té mesura (Liouville) positiva tant a l'espai de fases com a les hipersuperfícies d'energia.

Aquesta afirmació s'aplica a molts models concrets de la mecànica clàssica. Per exemple, a certes versions del problema de n cossos, per al qual la no-integrabilitat en general ja va ser establerta per Poincaré. Històricament, les conseqüències sobre qüestions filosòfiques com ara l'estabilitat del sistema solar han estat objecte d'interès. En realitat, l'estabilitat perpètua del sistema solar quedaria garantida si el seu moviment real fos quasiperiòdic.

D'altra banda, i des d'un punt de vista més global, la part de teoria KAM que fa referència a les mesures implica que, per a sistemes hamiltonians típics amb un nombre finit de graus de llibertat, no hi ha ergodicitat, ja que les hipersuperfícies d'energia es poden descompondre en diversos conjunts invariants disjunts de mesura positiva. Això té especial interès en la física estadística, on la hipòtesi ergòdica aproximadament diu que, quan el sistema està confinat a hipersuperfícies acotades d'energia, és ergòdic. Aquesta paradoxa probablement es resol quan el nombre de partícules augmenta ja que llavors l'obstrucció a l'ergodicitat donada pels tors KAM sembla disminuir ràpidament en importància.

Aquest article tracta de forma esquemàtica certs progressos relacionats amb la lliçó de Kolmogorov l'any 1954 [41]. Comencem tractant el problema de la linealització prop d'un punt fix d'una aplicació analítica del pla complex. Aquest és el primer problema conegut on es resolia un problema de petits divisors, el tipus de problema central en la teoria KAM. A continuació passem a la dinàmica de les aplicacions del cercle, que es remunta a Arnold, seguida d'una discussió sobre aplicacions *twist* que preserven àrea, on apareix el nom de Moser. Després tractem la teoria KAM conservativa amb més generalitat, i la paradoxa ergòdica. Més detalls sobre les idees i els mètodes presentats per Kolmogorov en el seu article de 1954 es poden trobar a [12].

NOTA: Una propietat es diu típica si val en un conjunt obert de sistemes dinàmics estudiats. Pel que fa a la topologia de «l'espai de funcions», es pot considerar la topologia (feble) de Whitney per a sistemes diferenciables, o la topologia compacte-obert per a sistemes analítics. La propietat que considerem és l'existència, a l'espai de fases, de tors invariants quasiperiòdics amb mesura positiva. Vegeu, per exemple, [18], [23].

2 Linealització complexa

Considerem una aplicació holomorfa local (o un germen) $F : (\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ de la forma $F(z) = \lambda z + f(z)$ amb $f(0) = f'(0) = 0$. La qüestió és si existeix una transformació biholomorfa local $\Phi : (\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ tal que

$$\Phi \circ F = \lambda \cdot \Phi. \tag{1}$$

En aquest cas direm que Φ linealitza F prop del punt fix.

Solució formal

Primer considerem el problema de manera formal. Els resultats corresponents es remunten a Poincaré. Per a un resum vegeu Arnold [6]. Donat un desenvolupament en sèrie $f(z) = \sum_{j\geq 2} f_j z^j$ busquem una altra sèrie $\Phi(z) = z + \sum_{j\geq 2} \phi_j z^j$, tal que la relació de conjugació (1) es compleixi formalment. Existeix una solució formal si $\lambda \neq 0$ no és una arrel d'1. De fet, els coeficients ϕ_j es poden determinar recurrentment amb les equacions següents:

$$\begin{aligned} \lambda(1-\lambda)\phi_2 &= f_2\,, \\ \lambda(1-\lambda^2)\phi_3 &= f_3 + 2\lambda f_2 \phi_2\,, \\ \lambda(1-\lambda^{n-1})\phi_n &= f_n + \text{ termes coneguts}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

A partir d'això l'afirmació anterior se segueix directament.

Convergència

En el cas hiperbòlic on $0 < |\lambda| \neq 1$ la sèrie per Φ té radi de convergència positiu. Això va ser provat per Poincaré, usant un mètode d'iteració directe en lloc de considerar sèries (vegeu [6]).

Queda el cas el·líptic amb $\lambda \in \mathbf{T}^1$ (el cercle unitat complex). Observem de les equacions (2) que, encara que λ no sigui una arrel de la unitat, les seves potències es poden acumular a 1. Això donaria petits divisors a la sèrie formal de Φ, i posaria en dubte la seva convergència.

Aquest problema va ser resolt satisfactòriament per C. L. Siegel [66] el 1942. Amb aquest objectiu, escrivint $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, s'introdueïen les condicions diofantines següents. Per a certs $\gamma > 0$ i $\tau > 0$ es demana que

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{\gamma}{q^\tau}\,,$$

per a tots els racionals p/q (amb $q > 0$). Resulta que això és suficient per a tenir la convergència de la solució formal per Φ.

Considerem ara certs aspectes del conjunt de $\lambda \in \mathbf{T}^1$ que satisfan les condicions diofantines, que són rellevants per a nosaltres. Es pot demostrar directament que per a $\gamma > 0$ fixada i $\tau > 2$, amb γ prou petita, les condicions diofantines donen lloc a un subconjunt de Cantor $\lambda \in \mathbf{T}^1$ que té mesura quasi total. Recordem que caracteritzem un conjunt de Cantor per les propietats (topològiques) següents: és compacte, dens en lloc i perfecte. Es pot veure fàcilment que la mesura del complementari és d'ordre $O(\gamma)$ quan $\gamma \downarrow 0$. Vegeu, per exemple, [18], [23]. Notem que per a petits valors de γ (així com per a valors grans de τ) només es pot garantir un radi de convergència petit per Φ [66].

Geometria i teoria de nombres

El fet que les condicions diofantines donen lloc a un subconjunt de $\mathbf{T}^1$ dens en lloc, se segueix directament del fet que les arrels de la unitat, que són denses per tot, estan en el seu complementari. El següent exemple, degut a H. Cremer [25] el 1927, ja indicava que hi ha alguna cosa més. Per a una bona descripció d'aquest exemple en un contexte una mica diferent vegeu [11].

Considerem l'aplicació $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ donada per

$$F(z) = \lambda z + z^2,$$

on $\lambda \in \mathbf{T}^1$ no és una arrel de la unitat. Veurem que hi ha un subconjunt de λ, gran topològicament, per al qual l'aplicació té punts periòdics a qualsevol entorn de 0. Això dóna per a aquests λ una demostració geomètrica que la conjugació formal divergeix, de la manera següent. Com que l'aplicació lineal $z \mapsto \lambda z$ és una rotació irracional i només té òrbites que són denses a $\mathbf{T}^1$, l'existència d'òrbites periòdiques a tot entorn de 0 implica que la linealització formal ha de tenir radi de convergència zero.

Per estudiar els punts periòdics de període q, considerem l'equació

$$F^q(z) = z\,. \tag{3}$$

Usant que

$$F^q(z) = \lambda^q z + \cdots + z^{2^q}$$

se segueix que

$$F^q(z) - z = z(\lambda^q - 1 + \cdots + z^{2^q-1})\,.$$

Posant $N = 2^q - 1$, siguin $z_1, z_2, \cdots, z_N$ les solucions no trivials de (3). Llavors el seu producte satisfà l'equació

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_N = \lambda^q - 1.$$

D'aquí vegem que existeix una solució a la bola de radi

$$|\lambda^q - 1|^{1/N}$$

al voltant $z = 0$. Ara considerem el conjunt de $\lambda \in \mathbf{T^1}$ que satisfan

$$\text{liminf}_{q\to\infty} |\lambda^q - 1|^{1/N} = 0.$$

Aquest conjunt és residual.[1] Recordem que un conjunt residual conté una intersecció numerable de conjunts oberts densos; aquesta propietat vol dir que el conjunt és gran en el sentit topològic. Aquest conjunt residual s'assembla al dels nombres de Liouville. Notem que el nostre conjunt residual té mesura zero, ja que conté tots els nombres diofantins en el seu complementari. Com a referència bàsica sobre subconjunts de $\mathbf{R}$ que són grans en topologia i petits en mesura, o viceversa, vegeu Oxtoby [57].

Concloem que, per a tot λ contingut en aquest conjunt residual, existeixen punts periòdics de F a tot entorn de $z = 0$, i val l'anterior argument de divergència.

A finals del segle XX J.-C. Yoccoz [69], [70] resolia completament el cas el·líptic, provant que l'anomenada condició de Bruno [21] sobre les corresponents fraccions contínues de α és necessària i suficient per a la convergència de la linealització formal per a tots els possibles termes d'ordre més alt.

1 En altres paraules, un conjunt G_δ-dens o un conjunt de segona categoria de Baire.

3 Aplicacions del cercle

Canviem lleugerament de context considerant una família suau (per concretar, C^∞ o analítica real) de difeomorfismes del cercle

$$P_{\alpha,\varepsilon} : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1;\ x \mapsto x + 2\pi\alpha + \varepsilon a(x,\alpha,\varepsilon),$$

on ε és un petit paràmetre; així estem en un entorn d'una família de rotacions rígides del cercle. Per comoditat l'escrivim com una família *vertical* d'aplicacions del cilindre

$$P_\varepsilon : \mathbf{T}^1 \times [0,1] \to \mathbf{T}^1 \times [0,1];\ (x,\alpha) \mapsto (x + 2\pi\alpha + \varepsilon a(x,\alpha,\varepsilon), \alpha).$$

El problema és trobar un difeomorfisme Φ_ε que conjugui P_ε i P_0. Notem que la darrera aplicació està associada a la família de rotacions rígides. Per ser més precisos, demanem que el diagrama següent commuti:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}^1 \times [0,1] & \xrightarrow{P_\varepsilon} & \mathbf{T}^1 \times [0,1] \\ \uparrow \Phi_\varepsilon & & \uparrow \Phi_\varepsilon \\ \mathbf{T}^1 \times [0,1] & \xrightarrow{P_0} & \mathbf{T}^1 \times [0,1]\,, \end{array}$$

és a dir,

$$P_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon \circ P_0\,. \tag{4}$$

De nou petits divisors

Procedim resolent formalment l'equació (4). De fet, suposant que Φ_ε és de la forma

$$\Phi_\varepsilon(x,\alpha) = (x + \varepsilon U(x,\alpha,\varepsilon), \alpha + \varepsilon\sigma(\alpha,\varepsilon)), \tag{5}$$

se segueix que (4) es pot escriure com

$$U(x+2\pi\alpha,\alpha,\varepsilon) - U(x,\alpha,\varepsilon) = 2\pi\sigma(\alpha,\varepsilon) + a\,(x + \varepsilon U(x,\alpha,\varepsilon), \alpha + \varepsilon\sigma(\alpha,\varepsilon), \varepsilon)\,.$$

Desenvolupant en potències de ε i comparant els coeficients d'ordre més baix, l'equació (4) porta a l'equació lineal

$$U_0(x+2\pi\alpha,\alpha) - U_0(x,\alpha) = 2\pi\sigma_0(\alpha) + a_0(x,\alpha).$$

Aquesta equació lineal es pot resoldre directament usant sèries de Fourier. Escrivint,

$$\begin{aligned} a_0(x,\alpha) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{0k}(\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \\ U_0(x,\alpha) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} U_{0k}(\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \end{aligned}$$

trobem que $\sigma_0 = -\frac{1}{2\pi}a_{00}$, equival a una translació del paràmetre, i

$$U_{0k}(\alpha) = \frac{a_{0k}(\alpha)}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k\alpha} - 1}.$$

De manera similar al que teníem en el cas anterior, observem que existeix una solució formal si α és irracional. Com abans, les potències de $e^{2\pi i\alpha}$ encara poden acumularse a 1. Això dóna petits divisors a les sèries de Fourier, que posen en dubte la seva convergència.

Un teorema KAM per aplicacions del cercle

Per superar el problema dels petits divisors, introduïm com abans les mateixes condicions diofantines, demanant que per a nombres donats $\tau > 2$ i $\gamma > 0$, i per a tots els racionals p/q es compleixi

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{\gamma}{q^\tau}.$$

Segons el que hem dit abans, això dóna un conjunt de Cantor $[0,1]_c \subseteq [0,1]$, de mesura quasi total quan $\gamma > 0$ és petit. Com a primer exemple d'un teorema KAM formulem el següent:

1 Teorema *En les hipòtesis anteriors suposem que $\gamma > 0$ és suficientment petit. Llavors per $|\varepsilon|$ prou petit, existeix una transformació suau (C^∞) del cilindre Φ_ε : $\mathbf{T}^1 \times [0,1] \to \mathbf{T}^1 \times [0,1]$, que conjuga la restricció $P_0|_{\mathbf{T}^1\times[0,1]_c}$ a un subsistema de P_ε. A més, Φ depèn suaument de ε.*

Aquest resultat es remunta a V. I. Arnold [5]; vegeu també [6]. Aquesta formulació concorda estretament amb [19], [18]. Respecte a la suavitat de l'aplicació Φ_ε, vegeu Pöschel [58] i [67], [71], [72]. La demostració del teorema 1 no considera sèries de potències en ε, sinó que usa un mètode de Newton i una propietat d'aproximació per aplicacions analítiques, d'aplicacions Whitney suaus definides sobre conjunts tancats.

Observem que el teorema 1 té un fort caràcter pertorbatiu: de fet només s'aplica a petites pertorbacions de la família de rotacions rígides. En contraposició amb això M. R. Herman [35] i J.-C. Yoccoz [68], [69] han provat una versió no pertorbativa d'aquest teorema, és a dir, per valors grans de ε. Vegeu també [49].

Discussió

Un difeomorfisme del cercle suaument conjugat a una rotació rígida $x \mapsto x + 2\pi\alpha$ amb α irracional s'anomena *quasiperiòdic*. No és difícil demostrar que cada òrbita d'una tal aplicació quasiperiòdica omple el cercle densament [26]. Notem que per $\alpha \in [0,1]_c$ la rotació rígida $P_{\alpha,0}$ és certament quasiperiòdica.

Una primera conseqüència del teorema 1 és que les aplicacions del cercle $P_{\alpha,\varepsilon}$ que són conjugades a una de les rotacions diofantines —i a partir d'ara quasiperiòdiques— $P_{\alpha,0}$, són encara quasiperiòdiques. Concloem que la quasiperiodicitat típicament es dóna amb mesura positiva a l'espai de paràmetres.

A més, el fet que un conjunt de Cantor sigui perfecte[2] implica que en aquest escenari la quasiperiodicitat mai té lloc com un fenomen aïllat.

Com a exemple concret considerem la família d'Arnold

$$P_{\alpha,\varepsilon}(x) = x + 2\pi\alpha + \varepsilon \sin x$$

d'aplicacions del cercle, fixant-nos en el pla de paràmetres (α, ε). Ens restringim a $|\varepsilon| < 1$, per assegurar que P_ε és un difeomorfisme. És conegut ([5], [6], [26]) que dels punts $(\alpha, \varepsilon) = (p/q, 0)$ neixen llengües ressonants en els semiplans oberts $\varepsilon \neq 0$, de manera que per a $|\varepsilon|$ petit cobreixen un subconjunt obert i dens. Dins la llengua que neix de $(\alpha, \varepsilon) = (p/q, 0)$ la dinàmica és periòdica, amb nombre de rotació p/q (per a una definició vegeu, e. g., [26]).

El teorema 1 implica que en el complementari d'aquesta unió de llengües existeix una unió de corbes invariants suaus que té mesura positiva. Per valors del paràmetre sobre aquestes corbes, la dinàmica és quasiperiòdica.

El teorema 1 té moltes aplicacions. S'aplica sempre que un sistema d'equacions diferencials ordinàries té un 2-tor atractor, per al qual P_ε és una aplicació de Poincaré propera a una família de rotacions rígides. En aquest cas el subsistema quasiperiòdic de P_ε, per a $|\varepsilon| \ll 1$ s'anomena sovint com una família d'atractors quasiperiòdics [62].

En el cas general, les llengües ressonants també apareixen (genèricament) i trobem la mateixa intrincada interacció entre periodicitat i quasiperiodicitat que en la família d'Arnold.

Existeixen situacions anàlogues d'aquesta en dimensió superior, on periodicitat i quasiperiodicitat, i també dinàmica caòtica coexisteixen [19], [18]. Aquesta situació i les transicions o bifurcacions entre els diferents tipus de dinàmica han estat associades a l'inici de la turbulència en dinàmica de fluids; vegeu Ruelle i Takens *et al.* [63], [56]. L'estat quasiperiòdic es veu com un estat intermedi entre molt ordenat i caòtic. Vegeu també [36], [44], [45].

4 El teorema *twist*

Tornant al context conservatiu considerem un anell $A \subseteq \mathbf{R}^2$ amb coordenades «polars» $(\varphi, I) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{K}$, on $\mathbf{K}$ és compacte, i sigui $\sigma = d\varphi \wedge dI$ l'element d'àrea. Considerem una aplicació suau (diguem C^∞) $P_\varepsilon : A \to A$ del tipus

$$P_\varepsilon(\varphi, I) = (\varphi + 2\pi\alpha(I), I) + O(\varepsilon), \tag{6}$$

que preserva σ. Notem que per a $\epsilon = 0$ l'aplicació deixa invariant la família de cercles $I =$ constant i de nou el problema és la persistència d'aquesta família per a $|\varepsilon|$ petit. Diem que P_0 és una aplicació *twist* (pura) si l'aplicació $I \mapsto \alpha(I)$ és un difeomorfisme.

Suposem com abans condicions diofantines: per a constants donades $\tau > 2$ i $\gamma > 0$ sigui

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{\gamma}{q^\tau},$$

2 Que vol dir que no conté punts isolats.

per a tots els racionals p/q. L'antiimatge d'aquest conjunt per l'aplicació $\alpha : I \mapsto \alpha(I)$ és un subconjunt $A_c \subseteq A$, que és el producte d'un cercle i un conjunt de Cantor de mesura (relativa) gran.

2 Teorema *En les condicions anteriors suposem que $\gamma > 0$ és prou petit. Llavors per a $|\varepsilon|$ suficientment petit, existeix una transformació suau (C^∞) de l'anell $\Phi_\varepsilon : A \to A$, que conjuga la restricció $P_0|_{A_c}$ a un subsistema de P_ε. A més, Φ depèn suaument de ε.*

Aquest teorema es coneix com el teorema *twist*. La primera demostració és de J. K. Moser [50]. La formulació donada és propera a la del teorema 1 i, respecte a la suavitat de Φ_ε, s'apliquen aquí els mateixos comentaris.

Discussió

Observant la similitud entre els teoremes 1 i 2 es pot dir que en el teorema 2 el paper del paràmetre α el fa la variable d'acció I. Amb el mateix esperit d'abans, podem concloure que per al cas de preservació d'àrea, típicament la quasiperiodicitat es dóna amb mesura positiva a l'espai de fases.

Nota: Una diferència en els contextos dels teoremes 1 i 2 és la següent. En el cas del teorema KAM 1 per a aplicacions del cercle, la conjugació Φ_ε entre la família de rotacions pures P_0 i la pertorbació P_ε preserva la projecció a l'espai de paràmetres $[0,1] = \{\alpha\}$; vegeu l'equació (5). En el cas del teorema 2 la projecció corresponent a l'espai d'accions $K = \{I\}$ generalment no es preserva.

Com una aplicació considerem el pèndol matemàtic (pla) amb forçament periòdic (feble). Es poden prendre les equacions de moviment següents:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega^2 \sin y &= \varepsilon \cos t \quad \text{o} \\ \ddot{y} + (\omega^2 + \varepsilon \cos t) \sin y &= 0, \end{aligned}$$

que donen lloc a un camp vectorial 3-dimensional que preserva volum. Per simplicitat només considerem el primer exemple

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -\omega^2 \sin y + \varepsilon \cos t, \\ \dot{t} &= 1. \end{aligned}$$

Com és habitual en mecànica, e. g., vegeu [7], introduïm variables acció-angle (I, φ) per a $\varepsilon = 0$, és a dir, per al pèndol pla autònom. De fet, denotant l'energia per $H_0(y,z) = \frac{1}{2}z^2 - \omega^2 \cos y$, ens restringim a la regió oscil·latòria on $H_0(y,z) < \omega^2$. A continuació considerem un nivell qualsevol $H_0(y,z) = h$, amb $|h| < \omega^2$. Llavors la variable d'acció I està definida per

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \oint_{H_0(y,z)=h} z\, dy,$$

que és proporcional a l'àrea que queda dins del conjunt de nivell. La variable angle φ s'obté prenent la parametrització del temps del moviment periòdic sobre aquest conjunt de nivell escalat pel període 2π. Així s'obtenen les equacions canòniques següents:

$$\dot{I} = 0, \ \dot{\varphi} = \alpha(I)$$

per als moviments oscil·latoris del pèndol pla.

Això implica que l'aplicació de Poincaré (o estroboscòpica) P_ε té la forma anterior (6). Un còmput directe[3] mostra que P_0 és una aplicació *twist* pura. Per tant, la conclusió que la quasiperiodicitat es dóna amb mesura positiva a l'espai de fases s'aplica en aquest cas.

Una aplicació similar es basa en oscil·ladors acoblats

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -\omega_1^2 \sin y_1 - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial y_1}(y_1, y_2) \\ \ddot{y}_2 &= -\omega_2^2 \sin y_2 - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial y_2}(y_1, y_2), \end{aligned}$$

que porten a un camp vectorial hamiltonià 4-dimensional

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= z_j \\ \dot{z}_j &= -\omega_j^2 \sin y_1 - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial y_j}(y_1, y_2), \end{aligned}$$

$j = 1, 2$, amb funció de Hamilton $H_\varepsilon(y_1, z_1, y_2, z_2) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 - \omega_1 \cos y_1 - \omega_2 \cos y_2 + \varepsilon U(y_1, y_2)$. En aquest cas és l'aplicació de Poincaré isoenergètica la que té la forma P_ε. Això porta a la conclusió que la quasiperiodicitat es dóna amb mesura positiva a les hipersuperfícies d'energia de H_ε.

5 Teoria KAM conservativa

La discussió anterior ha establert els fonaments per a una formulació general del teorema KAM, com una variació adequada de Kolmogorov [40], [41] i Arnold [1].

Comencem introduint la noció de tor invariant quasiperiòdic per a un sistema d'equacions diferencials autònom. Entendrem que és un tor invariant, la dinàmica sobre el qual és suaument conjugada a la d'un camp vectorial constant

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_1 \\ \dot{x}_2 &= \omega_2 \\ \cdots & \cdots \cdots \\ \dot{x}_n &= \omega_n, \end{aligned}$$

3 Involucrant una integral el·líptica . . .

sobre el n-tor estàndard $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/(2\pi\mathbf{Z}^n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, on els angles x_j es consideren mòdul 2π, $1 \leq j \leq n$. A més, demanem que les freqüències $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ siguin independents sobre els racionals, la qual cosa implica que cada trajectòria omple densament el tor. En aquest cas parlem de n quasiperiodicitat, tant per la restricció del sistema al n-tor com per al n-tor mateix.

Per a sistemes hamiltonians integrables, les variables acció angle que proporciona el teorema de Liouville-Arnold [7] donen la conjugació amb un camp vectorial constant.

La formulació del teorema KAM clàssic és

3 TEOREMA *En sistemes hamiltonians amb n graus de llibertat típicament existeixen n-tors lagrangians quasiperiòdics amb mesura de Liouville positiva, tant*

1. *a l'espai de fases,*
2. *com a cada hipersuperfície d'energia.*

Com deiem abans, *típic* vol dir que existeixen classes d'exemples que són «oberts en un espai de funcions». Aquests exemples són propers a sistemes integrables de Liouville [7].

La primera conclusió del teorema 3 és el teorema KAM estàndard, mentre que la segona es coneix com el teorema KAM isoenergètic. La condició de no-degeneració sobre l'aproximació integrable $H = H(I)$ és una mica diferent en els dos casos.

Per al teorema KAM estàndard es requereix la condició de no-degeneració de Kolmogorov que diu que el vector de freqüències

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial I},$$

com a funció de les variables d'acció I, hauria de tenir rang màxim; això implica que l'aplicació freqüència $I \mapsto \omega(I)$ és un difeomorfisme local.

De manera similar la condició de no-degeneració isoenergètica requereix que la corresponent aplicació raó de freqüències $I \mapsto (\omega_1(I) : \omega_2(I) : \ldots : \omega_n(I))$ a l'espai projectiu $(n-1)$-dimensional tingui rang maximal; vegeu [7], [19], [16]. Notem que la conclusió de l'exemple dels dos oscil·ladors acoblats de la secció prèvia també s'obtindria com a aplicació del teorema KAM isoenergètic.

Tanmateix, en casos típics, ambdues condicions de no-degeneració es satisfan, implicant que la unió de tors invariants lagrangians quasiperiòdics té mesura positiva a l'espai de fases, de tal manera que la mesura condicional a les hipersuperfícies d'energia també és positiva.

A més de la no-degeneració calen condicions diofantines sobre les freqüències, en aquest cas definides de la forma següent. Per a constants $\tau > n - 1$ i $\gamma > 0$, es demana que per a tot $k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$ es compleixi

$$|\langle \omega, k \rangle| \geq \gamma |k|^{-\tau}.$$

En aquesta desigualtat $\langle \omega, k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \omega_j k_j$, mentre $|k| = \sum_{j=1}^{n} |k_j|$. De forma similar als casos anteriors, el subconjunt corresponent de $\mathbf{R}^n$ és dens en lloc i de mesura positiva. De fet aquest conjunt diofantí és un *fibrat* de semirectes tancades, la intersecció de les quals amb l'esfera unitat $\mathbf{S}^{n-1}$, per a γ petit, conté un conjunt de Cantor de mesura quasi total. Vegeu, e. g., [23], [18].

En el cas general de no-degeneració de Kolmogorov, l'aplicació freqüència tira endarrere aquest conjunt de manera localment difeomorfa. La no-degeneració isoenergètica significa que les hipersuperfícies d'energia són transversals a les fibres diofantines; vegeu [19], [16].

Algunes aplicacions del teorema KAM

A la introducció ja hem esmentat possibles aplicacions del teorema 3. Clarament, en molts models de la mecànica clàssica es troben tors KAM lagrangians amb dinàmica quasiperiòdica.

Com una aplicació «filosòfica» considerem el sistema solar, primer considerant-lo com una pertorbació del sistema integrable obtingut quan ometem la interacció entre els planetes. Si el teorema s'apliqués se seguiria que l'evolució actual té probabilitat positiva de ser quasiperiòdica, quan suposem que les condicions inicials han estat triades aleatòriament. En aquest cas hom podria dir que el sistema solar és estable.

S'ha escrit molt sobre aquest exemple ([2], [53], [54], [64], [27]) i aquí ens restringirem a fer unes poques observacions. En primer lloc el sistema solar conté ressonàncies molt fortes, que requereixen una aproximació integrable més adient que la descrita aquí [2]. En segon lloc la interacció entre els planetes és probablement massa forta per a una aplicació real del teorema 3 com un resultat de pertorbació. La tercera observació fa referència al treball numèric de Laskar [46], que sembla mostrar que el sistema solar és enterament caòtic; l'espècie humana no ha existit un temps prou llarg com per notar-ho....

Una àmplia gama d'exemples s'obté considerant l'entorn d'un punt d'equilibri el·líptic genèric d'un sistema hamiltonià. Sota unes poques condicions de no-ressonància sobre els valors propis de la part lineal es poden fer uns quants passos de normalització d'acord amb Birkhoff i, per tant, els termes d'ordre baix dels n-tors són simètrics. De fet, això permet escriure el sistema localment com un sistema prop d'integrable, on la mida de la pertorbació està controlada per la distància a l'equilibri, vegeu [53], [54].

En conseqüència, en un entorn de l'equilibri existeixen molts tors KAM. La seva unió té mesura de Liouville positiva i, per tant, el punt d'equilibri és encara un punt de densitat de la quasiperiodicitat [58], [18].

Existeixen altres aplicacions de les tècniques KAM en mecànica quàntica, en particular en l'estudi de la localització —Anderson— de l'electró. Si es consideren equacions de Schrödinger amb potencials ergòdics a l'espai, un estat localitzat (no conductor) és una funció pròpia de l'equació de Schrödinger per algun valor propi de l'energia. Una tal funció decaurà exponencialment en l'espai. Com en el règim localitzat l'operador de Schrödinger típicament té un espectre puntual dens, desenvolupant una teoria de pertorbació del corresponent operador resolvent, que divergeix en aquest conjunt dens de valors propis, ens trobem amb problemes molt similars als ja coneguts del conjunt dens de ressonàncies on es tenen desenvolupaments pertorbatius divergents en el context KAM tradicional. Les demostracions i anàlisis de la localització inspirades en la teoria KAM han estat desenvolupades per realitzacions típiques de potencials aleatoris en dimensions arbitràries, per forces d'interacció grans o energies elevades en dimensions arbitràries (vegeu e. g. [30]), així com per potencials quasiperiòdics en dimensió 1, descrivint electrons en quasicristalls, vegeu e. g. [28], [20], [61].

Un altre camp de la física que és notori pels problemes de teoria de pertorbacions divergents i on les idees de tipus KAM estan començant a jugar un paper és la teoria quàntica de Camps [33], [10].

Discussió

Hom troba una gran quantitat de qüestions al llarg d'una àmplia bibliografia; vegeu [7], [8], [53], [54], [64], [27]. Aquí ens restringirem a comentar-ne uns quants.

Una qüestió a esmentar és la diferència entre els casos $n = 2$ i $n \geq 3$. Clarament, per a $n = 2$ el conjunt de nivell de la funció energia és 3 dimensional i els tors lagrangians tenen dimensió 2. En el cas proper a integrable aquests tors KAM generalment donen una foliació en conjunts densos en lloc. No obstant això, per a conjunts oberts de condicions inicials les corbes d'evolució estan per sempre atrapades entre ells, la qual cosa implica estabilitat adiabàtica perpètua.

Per contra, per a $n \geq 3$ els tors lagrangians tenen codimensió més gran que 1 i les corbes d'evolució poden escapar. Això efectivament passa en el cas de la difusió d'Arnold [4], [8], [24].

Un altre tema fa referència al moviment general a l'entorn dels tors KAM. D'una teoria refinada de mitjanes se'n segueix que corbes d'evolució properes es mantenen a prop durant un temps exponencialment gran; vegeu Nekhoroshev [55]. Col·loquialment es diu que els tors KAM són «enganxosos».

Des dels inicis de la teoria KAM, se sabia que la teoria s'estén més enllà del context hamiltonià de tors lagrangians. Així resulta que existeixen anàlegs del teorema 3, e. g., per tors (isotròpics) invariants de dimensió més baixa en sistemes hamiltonians. Aquí, a part de les freqüències internes dels tors quasiperiòdics, juguen també un paper les freqüències normals i aquestes a més intervenen en les condicions diofantines. Per a una discussió sobre el paper dinàmic de les corresponents ressonàncies internes normals vegeu [13].

Hi ha hagut molt d'interés en la teoria KAM hamiltoniana del tors normalment el·líptics [59], [38]. Això també inclou situacions en que les freqüències normals tenen ressonàncies fortes [37]. A més, han estat estudiats casos de tors normalment parabòlics. Els dos darrers casos involucren bifurcacions de tors quasiperiòdics, i en certs casos també bifurcacions a tors de dimensió més alta [18], [34], [14], [15].

S'obtenen resultats similars quan es consideren sistemes reversibles en lloc de hamiltonians ([51], [54], [65], [17], [22]), o sistemes que són equivariants respecte a certs grups de Lie. A més, com ja s'indicava a la secció 3, també existeixen teoremes KAM per a sistemes dinàmics generals (dissipatius); vegeu la secció 3. De fet un tractament amb àlgebres de Lie permet obtenir tots aquests resultats de forma unificada. En general hom necessita paràmetres externs per a tenir una bona teoria de persistència per a tors invariants quasiperiòdics. Vegeu [51], [52], [19], [18].

6 Hipòtesi ergòdica: una paradoxa?

Com un corol·lari directe del teorema 3 tenim

4 TEOREMA *En sistemes hamiltonians típics amb $n < \infty$ graus de llibertat, les hipersuperfícies d'energia no són ergòdiques pel flux hamiltonià.*

Clarament, pel teorema 3 existeixen classes obertes de sistemes hamiltonians amb tors invariants, tals que la unió d'aquests tors té mesura (Liouville) positiva a les hipersuperfícies d'energia. Això porta a una descomposició d'aquestes hipersuperfícies en diversos conjunts invariants disjunts, que contradiu l'ergodicitat. Com a referència bàsica sobre teoria ergòdica, e. g., vegeu [8].

Així els tors KAM formen una obstrucció a l'ergodicitat i una qüestió és què tan dolenta és aquesta obstrucció quan $n \to \infty$. Aquesta qüestió és important en física estadística, on s'estudien sistemes grans.

Una formulació inicial de la hipòtesi ergòdica assegura que, típicament, les hipersuperfícies d'energia de sistemes de moltes partícules són ergòdiques, la qual cosa clarament no seria compatible amb el teorema 4. Per fixar idees donem un exemple.

Un sistema xarxa

Considerem una xarxa $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$, 1-dimensional amb oscil·ladors nolineals idèntics situats als vèrtexs. Per simplificar pensem amb la xarxa situada sobre una línia horitzontal, on a tots els vèrtexs pengen pèndols idèntics sotmesos a la gravetat vertical constant. També connectem els oscil·ladors veïns més propers amb molles febles. Aquí les constants de les molles poden ser o bé constants o bé decaure a infinit.

Sigui $\Lambda_N \subseteq \mathbf{Z}$ la caixa amb vèrtexs $(-N, N)$. Llavors, per a $M \leq N$ considerem dos d'aquestes caixes $\Lambda_M \subseteq \Lambda_N$. «Trunquem» el sistema infinit omitent tots els pèndols fora de la caixa més gran Λ_N.

Primer considerem el sistema integrable associat a Λ_N, on totes les interaccions són negligides. Suposem que els oscil·ladors situats als vèrtexs en Λ_M estan en moviment, mentre els altres estan en repòs. A l'espai de fases això correspon a un tor invariant $2M+1$-dimensional, que és normalment el·líptic. A més, les freqüències normals estan en ressonància $1:1:\cdots:1$.

Llavors posem en moviment les molles. Una versió adequada [37] del teorema 3 i de [59] per aquest cas, dóna la persistència d'aquests tors el·líptics per a valors petits de les constants de les molles. El corresponent tipus de moviment és un «respirador» quasiperiòdic; per a un tipus de moviment similar vegeu [48]. La unió dels tors el·líptics té mesura de Hausdorff $2(2M+1)$-dimensional positiva.

La qüestió és ara quin és el comportament asimptòtic de la 'densitat' d'aquesta mesura quan N (i M) $\to \infty$. Una resposta parcial a aquesta qüestió [37], diu que aquesta densitat decau exponencialment de pressa en N, mentre que a més hi ha un decreixement polinomial en M.

5 Remark *Cal esmentar que la ressonància* $1:1:\ldots:1$ *d'aquest sistema dóna lloc a interessants bifurcacions quasiperiòdiques [37].*

Discussió

La conclusió d'aquest exemple és que l'obstrucció a l'ergodicitat donada per la teoria KAM no és massa dolenta quan la mida del sistema tendeix a infinit. Això està en la mateixa línia que un resultat previ d'Arnold [3].

Un altre problema és què passa en el límit quan $N \to \infty$. La teoria KAM per a sistemes infinits està àmpliament desenvolupada [42], [39], però els sistemes amb xarxes infinites encara tenen molts secrets.

7 Conclusió

No podem acabar sense dir que Kolmogorov va ser un científic universal. La seva perdurable influència sobre l'estat actual en matemàtiques, física i altres ciències és enorme i aquest article només dóna una idea del seu llegat. No obstant això creiem que és una part important, que encara està en desenvolupament. El paper de la hipòtesi ergòdica en mecànica estadística ha resultat ser molt més subtil del que s'esperava; vegeu e. g., [9], [31], [32]. Com a lectures addicionals sobre teoria KAM, esmentem els textos introductoris [23], [49], [47], [60]. També és recomanable la lectura de [18], [43] i [29].

L'autor agraeix a la Universitat de Barcelona i a la Université de Bourgogne la seva hospitalitat durant la preparació d'aquest article. El meu agraïment també a Aernout van Enter i Floris Takens per les profitoses xerrades mantingudes.

Referències

[1] Arnold, V. I. «Proof of a theorem by A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian». *Usp. Math. Nauk*, 18 (5) (1963), 13–40; *Russ. Math. Surv.*, 18 (5) (1963), 9–36.

[2] ARNOLD, V. I. «Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics». *Russian Math. Surveys*, 18 (6) (1963), 85–191. [Corrigenda (en rus): *Uspekhi Mat. Nauk*, 23 (1968), 216.]

[3] ARNOLD, V. I. «Instability of dynamical systems with many degrees of freedom». *Soviet Mathematics*, 5 (3) (1964), 581–585.

[4] ARNOLD, V. I. «On the instability of dynamical systems with many degrees of freedom». *Sov. Math. Dokl.*, 5 (3) (1964), 581–585.

[5] ARNOLD, V. I. «Small divisors I: On mappings of the circle onto itself». *Amer. Math. Soc. Transl., Ser.2*, 46 (1965), 213–284. [Original rus: *Izvest. Akad. Nauk SSSR, Ser Mat.*, 25 (1) (1961), 21–86. Corrigenda: *ibid.*, 28 (2) (1964), 479–480.]

[6] ARNOLD, V. I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations.* Springer Verlag, 1988. [Original rus: Nauka, 1978.]

[7] ARNOLD, V. I. *Mathematical Methods in Classical Mechanics.* Springer Verlag, 1978, 2a edició 1989. [Original rus: Nauka, 1974.]

[8] ARNOLD, V. I.; AVEZ, A. *Ergodic Problems of Classical Mechanics.* Addison-Wesley, 1989. [Original francés: Gauthier-Villars, 1968.]

[9] BRICMONT, J. «Science of Chaos or Chaos in Science». A: GROSS, P. R.; LEVITT, N. i LEWIS, M. W. [ed.]. «The Flight from Science and Reason». *Ann. of the New York Academy of Sciences*, 775, 131–175, Nova York: Academy of Sciences New York, 1996. [També publicat a *Physicalia Magazine*, 17 (1995), 159–208.

[10] BRICMONT, J.; GAWEDZKI, K.; KUPIAINEN, A. «KAM Theorem and Quantum Field Theory». *Comm. Math. Phys.*, 201 (1999), 699–727.

[11] BLANCHARD, P. «Complex analytic dynamics on the Riemann sphere». *Bull. Amer. Math, Soc. (N.S.)*, 11 (1) (1984), 85–141.

[12] BROER, H. W. «KAM theory: the legacy of Kolmogorov's 1954 paper». *Bull. Amer. Math, Soc. (N.S.)*, 2004, per aparèixer.

[13] BROER, H. W.; HANSSMANN, H.; JORBA, À.; VILLANUEVA, J.; WAGENER, F. O. O. «Normal-internal resonances in quasiperiodically forced oscillators: a conservative approach». *Nonlinearity*, 16 (2003), 1751–1791.

[14] BROER, H. W.; HANSSMANN, H.; YOU, J. «Bifurcations of normally parabolic tori in Hamiltonian systems». *Preprint* University of Groningen. Enviat per a publicació.

[15] BROER, H. W.; HANSSMANN, H.; YOU, J. «Umbilical torus bifurcations in Hamiltonian systems». *Preprint* University of Groningen. Enviat per a publicació.

[16] BROER, H. W.; HUITEMA, G. B. «A proof of the iso-energetic KAM-theorem from the 'ordinary' one» *Journ. Diff. Eqns.*, 90 (1) (1991), 52–60.

[17] BROER, H. W.; HUITEMA, G. B. «Unfoldings of quasi-periodic tori in reversible systems». *Journ. Dynamics and Differential Equations*, 7 (1) (1995), 191–212.

[18] BROER, H. W.; HUITEMA, G. B.; SEVRYUK, M. B. «Quasi-periodic tori in families of dynamical systems: order amidst chaos». *LNM*, 1645, Springer Verlag, 1996.

[19] BROER, H. W.; HUITEMA, G. B.; TAKENS, F.; BRAAKSMA, B. L. J. «Unfoldings and bifurcations of quasi-periodic tori». *Mem. AMS*, 83 (421) (1990), 1–170.

[20] BROER, H. W.; PUIG, J.; SIMÓ, C. «Resonance tongues and instability pockets in the quasi-periodic Hill-Schrödinger equation». *Commun. Math. Phys.*, 641 (2003), 467–503.

[21] BRUNO, A. D. «Convergence of transformations of differential equations to the normal forms». *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.*, 165 (1965), 987–989.

[22] CIOCCI, M. C. «Bifurcation of periodic orbits and persistence of quasi periodic solutions in families of reversible systems». *PhD Thesis*, Gent, 2003.

[23] CIOCCI, M. C.; LITVAK-HINENZON, A.; BROER, H. W. «Survey on dissipative KAM theory including quasi-periodic bifurcations, based on lectures by Henk Broer». A: MONTALDI, J. i RATIU, T. [ed.]. *Peyresq Lectures on Geometric Mechanics and Symmetry,* LMS Lecture Notes Series, 306. Cambridge University Press. Per aparèixer.

[24] CHIERCHIA, L.; GALLAVOTTI, G. «Drift and diffusion in phase space». *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique*, 60 (1) (1994), 1–144.

[25] CREMER, H. «Zum Zentrumproblem». *Math. Ann.*, 98 (1927), 151–163.

[26] DEVANEY, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Addison Wesley, 1989.

[27] DIACU, F.; HOLMES, P. *Celestial Encounters, the origins of chaos and stability.* Princeton University Press, 1996.

[28] DINABURG, E. I.; SINAI, Y. G. «The one-dimensional Schrödinger equation with a quasiperiodic potential». *Func. An. and Appl.*, 9 (1975), 179–189.

[29] ELIASSON, L. H.; KUKSIN, S. B.;MARMI, S.; YOCCOZ, J.-C. *Dynamical Systems and Small Divisors, Cetraro 1998. LNM* 1784, Springer Verlag, 2002.

[30] FRÖHLICH, J.; SPENCER, T. «Absence of diffusion in the Anderson model for large disorder or low energy». *Comm. Math. Phys.*, 88 (1983), 151–189.

[31] GALLAVOTTI, G. *Statistical Mechanics, A Short Treatise.* Springer Verlag, 1999.

[32] GALLAVOTTI, G.; BONETTO, F.; GENTILE, G. «Aspects of the ergodic, qualitative and statistical theory of motion». Springer Verlag. Per aparèixer. Versió preliminar a http://ipparco.roma1.infn.it/libri.html.

[33] GALLAVOTTI, G.; GENTILE, G.; MASTROPIETRO, V. «Field theory and KAM tori». *MPEJ*, 1 (1995), paper 5.

[34] HANSSMANN, H. «The quasi-periodic centre-saddle bifurcation». *Journ. Diff. Eqns.*, 142 (2) (1998), 305–370.

[35] HERMAN, M. R. «Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations». *Publ. Math. IHES*, 49 (1979), 5–234.

[36] Hopf, E. «A mathematical example displaying features of turbulence». *Commun. Appl. Math.* 1 (1948), 303–322.

[37] de Jong, H. H. «Quasiperiodic breathers in systems of weakly coupled pendulums: Applications of KAM theory to classical and statistical mechanics». *Tesi doctoral.* Groningen, 1999.

[38] Jorba, A.; Villanueva, J. «On the normal behaviour of partially elliptic lower-dimensional tori of Hamiltonian systems». *Nonlinearity*, 10 (1997), 783–822.

[39] Kappeler, T.; Pöschel, J. «KdV & KAM». *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge*, 45, Springer Verlag, 2003.

[40] Kolmogorov, A. N. «On the conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function [en rus]». *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 98 (1954), 525–530. Traducció a l'anglès a *LNP*, 93 (1979), 51–56.

[41] Kolmogorov, A. N. «The general theory of dynamical systems and classical mechanics». *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Amsterdam, 1954), v. 1, 315–333. North Holland, Amsterdam, 1957 [en rus]. [Reimprès a: *International Mathematical Congress in Amsterdam, 1954 (Plenary Lectures)*, 187–208. Fizmatgiz, Moscow, 1961. Traduït a l'anglès com a apèndix D a: R. H. Abraham. *Foundations of Mechanics*, 263–279, Benjamin, 1967. Reimprès com apèndix a: R. H. Abraham i J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics, Second Edition*, 741–757, Benjamin / Cummings, 1978.]

[42] Kuksin, S. B. «Nearly integrable infinite-dimensional Hamiltonian systems». *LNM*, 1556, Springer Verlag, 1993.

[43] Kuksin, S. B.; Lazutkin, V. F.; Pöschel, J. [ed.]. *Seminar on Dynamical Systems* (St. Petersburg, 1991). Birkhäuser, 1994.

[44] Landau, L. D. «On the problem of turbulence». *Akad. Nauk.*, 44 (1944), 339.

[45] Landau, L. D.; Lifschitz, E. M. *Fluid Mechanics.* Oxford: Pergamon, 1959.

[46] Laskar, J. «Large scale chaos and marginal stability in the solar system». *Proceedings XIIth Int. Congress of Math. Phys. (París 1994).* Int. Press Cambridge, 1995.

[47] Llave, R. de la «A tutorial on Kam Theory». *Preprint.* University of Austin, 2001.

[48] MacKay, R. S.; Aubry, S. «Proof of existence for breathers for time reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators». *Nonlinearity*, 7 (6) (1994), 1623–1643.

[49] Marmi, S. *An introduction to small divisor problems.* Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, 2000.

[50] Moser, J. K. «On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus». *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. II,* 1 (1962), 1–20.

[51] MOSER, J. K. «On the theory of quasi-periodic motions». *SIAM Review*, 8 (2) (1966), 145–172.

[52] MOSER, J. K. «Convergent series expansions for quasi-periodic motions». *Math. Ann.*, 169 (1967), 136–176.

[53] MOSER, J. K. «Lectures on Hamiltonian systems». *Mem. AMS*, 81 (1968), 1–60.

[54] MOSER, J. K. «Stable and random motions in dynamical systems, with special emphasis to celestial mechanics». *Ann. Math. Studies*, 77. Princeton University Press, 1973.

[55] NEKHOROSHEV, N. N. «Exponential estimate on the stability time of near integrable Hamiltonian systems». *Russ. Math. Surveys*, 32 (6) (1977), 1–65.

[56] NEWHOUSE, S. E.; RUELLE, D.; TAKENS, F. «Occurrence of strange Axiom A attractors near quasi-periodic flows on $\mathbb{T}^m$, $m \leq 3$». *Commun. Math. Phys.*, 64 (1978), 35–40.

[57] OXTOBY, J. *Measure and Category.* Springer Verlag, 1971.

[58] PÖSCHEL, J. «Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets». *Comm. Pure Appl. Math.*, 35 (5) (1982), 653–696.

[59] PÖSCHEL, J. «On elliptic lower dimensional tori in Hamiltonian systems». *Math. Z.*, 202 (1989), 559–608.

[60] PÖSCHEL, J. «A lecture on the classical KAM Theorem». *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 69 (2001).

[61] PUIG, J. «Cantor Spectrum for the Almost Mathieu Operator». *Comm. Math. Phys.*, 244 (2) (2004), 297–309.

[62] RUELLE, D. *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory.* Academic Press, 1989.

[63] RUELLE, D.; TAKENS, F. «On the nature of turbulence», *Commun. Math. Phys.*, 20 (1971), 167–192; 23 (1971), 343–344.

[64] RÜSSMANN, H. «Konvergente Reihenentwicklungen in der Störungstheorie der Himmelsmechanik». A: JACOBS, K. [ed.]. *Selecta Mathematica* V, Heidelberger Taschenbücher, 201 (1979), 93–260, Springer Verlag.

[65] SEVRYUK, M. B. «New results in the reversible KAM theory». A: KUKSIN, S. B.; LAZUTKIN, V. F. i PÖSCHEL, J. [ed.]. *Seminar on Dynamical Systems* (St. Petersburg, 1991), 184–199, Birkhäuser, 1994.

[66] SIEGEL, C. L. «Iteration of analytic functions». *Ann. of Math. (2)*, 43 (1942), 607–612.

[67] WHITNEY, H. «Differentiable functions defined in closed sets.» *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36 (2) (1934), 369–387.

[68] YOCCOZ, J.-C. «C^1-conjugaisons des difféomorphismes du cercle». A: PALIS, J. [ed.], *Geometric Dynamics,* Proceedings, Rio de Janeiro, 1981, LNM, 1007 (1983), 814–827.

[69] YOCCOZ, J.-C. «Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques». *Astérisque*, 231 (1995), 3–88.

[70] YOCCOZ, J.-C. «Analytic linearization of circle diffeomorphisms». A: MARMI, S.; ELIASSON, L. H.; KUKSIN, S. B. i YOCCOZ, J.-C. [ed.]. *Dynamical Systems and Small Divisors,* LNM, 1784 (2002), 125–174, Springer Verlag.

[71] ZEHNDER, E. «An implicit function theorem for small divisor problems». *Bull. Amer. Math, Soc.*, 80 (1) (1974), 174–179.

[72] ZEHNDER, E. «Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems, I and II». *Comm. Pure Appl. Math.*, 28 (1) (1975), 91–140; 29 (1) (1976), 49–111.

UNIVERSITY OF GRONINGEN
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTING SCIENCE
BLAUWBORGJE 3
NL-9747 AC, GRONINGEN,
broer@math.rug.nl