

BUTLLETÍ DE LA SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES
Vol. 16, núm. 1, 2001. Pàg. 101-122

Espanya és qui més incrementa el seu poder al Consell de Ministres de la UE?

DAVID PINYOL GRAS

Itaca t'ha donat el bell viatge,
sense ella no hauries sortit.
i si la trobes pobra, no és que Itaca
t'hagi enganyat. Savi, com bé t'has fet,
sabràs el que volen dir les Itagues.

Itaca de Kavafis (adaptació de Lluís Llach)

1 Introducció

Segons el diari *El Mundo*, «España es el país que más incrementa su poder en el Consejo de Ministros de la Unión Europea».¹ Per fer aquesta afirmació es basen en el fet que Espanya «Multiplica por 3,36 sus votos, mientras que los cuatro *grandes*... se tienen que conformar con tener 2,9 veces más poder que en estos momentos.»

Però si els vots es multipliquen per 2,9 el poder també? Tenir més vots significa tenir més poder? El percentatge de vots és el percentatge de poder? El poder es pot quantificar? Com es calcula? Quan s'afirma que Espanya ha augmentat més que ningú, com i respecte a què es compara? Quants vots li toquen a cada país?

¹ Titular de la pàgina 4 a *El Mundo* del 12-12-2000. Més endavant diu: «Para España habrá un antes y un después de Niza. Pero lo que nadie nos puede discutir es que somos el país que más ha incrementado su peso específico dentro del Consejo de Ministros de la Unión Europea, al punto que nos colocamos al mismo nivel prácticamente que Francia, Reino Unido e Italia. Eso es, al menos, lo que dicen los siempre fríos datos objetivos.» «La maleta de José María Aznar volvió a Madrid cargada de más poder que cuando se presentó en Niza el jueves pasado. El presidente del Gobierno compareció ante la prensa a las 5,26 horas (sic) de ayer después de haberse pasado 19 horas haciendo sumas, restas, divisiones y multiplicaciones, Aznar contó con la ayuda de un sistema informático diseñado por el Ejército que le permitía saber en tiempo real cómo quedaba España con cada una de las quinielas de reparto de poder.»

En aquest article veurem quines respostes donen les matemàtiques a aquestes i altres preguntes. Per exemple: què entenem per poder? Matemàticament podem entendre el poder com la capacitat d'un votant per influir en les decisions del grup. L'anomenarem índex de poder de decisió i l'expressarem en %.

Comencem, però, explicant com el Tractat de Niça ha fet variar la presa de decisions en el Consell.

2 El Tractat de Niça

En el Tractat de Niça i anteriors constitutius de la Unió Europea s'especifiquen els sistemes de votació que s'han de seguir per a l'aprovació de cada tipus de decisió. La casuística és extensa i complicada.²

El Tractat inclou un protocol sobre l'ampliació de la Unió Europea que diu³ quants vots tindrà cada estat per adoptar acords per majoria qualificada i, segons cada situació, quins requisits s'hauran de complir per prendre un acord. El Tractat de Niça ha variat els vots de cada estat membre en la nova⁴ Unió Europea que passarà de 15 a 27 països. Aquest canvi en la ponderació ha estat polèmic.

En el cas del Consell de Ministres de la Unió Europea i a partir de l'1 de gener de 2005 es consideren diverses situacions, indicades a la taula següent amb els números 2, 3, 4 i 5.⁵ Anomeno situació 1 l'actual. Els requisits per prendre un acord o bloquejar-lo són diferents si la decisió és a proposta de la Comissió Europea o no. Per això en cada situació ho indico.

A partir d'aquestes dades i d'altres publicades en la premsa he pogut fer les taules 2, 3 i 4 de poder de decisió al Consell de Ministres que figuren més endavant.

² Per exemple l'article 7.1 del TUE: «A propuesta motivada de un tercio de los Estados miembros, del Parlamento Europeo o de la Comisión, el Consejo, por mayoría cualificada de cuatro quintos de sus miembros y previo dictamen conforme del Parlamento Europeo...»

³ En l'article 3.1: «A 1 de gener de 2005 [...] quan el Consell hagi d'adoptar un acord per majoria qualificada, els vots dels membres es ponderaran de la manera següent: [...]. Per a la seva adopció, els acords del Consell requeriran almenys 170 vots que representin la votació favorable de la majoria dels membres com a mínim, quan [...] hagin de ser adoptats a proposta de la Comissió. En els altres casos, requeriran almenys 170 vots que representin la votació favorable de dos terços dels membres com a mínim.» En l'article 3.4: «Quan el Consell adopti una decisió per majoria qualificada, tot membre del Consell podrà sol·licitar que es comprovi que la majoria qualificada comprèn com a mínim el 62 % de la població total de la Unió. Si es posés de manifest que aquesta condició no es compleix, la decisió en qüestió no serà adoptada.» En l'annex III diu: «Quan tots els (12) estats candidats mencionats s'hagin adherit, la minoria de bloqueig passarà de 88 a 91 vots.»

⁴ Podeu veure en la taula 2 el repartiment de vots en l'actual i la nova Unió Europea.

⁵ En l'annex II del Tractat de Niça es diu que quan s'arribi a 27 estats «per adoptar els acords es requeriran almenys 258 vots» (255 segons *El País* i *El Mundo* del 12-12-2000). En l'annex III del Tractat, es diu que quan s'arribi a 27 estats «la minoria de bloqueig passarà de 88 a 91».

Situació	1	2	3	4	5
Decisió a proposta de la Comissió?		Sí	No	Sí	No
Estats membres	15	15	15	27	27
Vots a la cambra	87	237	237	345	345
Vots favorables necessaris	62	169	169	258	258
Estats favorables necessaris		8	10	14	18
Població representada favorable (%)		62	62	62	62
Vots necessaris per bloquejar	26	69	69	91	91

TAULA 1: Resum de diferents situacions considerades al protocol d'ampliació de la Unió Europea inclòs al Tractat de Niça per prendre un acord al Consell de Ministres.

3 Poder de decisió

A *El Mundo* del 12-12-2000 s'afirma que Espanya «Multiplica por 3,36 sus votos, mientras que los cuatro *grandes* [...] se tienen que conformar con tener 2,9 veces más poder que en estos momentos.» De fet Espanya passarà de 8 a 27 vots i per tant tindrà 3,375 vegades més vots en una cambra que passa de 87 a 237 vots. Els quatre grans (Alemanya, França, Regne Unit i Itàlia) passaran de 10 a 29 vots. Percentualment significa que Espanya passa del 9,20 % dels vots del Consell actual a l'11,39 % si continuen només els 15 estats, per quedar en el 7,83 % quan siguin 27. La pregunta que ara ens podem fer és: quant augmenta Espanya? Ho podem comparar usant diferents criteris.

- Espanya multiplica els vots per 3,375 i els estats grans per 2,9 ($27 : 8 = 3,375$).
- Augmenta el 2,19 % i els grans el 0,74 % ($11,39 \% - 9,20 \% = 2,19 \%$).
- Augmenta, en proporció, el 23,89 % i els grans el 6,46 % ($\frac{11,39 \% - 9,20 \%}{9,20 \%} = 23,89 \%$).
- Augmenta 19 vots, igual que els grans ($27 - 8 = 19$ i $29 - 10 = 19$).

Però no és el mateix el percentatge de poder de decisió que el percentatge de vots. Vegem-ne uns quants exemples. Si una votació es decideix per majoria, tenir el 51 % dels vots no significa tenir el 51 % de poder de decisió; tens tot el poder de decisió, el 100 %. Si entre dues persones tenen totes les accions, encara que una passi de l'1 % al 49 %, és a dir, ha multiplicat per 49 el

nombre de vots, continuarà manant (tenint tot el poder de decisió) la persona que passa de tenir el 99 % al 51 % si es decideixen les coses per majoria.⁶

Tal com diu en David Nualart [11], caldrà introduir una mesura quantitativa del poder de cada votant entès com la seva capacitat per influir en les decisions, que anomenarem *poder de decisió*. Però hi ha diversos índexs de poder de decisió.

Per exemple, Banzhaf (1965, 1968) dóna les definicions següents:

1 DEFINICIÓ *L'índex de Banzhaf d'un votant és el nombre de coalicions guanyadores a les quals pertany el votant i que perdrien si desertés, dividit entre la suma total. S'utilitza el símbol β o B .*

$$B(i) = \frac{c_i}{\sum_{i \in I} c_i}$$

on c_i és el nombre de coalicions on el votant i és decisiu, I és el conjunt de votants.

Fixeu-vos que, així definit, la suma de tots els índexs és un i , per tant, $B(i)$ és la part de poder de cada individu.

Banzhaf també utilitza una mesura absoluta de poder:

2 DEFINICIÓ *L'índex absolut de Banzhaf d'un votant és definit per:*

$$B'(i) = \frac{c_i}{2^{n-1}}$$

on c_i és el nombre de coalicions on el votant i és decisiu, n és la quantitat de votants. B' mesura la probabilitat que un votant sigui decisiu en una coalició.

Un votant tindrà B o B' igual a 1 només si és un dictador. Entenem per dictador un votant que ell sol té els vots suficients per guanyar sempre, encara que els altres votants s'uneixin.

Coleman (1971) introdueix dues mesures absolutes de poder.

3 DEFINICIÓ *L'índex Coleman de poder d'un votant per prevenir, evitar, una acció es defineix:*

$$CP(i) = \frac{c_i}{w}$$

on c_i és el nombre de coalicions on el votant i és decisiu, w és la quantitat de coalicions guanyadores.

Coleman l'interpreta com la proporció de vegades que un individu pot bloquejar l'acció d'una coalició guanyadora retirant-se'n.

⁶ Un altre exemple. A l'empresa Audiovisual Sport el repartiment accionarial és: 40 % d'Antena 3, 40 % de Canal+ i 20 % de TV3. Malgrat que TV3 tingui la meitat de les accions que Canal+ o que Antena 3, en les decisions per majoria TV3 és tan decisiva com les altres perquè qualsevol aliança entre dues d'elles ja formen majoria. Per tant el poder de decisió serà 1/3 per a cada televisió.

Un votant tindrà $CP = 1$ si té dret de veto.

4 DEFINICIÓ *L'índex Coleman de poder d'un votant per iniciar una acció es defineix:*

$$CI(i) = \frac{c_i}{2^n - w}$$

on c_i és el nombre de coalicions on el votant i és decisiu, n és la quantitat de votants i w és la quantitat de coalicions guanyadores.

Coleman l'interpreta com la proporció de vegades que un individu pot canviar una coalició de perdedora a guanyadora en ajuntar-s'hi.

Un votant tindrà $CI = 1$ només si és un dictador. Observem que els índexs de Coleman no estan definits si no hi ha coalicions guanyadores o si totes les coalicions guanyen.

Històricament trobem abans la definició d'índex de poder que van donar Lloyd Shapley i Martin Shubik.⁷

5 DEFINICIÓ *L'índex de Shapley-Shubik d'un votant es defineix com el nombre de permutacions dels votants en les quals el votant és un element decisiu (amb ell guanyen i sense ell no) respecte als votants que el precedeixen, dividit pel nombre total de permutacions. S'utilitza el símbol ϕ o φ .*

$$\phi_i = \sum \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

on s és el nombre de votants de la coalició guanyadora S que sense el votant i no seria guanyadora.

En les definicions donades fins ara un votant amb índex zero significa que no és mai decisiu, no té cap poder.

Podríem demanar certes propietats als índexs de poder. Per exemple:

1. L'índex de poder hauria de ser una funció K tal que a cada votant j li assignés un real positiu $K_j \geq 0$.
2. Els nombres K_j només haurien de dependre de la col·lecció W de coalicions guanyadores. Per tant, si els votants i, j tenen posicions simètriques en W , llavors $K_i = K_j$.
3. $K_j = 0$ només si j és un votant maniquí. És a dir, mai és decisiu.
4. Si els vots de i són més que els de j ($w_i > w_j$), llavors $K_i \geq K_j$.
5. $\sum_{j \in N} K_j = 1$
6. $K_j(G_1) + K_j(G_2) = K_j(G_1 \cap G_2) + K_j(G_1 \cup G_2)$. Això significa que la suma dels poders de decisió de l'individu j en les votacions G_1 i G_2 és igual a la suma de l'índex de poder de l'individu j en $G_1 \cap G_2$ (votació on es guanya

⁷ Proposat per Lloyd Shapley de la teoria de jocs i l'economista Martin Shubik el 1954 a «A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System», *American Political Science Review*, 48, p. 787-792

si es guanya en G_1 i G_2) més l'índex de poder de l'individu j en $G_1 \cup G_2$ (votació on es guanya si es guanya en G_1 o G_2). Per exemple, una mateixa persona (j) pot tenir un percentatge d'accions en una empresa (G_1) on es decideix per majoria i un altre percentatge en una altra empresa (G_2) on es decideix per una majoria de dos terços.

7. Decidint per unanimitat amb r votants, cada votant j ha de tenir $K_j = \frac{1}{r}$.
8. Decidint per unanimitat amb r votants, cada votant j ha de tenir $K_j = \frac{1}{(2^r-1)}$.

S'ha demostrat (Dubey [5] i [6]) que:

6 **TEOREMA** *L'índex ϕ de Shapley-Shubik és l'únic índex de poder que satisfà les propietats 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7.*

També tenim un altre teorema que diu:

7 **TEOREMA** *L'índex absolut de Banzhaf (β' o B') és l'únic índex de poder que satisfà les propietats 1, 2, 3, 4, 6 i 8.*

Tal com ens explica Straffin ([14, p. 296]), en una situació en la qual la gent té poca habilitat per convèncer els altres del seu punt de vista, potser la propietat 8 és més aplicable i l'índex de Banzhaf dona una millor idea del poder relatiu dels votants. On la gent té força possibilitats de convèncer els altres, l'índex de Shapley-Shubik seria millor. L'índex de Banzhaf (β) és preferible en votacions on la pregunta no admet un conjunt ample d'opinions. En el nostre cas considerarem que cada elector vota a favor o en contra.

A continuació calculo en cada possible situació i per cada país els índexs de poder de Shapley-Shubik i de Banzhaf ja que donen els valors normalitzats.

4 Taules de poder de decisió en cada possible situació

He elaborat unes taules en les quals exposo els índexs de poder de decisió en cada una de les cinc situacions considerades en la taula 1.

En la taula 2 podem veure els índexs de poder dels 15 estats (en total 375.325.000 habitants) en les situacions 1, 2 i 3 (vegeu la taula 1). Fins al 2004 —situació 1— la cambra tindrà 87 vots repartits entre els 15 estats, tal com s'indica en la columna C. Mentre el Consell de Ministres es mantingui després de l'1-1-2005 amb només els 15 estats actuals, la cambra tindrà 237 vots repartits tal com s'indica en la columna K.

El 12-12-2000 es decidí que serien necessaris 170 vots per aprovar un acord (per tant es necessiten 68 vots per bloquejar una cambra de 237 vots). Dies més tard s'aprovà que farien falta 169 vots (es bloquejaria amb 69). Quins serien els índexs de poder si es necessitessin 170 vots? La resposta la podem veure en la taula 3.

Situació						1		2		3			
Columna		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
Bloqueig	Vots					26		69		69			
	Habit. (mil.)					—		142,6 (38 %)		142,6 (38 %)			
	Estats					—		8 (1/2)		6 (1/3)			
		habit. (mil.)	%	vots	%	φ	β	φ	β	φ	β	vots	%
Total		375,33	100	87	100	100	100	100	100	100	100	237	100
Alemanya		82,0	21,9	10	11,5	11,7	11,2	13,8	12,1	13,1	10,6	29	12,2
Regne Unit		59,2	15,8	10	11,5	11,7	11,2	12,9	12,0	12,1	10,5	29	12,2
França		59,0	15,7	10	11,5	11,7	11,2	12,9	12,0	12,1	10,4	29	12,2
Itàlia		57,6	15,3	10	11,5	11,7	11,2	12,9	12,0	12,1	10,4	29	12,2
Espanya		39,4	10,5	8	9,2	9,5	9,2	11,0	11,1	10,4	9,8	27	11,4
Holanda		15,8	4,2	5	5,7	5,5	5,9	5,2	5,5	5,4	5,9	13	5,5
Grècia		10,5	2,8	5	5,7	5,5	5,9	4,6	5,2	4,8	5,6	12	5,1
Bèlgica		10,2	2,7	5	5,7	5,5	5,9	4,6	5,2	4,8	5,6	12	5,1
Portugal		10,0	2,7	5	5,7	5,5	5,9	4,6	5,2	4,8	5,6	12	5,1
Suècia		8,9	2,4	4	4,6	4,5	4,8	3,7	4,3	4,1	5,0	10	4,2
Àustria		8,1	2,1	4	4,6	4,5	4,8	3,7	4,3	4,1	5,0	10	4,2
Dinamarca		5,3	1,4	3	3,5	3,5	3,6	2,8	3,1	3,3	4,1	7	2,9
Finlàndia		5,2	1,4	3	3,5	3,5	3,6	2,8	3,1	3,3	4,1	7	2,9
Irlanda		3,7	1,0	3	3,5	3,5	3,5	2,8	3,1	3,3	4,1	7	2,9
Luxemburg		0,4	0,1	2	2,3	2,1	2,3	1,6	2,0	2,2	3,2	4	1,7

TAULA 2: Poder de decisió de cada país en una Unió Europea de 15 estats.

A proposta de la Comissió? Columna			Sí		No	
	% hab.	vots/237	G' φ	H' β	I' φ	J' β
Alemanya	21,86	12,24	13,56	12,06	12,86	10,56
Regne Unit	15,79	12,24	13,01	11,98	12,31	10,48
França	15,71	12,24	13,01	11,98	12,31	10,48
Itàlia	15,35	12,24	13,01	11,98	12,31	10,48
Espanya	10,50	11,39	11,59	11,17	10,98	9,86
Holanda	4,20	5,49	5,14	5,84	5,29	6,18
Grècia	2,81	5,06	4,68	5,18	4,88	5,63
Bèlgica	2,72	5,06	4,68	5,18	4,88	5,63
Portugal	2,66	5,06	4,68	5,18	4,88	5,63
Suècia	2,36	4,22	3,89	4,48	4,20	5,16
Àustria	2,15	4,22	3,89	4,48	4,20	5,16
Dinamarca	1,42	2,95	2,55	2,96	3,03	3,99
Finlàndia	1,37	2,95	2,55	2,96	3,03	3,99
Irlanda	1,00	2,95	2,55	2,96	3,03	3,99
Luxemburg	0,11	1,69	1,21	1,59	1,79	2,80

TAULA 3: Poder de decisió si es necessiten 170 vots per a aprovar un acord.

D'altra banda, si comparem la taula 3 amb els índexs de poder definitius de la taula 2 veurem que Espanya surt perjudicada amb el canvi i que la més beneficiada és Alemanya. Per exemple, per a Espanya, en la situació 2 definitiva, l'índex φ (columna G) és un 11,00 % i en canvi en la provisional (columna G') era un 11,59 %.

Un cop la Unió Europea estigui formada per 27 estats, els índexs de poder de decisió seran els indicats en la taula 4.

Per mirar quin ha augmentat més el seu poder de decisió es poden usar diferents criteris. Per exemple:

- Poder de decisió respecte a l'actual poder de decisió. Sempre, és clar, usant el mateix tipus d'índex de poder. És inadequat fer-ho així en les situacions 4 i 5 ja que tenen 27 estats, mentre que actualment són 15 estats i per tant disminuiran el seu poder.
- Poder de decisió respecte al % de vots: el % de vots està indicat en les columnes següents de les taules 2 i 4: D en la situació 1; K en la situació 2 i 3; N en la situació 4 i 5.
- Poder de decisió respecte al % de població: no cal que ho escrigui perquè en qualsevol situació i per qualsevol índex de poder els que surten més beneficiats són Luxemburg i Malta. Alemanya és l'estat més perjudicat en aquest tipus de comparacions.

En les taules 5 i 6 podem veure el resultat d'algunes comparacions.

Situació						4		5	
Columna		A	L	M	N	O	P	Q	R
Proposat per la Comissió?						Sí		No	
Bloqueig	Vots					91		91	
	Hab. mil.					182,85 (>38%)		182,85 (>38%)	
	Estats					14 (>1/2)		10 (>1/3)	
		habit.	%	vots	%	φ	β	φ	β
Total		481,18	100	345	100	100	100	100	100
Alemanya		82,0	17,1	29	8,4	8,7	7,8	8,4	6,7
Regne Unit		59,2	12,3	29	8,4	8,7	7,8	8,4	6,7
França		59,0	12,3	29	8,4	8,7	7,8	8,4	6,7
Itàlia		57,6	12,0	29	8,4	8,7	7,8	8,4	6,7
Espanya		39,4	8,2	27	7,8	8,0	7,4	7,7	6,3
Holanda		15,8	3,3	13	3,8	3,7	4,0	3,7	3,9
Grècia		10,5	2,2	12	3,5	3,4	3,7	3,4	3,7
Bèlgica		10,2	2,1	12	3,5	3,4	3,7	3,4	3,7
Portugal		10,0	2,1	12	3,5	3,4	3,7	3,4	3,7
Suècia		8,9	1,8	10	2,9	2,8	3,1	2,9	3,3
Àustria		8,1	1,7	10	2,9	2,8	3,1	2,9	3,3
Dinamarca		5,3	1,1	7	2,0	2,0	2,2	2,1	2,6
Finlàndia		5,2	1,1	7	2,0	1,9	2,2	2,1	2,6
Irlanda		3,7	0,8	7	2,0	2,0	2,2	2,1	2,6
Luxemburg		0,4	0,1	4	1,2	1,1	1,3	1,3	1,2
Polònia		38,7	8,0	27	7,8	8,0	7,4	7,7	6,3
Romania		22,5	4,7	14	4,1	4,0	4,3	4,0	4,1
Rep. Txeca		10,3	2,1	12	3,5	3,4	3,7	3,4	3,7
Hongria		10,1	2,1	12	3,5	3,4	3,7	3,4	3,7
Bulgària		8,2	1,7	10	2,9	2,8	3,1	2,9	3,3
Eslovàquia		5,4	1,1	7	2,0	2,0	2,2	2,1	2,6
Lituània		3,7	0,8	7	2,0	2,0	2,2	2,1	2,6
Letònia		2,4	0,5	4	1,2	1,1	1,3	1,3	2,0
Eslovènia		2,0	0,4	4	1,2	1,1	1,3	1,3	2,0
Estònia		1,4	0,3	4	1,2	1,1	1,3	1,3	2,0
Xipre		0,7	0,2	4	1,2	1,1	1,3	1,3	2,0
Malta		0,4	0,1	3	0,1	0,1	0,1	1,0	1,8

TAULA 4: Poder de decisió de cada país en una Unió Europea de 27 després de l'1-1-2005. Valors arrodonits a la centèsima.

4.1 Conclusions

Només en tres casos Espanya és el país europeu que més augmenta (tant proporcionalment com en termes absoluts) en comparar dos percentatges:

1. L'índex de poder de Shapley-Shubik actual respecte al tant per cent de vots que té actualment.
2. El tant per cent de vots després de l'1-1-2005 mentre només hi hagi els 15 estats respecte als vots actuals.

Comparació de les columnes de les taules 2 i 4	Estat en la primera posició	Posició			Estat en l'última posició	%
		%	d'Espanya	%		
E/D-1	Espanya	3,8	1/15	3,8	Luxemburg	-10,0
F/D-1	Din, Fin, Irlan	4,2	10/15	0,5	Ale, RU, Fr, It	-2,9
K/D-1	Espanya	23,9	1/15	23,9	Luxemburg	-26,6
G/E-1	Alemanya	18,4	2/15	15,3	Luxemburg	-0,2
G/K-1	Alemanya	12,9	5/15	-3,4	Suècia, Àustria	-11,4
H/F-1	Espanya	20,2	1/15	20,2	Din, Fin, Irlan	-13,9
H/K-1	Luxemburg	16,0	15/15	-2,5	Espanya	-2,5
I/E-1	Alemanya	12,0	2/15	8,9	Bèlgica	-13,5
I/K-1	Luxemburg	32,5	15/15	-8,8	Espanya	-8,8
J/F-1	Luxemburg	40,8	5/15	6,4	RU, Fr, It	-6,4
J/K-1	Luxemburg	88,9	12/15	-13,7	RU, Fr, It	-14,6
O/N-1	Alemanya	3,7	5/27	2,2	Malta	-6,0
P/N-1	Malta	8,4	23/27	-5,2	Ale, RU, Fr, It	-7,4
Q/N-1	Malta	21,4	19/27	-1,9	Holanda	-3,1
R/N-1	Malta	104,0	23/27	-19,3	Ale, RU, Fr, It	-20,9

TAULA 5: Taula per veure quina posició ocupa Espanya i quin estat augmenta o disminueix més proporcionalment segons diferents comparacions.

3. Mentre a Europa, després de l'1-1-2005, hi hagi només els 15 estats, Espanya serà el que més haurà augmentat l'índex de Banzhaf respecte a l'actual.

El cas 1 fa referència al poder actual i per tant és erroni dir que en la nova Unió Europea augmentem. I com que és poc probable que després de l'1-1-2005 només hi hagi 15 estats, els casos 2 i 3 podrien fàcilment no donar-se mai. En tots els altres casos no serà el que més augmenta; més aviat en alguns conceptes serà el que més disminuirà o un dels que més ho faran.

Per tant, *és fals que Espanya sigui el país que més incrementa el seu poder de decisió en la nova Unió Europea.*

5 Quants vots per país?

En el Tractat de Niça es fixa, entre altres coses, quants vots tindrà cada estat en el Consell de Ministres. Però, quin criteri s'ha usat? Aquest problema —quants vots o escons per estat— es viu a la Cambra de Representants d'EUA des de la seva fundació.⁸ Els sistemes de representació indirecta —igual que

⁸ La Constitució dels EUA diu que «el nombre de representants que envia cada estat a la cambra ha de ser proporcional a la seva població».

Comparació de les columnes de les taules 2 i 4	Estat en la primera posició		Posició d'Espanya		Estat en l'última posició	
		%		%		%
E-D	Espanya	0,40	1/15	0,35	Luxemburg	-0,23
F-D	Suècia, Àust.	0,19	10/15	0,05	Ale, RU, Fr, It	-0,33
K-D	Espanya	2,20	1/15	2,20	Gr, Bèl, Por	-0,68
G-E	Alemanya	2,15	2/15	1,46	Gr, Bèl, Por	-0,94
G-K	Alemanya	1,58	10/15	-0,39	Gr, Bèl, Por	-0,49
H-F	Espanya	1,86	1/15	1,86	Gr, Bèl, Por	-0,71
H-K	Luxemburg	0,27	15/15	-0,29	Espanya	-0,29
I-E	Alemanya	1,40	2/15	0,85	Bèlgica	-0,75
I-K	Alemanya	0,83	15/15	-1,00	Espanya	-1,00
J-F	Luxemburg	0,92	2/15	0,59	RU, Fr, It	-0,72
J-K	Luxemburg	1,50	11/15	-1,56	RU, Fr, It	-1,79
O-N	Alemanya	0,31	5/27	0,17	Holanda	-0,09
P-N	Gr, Bèl, Por	0,21	23/27	-0,41	Ale, RU, Fr, It	-0,62
Q-N	Malta	0,19	26/27	-0,15	Polònia	-0,15
R-N	Malta	0,90	23/27	-1,51	Ale, RU, Fr, It	-1,76

TAULA 6: Taula per veure quina posició ocupa Espanya i quin país augmenta o disminueix més de percentatge segons diferents comparacions.

els de votació directa— estan farcits de paradoxes matemàtiques. Aquestes paradoxes estan lligades a la teoria de jocs; pressuposen l'existència de votants que conspiren per elegir els seus propis candidats (o la possibilitat que ho facin). Hoffman ens diu ([7, p. 241]): «El tema més polèmic de les assignacions d'escons és el nombre de representants (de vots) atribuït a cada estat, i no la manera d'elegir-los. Les assignacions corresponen a una àrea de les matemàtiques aplicades anomenada *teoria de l'elecció social*». El problema rau en com respondre diferents preguntes:

1. Com assignar un fraccionari a un enter? Malgrat que la proporció de vots o habitants és fraccionària el nombre d'escons o vots és un enter.
2. La Cambra ha de ser representativa de la població o del territori? Si volem un criteri d'equitat donarem a cada estat un nombre de representants igual al total de representants de la cambra multiplicat per la proporció entre la població de la circumscripció i la total arrodonint per amunt o per avall. Sovint es prenen fórmules mixtes de proporcionalitat territorial i de la població.
3. La cambra ha d'afavorir l'estabilitat dels governs o descriure l'opinió dels votants?
4. Quina ha de ser la grandària de la cambra? No ha de ser ni molt gran ni

molt petita. Matthew Shugart (1998) diu que als països industrialitzats avançats el total d'escons és més o menys l'arrel cúbica de la població representada, $E = \sqrt[3]{P}$. Segons ell pocs països tenen $\frac{\sqrt[3]{P}}{E}$ superior a 2 o inferior a 0,5.

Circumscripció	Cambrà	P=Població	E=Escons	P1/3/E
Espanya	Congrés	39.394.000	350	0,972
Europa	Parlament	481.181.000	735	1,066
Catalunya	Parlament	6.000.000	135	1,346
Regne Unit	Parlament	59.247.000	635	0,614
Luxemburg	Parlament	429.000	59	1,278
Dinamarca	Parlament	5.313.000	175	0,997

TAULA 7: Proporció entre població i escons de diversos parlaments.

Hem vist que hi ha diferents criteris. Vegem alguns exemples de com es fa en contextos propers i les polèmiques que han comportat recentment:

- A l'Ajuntament de Barcelona recentment⁹ es discutia si la ciutat té més o menys d'un milió i mig d'habitants.¹⁰ La qüestió no és anecdòtica. Si és inferior al milió i mig a l'Ajuntament li correspondrien 39 regidors en lloc de 41.¹¹
- En el Parlament de Catalunya, en una disposició transitòria de l'Estatut (anterior al 1980) es fixava el nombre d'escons per circumscripció proporcionalment a la població del 1978. Actualment caldria que Tarragona i Girona augmentessin en un escó per no ser «il·legal».¹² Catalunya no

⁹ *El Periódico* del 12-9-2000

¹⁰ Segons el PP Barcelona té 1.486.722 habitants. I per l'Ajuntament en té 1.504.335.

¹¹ En la vigent llei espanyola d'eleccions locals del 17-7-1978 es fixa quants regidors hi haurà en cada Ajuntament en funció de la població. Si el municipi té menys de 250 habitants tindrà 5 regidors; si en té entre 251 i 1.000 en tindrà 7. Entre 1.001 i 2.000 en tindrà 9. Entre 2 i 5 mil en tindrà 11. Entre 5 i 10 mil en tindrà 13. Entre 10 i 20 mil en tindrà 17. Entre 20 i 50 mil en tindrà 21. Entre 50 i 100 mil en tindrà 25. A partir d'aquí si els habitants estan entre $100.000(2n - 1) + 1$ i $100.000(2n + 1)$ tindrà $25 + 2n$ regidors on $n > 0$.

¹² Tal com es diu a *El País* el 19-2-2001 un informe elaborat per Manuel Gerpe, catedràtic de dret constitucional a la UAB, com que la població ha variat en aquests anys és *il·legal* mantenir el mateix repartiment d'escons: 85 per Barcelona, 18 per Tarragona, 17 per Girona i 15 per Lleida. Si s'apliqués el criteri establert per la disposició transitòria de l'Estatut on es fixaven el nombre d'escons per circumscripció caldria que Tarragona i Girona augmentessin en un escó. El 1982 s'aprovà la llei del Parlament on es diu que podria tenir entre 100 i 150 escons i per tant no hi hauria cap problema a passar dels 135 als 137 escons. Per què és il·legal?: «per no respectar el que estableix en la disposició transitòria de l'Estatut [...] i perquè el sistema és discriminatori perquè estableix una desigualtat no emparada per la llei i que afecta la igualtat de vot i el dret a accedir en condicions d'igualtat als càrrecs públics representatius», diu l'informe de Manuel Gerpe.

té una llei electoral pròpia i caldrà saber què passarà amb la possible divisió en vegueries.¹³

- En el Congrés de Diputats espanyol. En un article a *La Vanguardia* el 12 de març de 2000 Carles Castro proposava dues fórmules per accentuar la proporcionalitat en les eleccions generals de l'Estat: que la circumscripció fos autonòmica en lloc de provincial; o bé que l'atribució d'escons fos rigorosament proporcional a cada província. El sistema actual beneficia el centre d'Espanya en contra de la perifèria i les zones rurals en contra de les grans concentracions urbanes.
- En les eleccions al Parlament Basc en cada província s'escullen 25 diputats independentment de la població que visqui a cada una.¹⁴

Tornem a Europa. Si volguéssim repartir els escons o vots proporcionalment a la població¹⁵ de cada estat ho podríem fer usant diferents mètodes. Anomeno h_1, \dots, h_n els habitants i e_1, \dots, e_n els escons dels n estats, h el total de la població i N els vots a repartir.¹⁶

- *Mètode de les restes majors*, també anomenat *mètode de Hamilton*,¹⁷ *mètode de Vinton*¹⁸ ([8, p. 368]). S'assigna, en primer lloc, a cada estat la part entera de $N \cdot h_i/h$. Després afegim un vot més als països amb les restes més grans fins a completar els N vots. Si anomeno $q_i = N \cdot h_i/h$ aquest mètode satisfà la quota (significa que $|e_i - q_i| < 1$) i qualsevol solució e_i

13 «Un dels altres temes espinosos és la llei electoral. L'informe (de les vegueries) proposa canvis mínims, però com que la vegueria passaria a ser província, també seria circumscripció electoral. Els experts [...] proposen que a les eleccions al Congrés els 48 diputats catalans es distribuïssin entre les 6 vegueries. En les eleccions al Senat proposen de mantenir transitòriament les circumscripcions actuals mentre no hi hagi una reforma de la cambra alta. De l'informe es desprèn que en el cas de les eleccions al Parlament podria aplicar-se el mateix model del Congrés, encara que no hi ha posicions clares per manca d'una llei electoral catalana». Carles Pont a *El Temps* del 6-2-2001.

14 Al parlament basc hi ha 25 representants per cada una de les 3 províncies i en canvi el 1998 al cens Araba tenia 244.184 votants, Gipuzkoa 586.186 i Bizkaia 991.238. En *El Mundo* del 22-2-2001 José Luis Villacorta diu: «Si hay algo difícil de entender para cualquier mente educada en los principios clásicos de la representación democrática —un hombre un voto— son las leyes que regulan el sistema electoral vasco. [...] Se trata, evidentemente, de una extraña proporcionalidad. [...] Si la representación fuera proporcional a la población, Bizkaia ya tendría 41 escaños, Gipuzkoa 24 y Araba 10. Se optó por otra fórmula. La teoría paraoficial se sustentó en una supuesta hermandad atávica entre las tres provincias, bien avalada por una de las premisas irrenunciables del nacionalismo: cuenta el territorio, no los ciudadanos.»

15 Si es fes respecte a les persones amb dret a vot de cada estat sortirien uns altres valors.

16 Si h_i fossin els vots rebuts per cada un dels n partits i N els escons a repartir, aquests mètodes ens donarien l'assignació dels escons de la circumscripció a cada partit polític.

17 Alexander Hamilton, secretari del tresor d'EUA a finals del segle XVIII. El mètode d'assignació de Hamilton va ser aprovat pel Congrés d'EUA l'any 1791, però vetat per George Washington, que va preferir el de Vinton ja que fou recomanat per Thomas Jefferson entre altres. El sistema electoral grec del 1974 es basava en aquest mètode, però exigia que els escons es repartissin només entre els partits amb més d'un 17 % dels vots estatals. Aquest fet comportà que el govern Kavamanlís tingués el 73 % dels escons amb el 54 % dels vots.

18 Samuel F. Vinton, congressista per l'estat d'Ohio, la proposà i fou vigent al Congrés d'EUA del 23-5-1850 al 1910.

del mètode resol:

$$\min_{e_i} \sum |e_i - q_i|, \quad \min_{e_i} \sum (e_i - q_i)^2 \quad \text{i} \quad \min_{e_i} \max_i |e_i - q_i|$$

Però presenta paradoxes com *la paradoxa d'Alabama*.¹⁹

Aquest mètode és l'adoptat per Itàlia²⁰ a les eleccions europees i per Espanya per repartir la quantitat de diputats per província després que cada una ja en tingui un mínim d'adjudicats automàticament.

- *Mètode dels divisors*. Es busca un divisor d tal que els quocients h_i/d arrodonits sumin N . Hi ha diferents maneres d'arrodonir. En general, una forma d'arrodonir ve definida per l'elecció d'uns nombres $r(s)$ compresos entre els enters s i $s + 1$. Es defineix l'arrodoniment d'un nombre real $x \in [r(s), r(s + 1))$ com $s + 1$. Si la funció $r(s) = s + m$, on $s \in \mathbb{Z}$ i $m \in [0, 1]$ fixat dóna lloc a l'arrodoniment $a(x) = [x - m] + 1$, on $x \in \mathbb{R}$ i $[x - m]$ representa la part entera de $x - m$. Per aplicar el mètode dels divisors fixada una funció $r(s)$ podem fer una taula de les fraccions, per a $i = 1, \dots, n$ i $j = 0, \dots, N$. A continuació es localitzen a la taula les N fraccions més grans i s'assignen a l'estat i tants escons com el nombre d'aquestes fraccions que tinguin per numerador h_i . Per exemple, segons el valor de m tenim:

1. Si $m = 1$ ($r(s) = s + 1$), és equivalent a considerar la part entera de h_i/d . Anomenat *mètode de d'Hondt*²¹ a Europa, *mètode dels màxims divisors o de Jefferson*²² a EUA i *mètode de Hagenbach-Bischoff*²³ a Luxemburg.
2. Si $m = 0,5$ ($r(s) = s + 0,5$), és equivalent a considerar la part entera de $0,5 + h_i/d$. Anomenat *mètode de la màxima fracció, mètode de Sainte Laguë*²⁴ a Europa o *mètode de Webster*²⁵ a EUA.

19 Per a més informació vegeu l'apunt sobre la paradoxa d'Alabama al final de l'article.

20 De fet a Itàlia usen $(N + 2) \cdot h_i/h$.

21 Mètode de d'Hondt. Es divideix el nombre d'habitants de cada estat entre 1, 2, 3, 4, 5, ... Els escons s'atribueixen fins a adjudicar-los tots a les candidatures que obtinguin els quocients majors per ordre decreixent. En cas d'empat s'atribueix al de major nombre de vots. A Bèlgica s'ordenen els quocients en ordre decreixent per després anomenar d el quocient en la posició N i així assignar e_i a $[h_i/d]$. Rep el nom del matemàtic belga D'Hondt, que el va idear.

22 El mètode de Jefferson va ser l'utilitzat del 1792 al 1841 al Congrés d'EUA.

23 Mètode de Hagenbach-Bischoff. Anomena q_j , quota electoral, a $h/(N + j)$. A continuació assigna $[h_i/q_1]$ escons a l'estat i . Si no sumen N es procedeix a reassignar $[h_i/q_2]$ a l'estat i . Es repeteix fins a repartir els N escons. Ideada pel suís Hagenbach-Bischoff el 1888. S'aplicà a Suïssa, Àustria i actualment a les eleccions europees de Luxemburg sota aquest nom.

24 Ideat inicialment el 1910, va ser adoptat pels països escandinaus a partir del 1951. En lloc de dividir h_i per 1, 2, 3, 4, ... tal com fa el mètode d'Hondt, St. Laguë divideix h_i per 1, 3, 5, 7, ... fet equivalent a dividir per 0,5, 1,5, 2,5, 3,5, ... Aquest mètode perjudica els estats grans i beneficia els petits. Per tal de no beneficiar massa els petits normalment s'usa el mètode St. Laguë modificat a dividir h_i per 1, 4, 3, 5, 7, ... (0,7, 1,5, 2,5, 3,5...); per exemple, actualment en les eleccions europees a Suècia.

25 Introduït el 1842 com a alternativa al mètode de Jefferson per afavorir els estats grans. Ideat el 1832 per Daniel Webster, es pot llegir a *The writings and Speeches of Daniel Webster*, vol. VI, Boston Mass, National Edition, Little, Brown & Company. 1903, p. 120.

3. Si $m = 0$ ($r(s) = s$) tindrem el *mètode dels divisors petits* o *d'Adams* i és equivalent a assignar un vot a cada estat i repartir la resta segons el *mètode d'Hondt*.
 4. Si $m = 0,4$ ($r(s) = s + 0,4$) tindrem el *mètode de Condorcet*.
- *Mètode proporcional paritari*.²⁶ Es tracta d'assignar representants a cada estat de manera que es redueixi la magnitud relativa de la pèrdua, la qual cosa s'aconsegueix quan no hi ha cap comparació de parells d'estats que indiqui la necessitat de transferir un representant. Però com mesurar aquesta pèrdua? Per exemple podríem calcular la proporció d'habitants per cada representant i reassignar el nombre de representants per cada estat per minimitzar les diferències. Però aquesta no és l'única possibilitat i no n'hi ha cap de millor que una altra. Un exemple seria el mètode de la mitjana més elevada. Primer realitzem una primera assignació dels escons que respecti la quota ($e_i = [q_i]$, és a dir, la part entera de $q_i = N \cdot h_i/h$). Després donem successivament un escó al que tingui h_i/e_i més gran fins a completar els N escons. L'objectiu és minimitzar les diferències entre els h_i/e_i . Una altra variant és primer assignar $e_i = [q_i]$ i després repartir successivament un escó al que tingui $(q_i - [q_i])/h_i$ més gran fins a completar els N escons.

Alguns estats són tan poc poblats que molts mètodes no els donen representació, fet sens dubte inacceptable. Per això podríem, per exemple, adjudicar un mínim de vots a cada estat i la resta repartir-los segons cada mètode. Obtenim les segones columnes de cada mètode si aquest mínim és 3.

Observem que el repartiment de vots afavoreix els petits estats.

6 I al Parlament Europeu?

Al Tractat de Niça es diu: «En caso de que el número total de miembros [del Parlamento Europeo] contemplado en el apartado 2 sea inferior a setecientos treinta y dos, se aplicará al número de diputados que haya que elegir en cada Estado miembro una corrección proporcional de tal manera que el número total de escaños sea lo más próximo posible a setecientos treinta y dos, sin que esta corrección dé lugar a que en ningún Estado miembro el número de diputados que haya que elegir sea superior al establecido en el apartado 2 del artículo 190 para la legislatura 1999-2004.» És a dir: en la primera fase de l'ampliació, amb 21 estats membres, els parlamentaris per país podrien ser els de la taula següent si a cada estat li donem $\min\{vots_{s15}, [1,24 \cdot vots_{s27}]\}$.

²⁶ Adoptat al Congrés d'EUA el 1941 per Roosevelt. Havia estat proposat 20 anys abans per un matemàtic de Harvard, Edward V. Huntington.

	vots actuals	Tractat Niça	d'Hondt				Adams				St. Laguë				Condorcet	
			0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3
minim			0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3
Total	87	345	87	87	345	345	87	87	345	345	87	87	345	345	345	345
Alemanya	10	29	20	13	61	50	17	13	57	50	19	12	59	48	62	48
Regne Unit	10	29	15	10	44	36	13	10	41	36	14	10	43	35	45	35
França	10	29	14	10	44	36	13	10	41	36	14	10	42	35	44	35
Itàlia	10	29	14	10	42	36	12	10	40	36	14	9	41	35	43	34
Espanya	8	27	9	7	29	25	9	7	28	25	9	7	28	25	29	24
Holanda	5	13	3	5	11	12	4	5	11	12	4	5	11	12	11	12
Grècia	5	12	2	4	7	9	3	4	8	9	2	4	8	9	7	9
Bèlgica	5	12	2	4	7	8	3	4	8	8	2	4	7	9	7	9
Portugal	5	12	2	4	7	8	3	4	7	8	2	4	7	8	7	9
Suècia	4	10	2	4	6	8	2	4	7	8	2	4	6	8	6	8
Àustria	4	10	2	4	6	7	2	4	6	7	2	4	6	7	5	7
Dinamarca	3	7	1	3	3	6	2	3	4	6	1	4	4	6	3	6
Finlàndia	3	7	1	3	3	5	2	3	4	5	1	4	4	6	3	6
Irlanda	3	7	0	3	2	5	1	3	3	5	1	3	3	5	2	5
Luxemburg	2	4	0	3	0	3	1	3	1	3	0	3	0	3	0	3
Polònia		27			28	25			27	25			28	24	29	24
Romania		14			16	15			16	15			16	15	16	15
Rep. Txeca		12			7	8			8	8			7	9	7	9
Hongria		12			7	8			7	8			7	9	7	9
Bulgària		10			6	7			6	7			6	8	5	8
Eslovàquia		7			4	6			4	6			4	6	3	6
Lituània		7			2	5			3	5			3	5	2	5
Letònia		4			1	4			2	4			2	4	1	4
Eslovènia		4			1	4			2	4			1	4	1	4
Estònia		4			1	3			2	3			1	4	0	4
Xipre		4			0	3			1	3			1	3	0	4
Malta		3			0	3			1	3			0	3	0	3

TAULA 8: Com repartirien diferents mètodes els vots entre els diferents estats si el mínim per estat és 0 o és 3.

7 Conclusions finals

El Tractat de Niça ha assignat els vots del Consell de Ministres afavorint als petits estats. Però tenir més vots no significa tenir més poder de decisió. És fals que Espanya sigui l'estat que més incrementi el seu poder de decisió en la nova Unió Europea malgrat que hagi augmentat més que ningú en vots. Les matemàtiques ens diuen que no hi ha cap sistema de votació òptim, però donen eines per detectar els pitjors mètodes i, paradoxes, donen alternatives i deixen a una elecció política el sistema a emprar. El teorema d'impossibilitat d'Arrow ha despertat en aquest camp un gran interès.

8 Annex

8.1 Teorema de la impossibilitat d'Arrow

Si considerem una societat amb m individus, una llista d'alternatives independents a_1, \dots, a_n i una relació social de preferències R_i per cada individu (és a

	Ara	Fase 1	Fase 2
Estats	15	21	27
Total d'escons	626	732	732
Alemanya	99	99	99
Regne unit	87	87	72
França	87	87	72
Itàlia	87	87	72
Espanya	64	62	50
Holanda	31	31	25
Grècia	25	25	22
Bèlgica	25	25	22
Portugal	25	25	22
Suècia	22	22	18
Àustria	21	21	17
Dinamarca	16	16	13
Finlàndia	16	16	13
Irlanda	15	14	12
Luxemburg	6	6	6
Polònia		50	50
Romania			33
Rep. Txeca		20	20
Hongria		20	20
Bulgària			17
Eslovàquia			13
Lituània			12
Letònia			8
Eslovènia		7	7
Estònia		6	6
Xipre		6	6
Malta			5

TAULA 9: Assignació d'escons al Parlament Europeu en una Unió Europea de 15, 21 i 27 estats.

dir: R_i és una ordenació de les alternatives de més preferida a menys i per tant $a_1 R_i a_2$ significa que la relació R_i prefereix a_1 sobre a_2), hi ha algun mètode *just* per determinar una relació social de preferències R sobre les alternatives per a tota la societat?

Sigui X el conjunt d'alternatives independents $X = \{a_1, \dots, a_n\}$, T el conjunt de totes les relacions de preferència entre les alternatives de X (cada element de T és una permutació dels elements de X i per tant té $n!$ elements com a màxim) i $T^n = T \times \dots \times T$. Una funció $f: T^n \rightarrow T$ és una funció de benestar social d'Arrow (*Arrowian social welfare function*) si satisfà les condicions següents:

1. *Condicció de Pareto (The Pareto Principal)*: si tots els individus prefereixen x sobre y , el procediment de votació ha de preferir x sobre y . Matemàticament: sigui $f(R_1, \dots, R_n) = R$. Per cada $x, y \in T$, si $xR_i y$ es compleix per cada i , llavors xRy .
2. *Condicció d'independència (Independence of Irrelevant Alternatives)*: la relació social de preferència entre dues alternatives depèn únicament de les relacions individuals de preferència que s'estableixen entre aquestes alternatives. És a dir, si x és preferible a y , continuarà així independentment de l'aparició d'una opció z . Matemàticament: sigui $f(R_1, \dots, R_n) = R, f(R'_1, \dots, R'_n) = R'$ i $S \in X$. Si $(xR_i y \Leftrightarrow xR'_i y)$ per cada $x, y \in S$ i per tota i , llavors $(xRy \Leftrightarrow xR'y)$ per cada $x, y \in S$.
3. *Condicció de no dictadura*: cap individu és capaç d'imposar les seves preferències sobre les dels altres. Matemàticament: no existeix un i tal que per a tot (R_1, \dots, R_n) , si $xR_i y$ llavors xRy .
4. *Condicció de domini universal*: ha de contemplar totes les configuracions individuals de preferències completes i transitives.
A més s'assumeix que la configuració social de preferències ha de ser:
 5. *Completa*: donat qualsevol possible parell d'alternatives estipula quina alternativa és millor o que ambdues són igualment bones.
 6. *Transitiva*: si x és preferible a y i y preferible a z , llavors x és preferible a z .

Cap configuració social de preferències obtinguda mitjançant qualsevol procediment de votació satisfà conjuntament els anteriors requisits.

El 1952 el premi Nobel d'Economia, Paul Samuelson, declarà ([7, p. 215]): «A hores d'ara, els investigadors de tot el món —matemàtics, polítics, filòsofs, economistes— tracten d'aprendre el que poden de la inquietant descoberta d'Arrow, la qual representa per a la política matemàtica el que representava el teorema de Kurt Gödel de l'any 1931 sobre la impossibilitat de demostrar la consistència per a la lògica matemàtica». Richard G. Niemi i William H. Riker ens diuen que els estudis fets fins ara posen de manifest que es poden millorar els sistemes de votació però no n'existeix cap de perfecte.

Steven Brams a *Paradoxes in Politics* (Nova York: Free Press, 1976), resumeix els estudis recents sobre la probabilitat de la intransitivitat conjunta. És a dir, quina probabilitat hi ha que en una votació on els electors votin segons les seves primeres preferències entre diverses alternatives el resultat variï depenent de l'ordre de la votació per eliminar alternatives dos a dos.

En canvi a Ordeshook [12] li donen diferent algunes probabilitats. Els valors coincidents no els incloc en aquesta segona taula per tal que ressaltin les diferències. He afegit un interrogant a un valor que Ordeshook publica però que no em sembla que sigui correcte.

Exemple: suposem 3 votants (X, Y, Z) que han d'escollir una de 3 alternatives (x, y, z). Com que cada persona pot tenir 6 ordenacions en les seves preferències (preferir xyz —és a dir preferir x , i en la seva absència

Alternatives	Votants					
	3	5	7	9	11	∞
3	0,06	0,07	0,07	0,08	0,08	0,09
4	0,11	0,14	0,15	0,16	0,16	0,18
5	0,16	0,20	0,21	0,23	0,25	0,25
6	0,20	0,26	0,26	0,28	0,29	0,31
7	0,24	0,30	0,31	0,34	0,34	0,37
∞	1	1	1	1	1	1

TAULA 10: Probabilitat teòrica de donar-se una situació intransitiva conjunta segons Steven Brams a *Paradoxes in Politics*, 1976, segons [7].

Alternatives	Votants							
	3	5	7	9	11	25	49	∞
5				0,22	0,23	0,24	0,25	
6		0,25	0,27	0,28	0,23	0,30	0,31	
7		0,30	0,32					
8	0,27	0,33	0,36					0,41
49								0,84
∞	1	1	1	1	1	1	1	1

TAULA 11: Probabilitat teòrica de donar-se una situació intransitiva conjunta segons Ordeshook [12], diferent de les donades per Steven Brams.

y i en darrer cas z — o xzy , yxz , yzx , zxy o zyx), en total hi ha $(3!)^3$ possibles ordenacions en les preferències dels 3 votants. Es creen paradoxes ja que en 12 d'aquestes (per exemple: $X[xyz] - Y[yzx] - Z[zxy]$ o $X[xzy] - Y[zyx] - Z[yxz]$ o $X[xzy] - Y[yxz] - Z[zyx]$...) l'ordre d'eliminació d'alternatives afecta el resultat final. No hi ha paradoxes si tenim $X[xyz] - Y[xyz] - Z[xzy]$ o $X[xyz] - Y[yxz] - Z[xzy]$. Per exemple, en el cas $X[xyz] - Y[yzx] - Z[zxy]$ si els votants, X, Y, Z decideixen primer entre x o y els votants X i Z triaran x mentre que Y triarà y . Llavors quan hagin de triar entre x i z triaran z els votants Y i Z mentre que X triarà x . Per tant s'escull z a contracor de X . En canvi si X en la primera elecció tria y , sortirà y . I entre y i z sortirà y que sempre és millor per X a que surti z . Dit d'una altra manera, malgrat que les preferències de cada votant siguin transitives, les preferències del grup són intransitives. Aquesta situació es coneix com *la paradoxa de la votació* i va ser observada pel Marquès de Condorcet, filòsof i matemàtic francès del segle XVIII. També cridà l'atenció d'escriptors

del segle XIX com ara Lewis Carroll ([7, p. 224] i de Niemi i Riker ²⁷ 1976). Però Gordon Tullock²⁸ afirma que la paradoxa succeeix amb menys freqüència a la realitat del que seria d'esperar segons Arrow. Hi ha possibilitats il·lògiques si les alternatives són simètriques o es poden ordenar en un continu... És a dir, no sabem quina és la probabilitat amb la qual la paradoxa (la intransitivitat) es produeix en la realitat. Malgrat tot, és un cop molt dur per a la teoria democràtica el fet que es pugui donar.²⁹

8.2 Paradoxa d'Alabama

Paradoxa³⁰ consistent a assignar un nombre de representants inferior malgrat que la cambra augmenti. Aquesta paradoxa fou detectada el 25-10-1880 per C. W. Seaton, encarregat de l'oficina del cens d'Alabama, que va observar la possibilitat que, en les assignacions d'escons al Congrés d'EUA usant el mètode de Hamilton, l'estat d'Alabama rebria 8 representants en una cambra de 299 però només 7 en una de 300. El 1901 la majoria del Congrés volia una cambra de 357 escons. El representant de Colorado protestà en observar que si la cambra tingués qualsevol altre nombre d'escons entre 350 i 400 al seu estat li tocarien 3 escons en lloc dels 2 que obtenia amb una cambra de 357. L'estat de Maine també sortia perjudicat. Un dels seus representants declarà: «Sembla que la matemàtica i la ciència s'han confabulat [contra el meu estat]; Déu vos guard, estat de Maine, si caieu en mans de la matemàtica».

8.3 Tractat de Niça

Del 10 al 12 de desembre de 2000 es va celebrar a Niça una conferència dels representants dels governs dels estats membres de la Unió (15) que dugué a l'aprovació del Tractat de Niça. Aquest Tractat modifica el tractat de la Unió Europea i els tractats de les Comunitats Europees, així com el Protocol sobre l'ampliació de la Unió Europea. Fa les funcions de constitució de la Unió Europea.

8.4 Comissió Europea

Cambra formada en una Europa de 15 estats per un representant de cada estat amb un vot cada un excepte Alemanya, França, Regne Unit, Itàlia i Espanya que tenen 2 vots. En una Europa de 27 estats cada estat tindrà un representant amb un sol vot.

²⁷ Richard G. Niemi i William H. Riker, «The Choice of voting Systems», *Scientific American*, 234 (1976), p. 21-27.

²⁸ The General Irrelevance of the General Impossibility Theorem, *Quarterly Journal of Economics* (maig 1967), traduït com «La irrelevància general del teorema general de imposibilidad», a *Hacienda Pública Española*, 44 (1977).

²⁹ Otto A. Davis, Melvin J. Hinich i Peter C. Ordeshook, «An Expository Development of a Mathematical Model of the Electoral Process», a *American Political Science Review*, 64 (1970), p. 428-448

³⁰ Balinski i Young [2], 1975.

8.5 Majoria qualificada

Per aprovar un acord per majoria qualificada al Consell de Ministres de la Unió Europea, quan tingui 27 estats (345 vots), es necessitaran aquest tres requisits:

- 255 vots (73,91 %). Per tant es bloqueja l'aprovació amb 91 vots en contra.
- 14 estats a favor (18 si no és a proposta de la Comissió). Per tant poden bloquejar 14 o 10 estats respectivament.
- que no sigui bloquejada per països que representin el 38 % de la població. Curiosament aquesta clàusula només té sentit en 7 casos: Alemanya + França + Regne Unit (+Malta), Alemanya + França + Itàlia (+Malta), Alemanya + Regne Unit + Itàlia (+Malta), Alemanya + França + Espanya + Letònia.

9 Agraïments

A David Nualart, Cristina Villalba, Josep Pla pels seus comentaris, indicacions i paciència, i a la Biblioteca de Matemàtiques.

Referències

- [1] AUBET, M. J. *Ciudadanía y representatividad. Los sistemas electorales en Europa*. Edicions Bellaterra, 2000 (La Biblioteca del Ciudadano).
- [2] BALINSKI, M. L.; YOUNG, H. P. «The quota method of apportionment», *American Mathematical Monthly*, 82 (1975), 701-30.
- [3] BALINSKI, M. L.; YOUNG H. P. *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote..* 1982.
- [4] BOLGER, E. «Proportional representation». *Political and related models*, Editors: Steven J. Brams, William F. Lucas i Philip D. Straffin Jr. 1982.
- [5] DUBEY, P. «Some Results on Values of Finite an Infinite Games». *Technical Report, Center for Applied Mathematics, Cornell University*. Ithaca, New York 14833, 1975.
- [6] DUBEY, P. «On the Uniqueness of the Shapley Value». *International Journal of Game Theory*, 4 (1975), 131-140.
- [7] HOFMAN, P. *La revenja d'Arquimedes*. Ed. Moll, 1995. (scientia).
- [8] LUCAS, W. F. «Measuring Power in Weighted Voting Systems», «The Apportionment Problem». *Political and related models*, Editors: Steven J. Brams, William F. Lucas i Philip D. Straffin, Jr., 1982.
- [9] MARÓ-KLOSE, P. *Elección racional*. Ed. Centro de Investigaciones Sociológicas, 2000. (Cuadernos metodológicos; 29).
- [10] NIÇA, TRACTAT DE. *Conferència dels representants dels governs dels estats membres. Text provisional aprovat per la conferència Intergovernamen-*

tal sobre la reforma institucional pendent de revisió jurídicolingüística. Brusselles, 12-12-2000.

- [11] NUALART, D. «Las matemáticas en la actividad política». *Publicaciones del Congreso de los Diputados*, 2000.
- [12] ODERSHOOK, P. C. *Game Theory and Political Theory*. Cambridge University Press, 1986.
- [13] RICE, P. «Committee Decision Making». *Political and related models*. Editors: Steven J. Brams, William F. Lucas i Philip D. Straffin, Jr., 1982.
- [14] STRAFFIN, P. D., «Power Indices in Politics». *Political and related models*. Editors: Steven J. Brams, William F. Lucas i Philip D. Straffin, Jr., 1982.

PROFESSOR DE MATEMÀTIQUES
IES J. V. FOIX
RUBÍ
dpinol@pie.xtec.es