Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 16, núm. 2, 2001. Pàg. 91–120

Els sistemes de representació dels nombres reals (I)

Pelegrí Viader, Jaume Paradís, Joan Miralles de Imperial,
Lluís Bibiloni

1 Introducció

Aquest article té dues parts clarament diferenciades. Aquesta primera part té a veure amb la història dels sistemes de representació de nombres reals i vol recollir des dels intents de representar d'alguna manera nombres irracionals fins a sistemes de representació moderns que s'han descobert i estudiat sobretot durant el segle xx. La segona part, més relacionada amb les aplicacions, vol fer una ullada a aspectes més relacionats amb la sistematització moderna del tema i les seves connexions amb la probabilitat i la teoria ergòdica. Quan desenvolupem un nombre $x \in (0,1)$ en base decimal:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}, \tag{1}$$

considerem els enters positius $a_1, a_2, \ldots$ com els *dígits* de la representació. L'algorisme que ens permet obtenir-los és molt senzill d'explicitar, encara que moltes vegades no en siguem conscients quan l'utilitzem. De fet és la «divisió continuada» que ens ensenyaven a l'escola primària:

$$x_1 = x; \quad a_n = [10 \cdot x_n]; \quad x_{n+1} = 10 \cdot x_n - a_n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Com és habitual, amb $[y]$ denotem la part entera de y, és a dir, l'enter més gran entre els més petits o iguals que y. Els dígits, a_n, poden variar entre 0 i 9 i x_n, el *residu d'ordre* n, queda sempre comprès entre 0 i 1. Les convencions que tenim ens fan escriure $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$ i, d'aquesta manera, $x_n = 0.a_na_{n+1}\ldots$. El residu es pot, doncs, mirar com un desplaçament a la dreta respecte al residu anterior.

Si en la descripció que acabem de fer canviem la base 10 per la base 2 obtenim el sistema binari (o diàdic) i els dígits es limiten al 0 i a l'1. Si la base és un enter positiu b, el sistema és el sistema b-àdic i els dígits s'escullen entre $0, 1, 2, \ldots, b-1$.

Veurem, al llarg d'aquest article, com el fet de modificar lleugerament aquest procés iteratiu fa aparèixer diferents sistemes de representació.

Per exemple, per què ens hem de limitar a dividir per la mateixa base en cada iteració? Si anem canviant de base, ens trobem amb les sèries de Cantor (secció 7). Fins i tot, per què fer servir una base entera? Si, en comptes d'enters positius com a base, fem servir nombres reals més grans que 1 obtenim les curioses β-expansions que presenten propietats notables (secció 12).

Si canviem la funció «multiplicar per 10» per una funció adequada (creixent o decreixent) ens trobem amb les f-expansions de Rényi (secció 12), que, al seu torn, ja són un esforç de generalització d'altres generalitzacions. Si pensem que el procés decimal (1), en cada iteració col·loca el residu en un dels 10 intervals d'una partició de $(0, 1)$ i, en comptes de pensar en aquest tipus de partició tan uniforme de l'interval unitat, pensem en altres possibles maneres de particionar $(0, 1)$ i així anar *encaixant* els residus de cada iteració, obtenim altres desenvolupaments en sèrie que no són tan *evidents* (o potser hauríem de dir, *habituals*) com els de base fixa: els desenvolupaments de Sylvester (subsecció 9.1), els de Lüroth (subsecció 9.2), els d'Engel (subsecció 9.3), els d'Oppenheim (secció 10), etc., tots englobats sota el que es coneix com a (α, γ)-expansions (secció 11).

També podem pensar en representacions en sèrie alternada. De fet, tots els sistemes esmentats fa un moment tenen una contrapartida en sèrie alternada. Aquesta idea condueix a sistemes molt interessants (secció 13.1). De fet, però, tampoc cal treballar sempre amb sèries infinites. Podem substituir-les per productes infinits, i això és precisament el que va fer Cantor aprofitant una preciosa fórmula d'Euler (secció 8). Canviant una mica el *xip* de les sèries o els productes infinits, podem utilitzar funcions una mica més curioses que la iteració *ad infinitum* de sumes i productes. Això és el que es fa amb el que es podria denominar (des d'un determinat punt de vista) el rei dels sistemes de representació: les fraccions continuades[1] (secció 5). Aquí iterem la funció recíproc $(1/x)$. El resultat, un castell de trencats d'aquells que quan érem a l'escola ens feia tremolar, té propietats fantàstiques des del punt de vista de l'aproximació i ha produït un seguit de generalitzacions que han obert molts camps de recerca. Com a curiositat val la pena destacar el llibre de Claude Brezinsky, [7], que conté més de sis mil cites de llibres i articles relacionats amb les fraccions continuades. A la segona part de l'article (de propera aparició al Butlletí de la SCM) tractarem d'aspectes més profunds relacionats amb els sistemes de representació dels nombres reals. Sobretot tractarem del que es coneix com la *teoria mètrica* dels sistemes de representació. Hem de pensar que, a finals dels segle XIX i principis del XX, els sistemes de representació havien estat utilitzats, amb èxit, per generar funcions *patològiques*. La

1 Si cerqueu al *Diccionari de la Llengua Catalana* de l'IEC l'entrada *contínua*, hi trobareu com a accepció matemàtica *fracció contínua*. Creiem que es tracta d'una mala traducció de l'alemany *Kettenbruche* o de l'anglès *continued fraction*.

més coneguda és la famosa «escala de Cantor», o «escala del diable» com l'anomenen alguns autors anglosaxons. És un exemple de funció de l'interval unitat en si mateix, que té derivada 0 en un conjunt de mesura 1 i que no és constant. De fet, la funció és constant en el complementari del conjunt de Cantor, resultat de suprimir de $(0,1)$ tots els nombres que fan servir un 1 en el seu desenvolupament en base 3. L'autor de l'escala de Cantor és Lebesgue, que la descriu a [31, pàg. 56–57]. Lebesgue també és l'autor d'una funció força curiosa definida a través del sistema decimal. Concretament a [31, pàg. 97] descriu una funció discontínua en tots els punts del seu domini que té la propietat dels valors intermedis, és a dir, que si $f(a) < f(b)$ són dos valors de la funció, tot valor intermedi $f(a) < \alpha < f(b)$ també és assolit per f almenys un cop, és a dir, existeix almenys un c, $a < c < b$ tal que $f(c) = \alpha$. Durant bona part del segle XIX, aquesta propietat es creia equivalent a la continuïtat fins que Darboux, el 1875, va demostrar que no era així. Lebesgue hi aporta el contraexemple següent. Si $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$ en el sistema decimal, Lebesgue defineix $\varphi(x) = 0$ si la successió de decimals senars $\{a_{2i-1}\}$ no és periòdica, i

$$\varphi(x) = \frac{a_{2n}}{10} + \frac{a_{2n+2}}{10^2} + \frac{a_{2n+4}}{10^3} + \cdots$$

si la successió $\{a_{2i-1}\}$ és periòdica i el primer període comença a a_{2n-1}. La funció $\varphi(x)$ és clarament discontínua perquè pren tots els valors de $(0,1)$ en un interval tant petit com es vulgui i per aquest mateix motiu, si pren els valors a i b, pren també tots els valors intermedis. Van der Waerden, a [64] (també citat a [53, pàg. 4]), dóna un exemple senzill (el primer, més complicat, és de Weierstrass) de funció contínua no derivable enlloc. La funció en qüestió, definida a $[0,1)$, és la següent:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10^n x)}{10^n},$$

on (x) representa la distància de x a l'enter més pròxim. Fixem-nos que, si $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$, el numerador de la fracció del terme general de la sèrie no és res més que $0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\ldots$ quan $x \le 1/2$, i $1 - 0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\ldots$ quan $x > 1/2$. L'interès pels sistemes de representació va revifar-se quan el 1909 Borel publicà la seva famosa memòria *Sur les probabilités dénombrables et leurs applications aritmétiques*, [5]. En aquest treball Borel introdueix el concepte de *nombre normal* i demostra el teorema que porta el seu nom on afirma que «gairebé tots» els nombres són normals. «Gairebé tots» en el sentit habitual que tots ho són llevat dels nombres d'un conjunt de mesura 0.[2] El concepte de nombre normal de Borel es basa en la *freqüència* d'aparició dels dígits $0, 1, 2, \ldots, 9$ en el desenvolupament decimal d'un nombre. Un nombre $0.a_1a_2a_3\ldots$ és *simplement normal* en base 10 quan la freqüència relativa

2 El concepte de *conjunt de mesura 0* no requereix del concepte de mesurabilitat de Lebesgue. Es pot definir com aquell subconjunt de $\mathbb{R}$ que es pot recobrir per un sistema d'intervals de longitud total tan petita com es vulgui. Vegeu el mateix Lebesgue, [31, pàg. 28] o, per exemple, [53, pàg. 5].

d'aparició de qualsevol dígit $0, 1, 2, \dots, 9$ a la successió $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ tendeix a ser $1/10$, és a dir, si $A(k,N)$ denota el recompte de vegades que el dígit k apareix entre $a_1, \dots, a_N$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A(k,N)}{N} = \frac{1}{10}.$$

Un nombre és *normal* en base 10 quan la freqüència relativa d'aparició de qualsevol bloc de dígits $k_1k_2\dots k_r$ a la successió $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ tendeix a ser $1/10^r$, és a dir, si $A(k_1k_2\dots k_r, N)$ denota el recompte de vegades que el bloc $k_1k_2\dots k_r$ apareix a $a_1, \dots, a_N$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A(k_1k_2\dots k_r, N)}{N} = \frac{1}{10^r}.$$

És molt fàcil donar exemples de nombre no simplement normals (gairebé qualsevol racional) i de simplement normals que no són normals (el racional periòdic $0.\overbrace{0123456789}$), però no ho és tan de fàcil quan es tracta d'exhibir un nombre normal, malgrat que el teorema de Borel ens diu que gairebé tots els nombres ho són, de normals. Avui dia, encara ningú ha aconseguit demostrar la normalitat de $\sqrt{2}$ o π. Un exemple curiós de nombre normal en base 10 és el nombre decimal que té tots els naturals escrits un darrera l'altre:

$$0.1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\dots. \tag{2}$$

Podeu trobar la demostració del teorema de Borel i de la normalitat de (2) a [35, capítol 8] o a [21, capítol IX]. Podeu consultar també l'excel·lent llibre de Cilleruelo i Córdoba, [11, capítol 6], escrit en castellà. Un possible enfocament per demostrar el teorema de Borel passa per considerar els decimals d'un nombre real com una successió de variables aleatòries i demostrar que són independents i idènticament distribuïdes. Així se'ls pot aplicar algun dels teoremes coneguts com a *lleis fortes dels grans nombres* que, essencialment, asseguren la validesa, gairebé per tot, de comportaments «típics» de les variables aleatòries de la successió.[3] Aquest resultats són els que donen sentit a expressions com la següent: *si llancem moltes vegades una moneda, obtindrem aproximadament la meitat de cares i la meitat de creus*. Borel utilitza els dígits del sistema binari com a model de successió de variables aleatòries idènticament distribuïdes i això permet, per primera vegada, estudiar fenòmens com els que acabem de descriure des d'un punt de vista global. Tots aquests desenvolupaments van donar lloc, a principis del segle XX, a la *teoria mètrica* dels sistemes de representació. En paraules de Khintchine [25, pàg. 51–52]:

> [...] Els conjunts formats per nombres reals, però, es poden mirar des de diferents punts de vista i es poden comparar els uns amb els altres segons diverses propietats. Hom es pot preguntar sobre la seva

3 Una successió de variables aleatòries, $\{f_n\}$, verifica una *llei dels grans nombres* quan la successió de les seves mitjanes aritmètiques, $(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)/n$, convergeix en algun sentit. Si la convergència és en mesura, parlem d'una llei *feble*. Si la convergència és gairebé per tot, parlem d'una llei *forta*.

> potència, la seva mesura i una varietat d'altres característiques. La més interessant, tant pels mètodes emprats com pel resultat que es deriva del seu ús, és la *teoria mètrica*, que es pregunta sobre la mesura dels conjunts de nombres caracteritzats per una determinada propietat. La teoria resultant, que es pot anomenar *l'aritmètica mètrica del continu* ha estat a bastament estudiada en els últims temps [1935] i ha proporcionat molts resultats alhora simples i interessants. Com en qualsevol investigació sobre la naturalesa aritmètica dels nombres irracionals, l'aparell de les fraccions continuades és l'instrument més natural i millor per a la recerca.

Per tal de dur a terme, almenys en part, la tasca de determinar la mesura de certs conjunts caracteritzats per una determinada propietat, fent servir les fraccions continuades com a eina, Khintchine ha d'estudiar *des del punt de vista mètric* la mateixa eina que pensa utilitzar i, per tant, ha d'aprendre a determinar la mesura d'un determinat conjunt de nombres reals, la representació dels quals en fraccions continuades manifesta una o altra propietat aritmètica. Al mateix lloc ens diu:

> [...] Aquests problemes poden ser de diferents menes. Així, ens podem preguntar sobre la mesura del conjunt dels nombres reals pels quals $a_4 = 2$ o bé $q_{10} < 1000$ [vegeu la pàgina 99 per trobar definicions de a_n i q_n] o quins nombres tenen una successió fitada d'elements [a_n], o que entre els seus elements no s'hi trobi cap enter parell, etc. La totalitat de mètodes que serveixen per a la solució de problemes d'aquesta classe constitueix la *teoria mètrica de les fraccions continuades*.

Per acabar aquesta introducció citem, a tall d'exemple, un dels molts resultats sorprenents de la teoria mètrica que tractarem més a fons a la segona part. Khintchine, [25, pàg. 93], demostra el teorema següent:

TEOREMA *Per* $x \in (0,1]$ *sigui*

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

l'expressió en fracció continuada regular. Llavors, per a gairebé tots els x *de* $(0,1]$ *es compleix:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = K,$$

on $K = 2.6854\ldots$ *és una constant, independent de* x, *que es coneix com a constant de Khintchine.*

2 L'aproximació d'irracionals al llarg de la història

En una primera etapa de l'incipient pensament matemàtic, l'aritmètica dels nombres es reduïa als nombres naturals i aquests jugaven un paper vinculat al mateix llenguatge, [3, vol. I, pàg. 105–107]. Ben aviat aparegué la necessitat de fornir un sistema de numeració que permetés expressar qualsevol nombre natural a partir d'uns pocs símbols, [19]. La variabilitat de sistemes de numeració és enorme i la seva influència en el desenvolupament posterior de les matemàtiques és habitualment escassa i geogràficament local. Dels diferents sistemes més antics, cal esmentar el sexagesimal dels babilonis, que encara avui perdura en la mesura del temps i dels angles i, sobretot, el sistema posicional decimal d'origen hindú, àrab i que gradualment va anar generant el sistema que des del renaixement hem fet servir d'una forma unificada. Una bona colla de sistemes de numeració apareixen descrits a [27, pàg. 179–197]. També és molt antiga la noció de nombres trencats per expressar quantitats més petites que la unitat. Els egipcis empraren les fraccions unitàries per tal d'expressar qualsevol trencat mitjançant l'addició de subunitats ben delimitades. Es disposava de la noció de nombre trencat, però no es tenia un sistema unificat de representació d'aquests nombres a partir d'uns trencats ben definits. El fet que entre dos trencats a/b i c/d sempre es pogués trobar un trencat intermedi, ja sigui com a semisuma o més habitualment per la forma $\frac{a+c}{b+d}$, portà de forma gairebé natural i intuïtiva al concepte de *densitat* per a aquesta classe de nombres, cosa que va fer pensar que es podia expressar la mesura de qualsevol magnitud geomètrica mitjançant un trencat. El descobriment de l'escola pitagòrica que la diagonal del quadrat era inexpressable mitjançant el seu costat, va ser el que originà la primera gran crisi de les matemàtiques des del punt de vista dels seus fonaments o, millor diríem, de les seves intuïcions. Tot semblava indicar que hi havia magnituds incommensurables! Arribats a aquest punt les matemàtiques es geometritzaren i la teoria de les proporcions d'Eudox, que explica Euclides en el llibre V dels seus *Elements* (vegeu [22, pàg. 384–391] o [48]), resolgué momentàniament la crisi, i esdevenint el gran referent sobre el qual es construí la matemàtica grega: els *Elements*, les obres d'Apol·loni i sobretot d'Arquimedes foren desenvolupaments teòrics construïts sobre la base elaborada per Eudox. Però l'aritmètica pròpiament dita restà marginada d'aquest desenvolupament i l'obra tardana de Diofant apuntava més cap a un desenvolupament futur de la teoria de nombres que no pas a una aritmètica de representació dels nombres. Una qüestió que va quedar pendent i que no va ser massa desenvolupada per la civilització grega correspon als algorismes d'aproximació d'una magnitud irracional mitjançant racionals. Bé, això no és del tot cert atès que, ocasionalment, i sempre des d'un punt de vista particular, es cercaren aproximacions a magnituds irracionals tal com va fer Arquimedes en la mesura del cercle per aproximar el nombre π, [23, pàg. 50–56]. Però, en tot cas, no es cercaren metodologies generals per aproximar irracionals. Els irracionals quadràtics foren el gran banc de proves en la cerca d'algorismes d'aproximació. Aquesta pràctica es remunta als babilonis i als indis, va ser seguida pels àrabs i va arribar sota el guiatge de Leonard de Pisa —també conegut com Fibonacci— a l'occident prerenaixentista. Els algorismes d'aproximació no proporcionaren directament les bases d'un sistema de representació, però foren una fase inevitable per tal de preparar el terreny a la seva aparició.

3 El tractament dels irracionals quadràtics

Els babilonis utilitzaren ja a l'època d'Hammurabi (c. 1700 a. C.) la que nosaltres coneixem com a fórmula d'Heró per a aproximar arrels quadrades. Aquest fet no és especialment sorprenent ja que es recolza sobre una base geomètrica senzilla. La idea és la següent: si volem determinar el costat d'un quadrat d'àrea N partirem d'un rectangle de costats respectius a i N/a, amb l'única condició que $a < \sqrt{N}$. Tradicionalment es pren $a = [\sqrt{N}]$, però no és necessari. Anirem *quadrant* aquest rectangle a través de mitjanes aritmètiques i geomètriques alternativament, [34, pàg. 140–143]. És, però, en la matemàtica hindú on trobem els resultats més sorprenents pel que fa a l'estudi de les aproximacions dels irracionals quadràtics. No hem d'oblidar que va ser de l'Índia que els àrabs manllevaren la major part de les bases del que serien la seva aritmètica i la seva àlgebra, i que arribaren a Europa a través de la península Ibèrica i de la Mediterrània. Ja Brahmagupta (598–668) descrigué el mètode de determinar solucions de l'equació de Pell un cop coneguda una d'elles que veurem a continuació. Anomenem equació de Pell —Pell no va tenir res a veure amb aquesta equació, però Euler creia, equivocadament, que Wallis l'havia atribuït a Pell, vegeu [13, pàg. 33]— l'equació diofàntica:

$$x^2 - Ny^2 = c \tag{3}$$

o, en particular,

$$x^2 - Ny^2 = 1\,, \tag{4}$$

on N és un enter positiu donat, no quadrat perfecte. La determinació de valors enters o racionals de l'equació (4) ens permetrà determinar aproximacions de l'arrel quadrada de N. En efecte, suposem que (p, q) és una solució. Aleshores,

$$\sqrt{N} = \sqrt{\frac{p^2}{q^2} - \frac{1}{q^2}} \simeq \sqrt{\frac{p^2}{q^2}} = \frac{p}{q}\,.$$

Descriurem el mètode de Brahmagupta a partir d'un exemple. Sigui l'equació:

$$x^2 - 8y^2 = 1\,, \tag{5}$$

amb les solucions de la qual volem trobar aproximacions de $\sqrt{8}$. Observem que $(3, 1)$ és una solució de l'equació. El teorema —que Brahmagupta no demostra— és el següent:

1 Teorema *Si (p_1, q_1) i (p_2, q_2) són dues solucions enteres de l'equació (4), aleshores, $(p_1 \cdot p_2 + Nq_1 \cdot q_2\,,\ p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1)$ és una altra solució.*

Podem trobar una demostració del teorema a [42, pàg. 94–95]. Observem que el teorema no exigeix que les dues solucions siguin diferents. Per tant, un cop trobada una solució podem trobar-ne d'altres indefinidament. Si tornem al nostre exemple tindrem que, per simple observació, queda clar que $x = 3$,

$y = 1$ és una solució de l'equació (5). Per tant, aplicant el teorema 1, tindrem que

$$y = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6$$

i el corresponent valor de x, $x = 17$, són una nova solució de l'equació (5). A partir d'aquí podem trobar altres solucions, com ara $(99, 35)$, $(577, 204)$, $(3363, 1189)$, etc. Cadascuna d'aquestes solucions proporciona una aproximació de $\sqrt{8}$. Encara quedava pendent el problema de la determinació d'una solució de l'equació de Pell que, en exemples com l'anterior, queda obviat. Aquesta qüestió va ser analitzada a fons per Bhaskara (1114–1185). El seu mètode per a determinar una solució de l'equació de Pell és el que Dickson anomena *mètode cíclic*, [12], i que Edwards explica detalladament a [13, pàg. 25–33].

4 El primer sistema de representació: el sistema decimal

No seria fins a finals del segle XVI, quan aparegué per primera vegada la proposta d'ús d'un sistema de representació dels nombres trencats. Ens referim al sistema decimal. Dues grans qüestions van impulsar aquest procés. Per una banda les necessitats en l'àmbit mercantil d'unificar les unitats de mesura sota una mateixa base on fos fàcil realitzar les quatre operacions elementals de l'aritmètica. Per altra banda les mateixes necessitats de refinament del còmput en l'elaboració de taules trigonomètriques prou precises per a les finalitats de l'observació astronòmica i per a l'art de la navegació. Va ser l'any 1579 quan el gran matemàtic F. Vieta elaborà un tractat sobre trigonometria plana, *Canon Mathematicus seu ad triangula cum appendicibus*, que culminava amb la presentació d'unes noves taules trigonomètriques, [63], confegides sota l'esquema de l'ús dels nombres decimals. Però no fou fins sis anys més tard quan l'enginyer Simon Stevin publicà l'obra *De Thiende* (1585) en flamenc a Leyden, on, en format de llibret de 36 pàgines, s'exposava amb claredat el sistema decimal i les quatre regles operatives.[4] El mateix any se'n va fer una versió francesa, *La Disme*, i l'any 1608 aparegué la versió anglesa *Dime: The Art of Tenths*. Quan John Napier publicà l'any 1617 les seves taules logarítmiques expressades en base decimal, el procés d'unificació dels càlculs matemàtics en aquest sistema esdevingué irreversible. No s'ha abandonat aquesta pràctica fins als nostres dies. Cal fer encara una precisió per tal de no incórrer en inexactituds. De fet el sistema de representació decimal estava concebut i s'usava en el marc dels nombres trencats i el seu ús no es plantejava en el marc dels nombres reals. Cal tenir present que, en aquella època, el concepte de nombre real no tenia cap significació. Se sabia que els irracionals quadràtics es podien aproximar en tantes xifres decimals com hom volia, però mai no es considerava un nombre decimal amb la totalitat de les seves xifres decimals.

4 Per tal de fer-nos una idea de la intencionalitat de Stevin a l'editar aquest llibre res millor que les seves paraules que encapçalen l'escrit: *Als Astrònoms, Agrimensors, Mesuradors de Draps, Mesuradors de botes, Estereòmetres en general, Mestres de canvis i a tots els Mercaders [...].*

Dit d'una altra manera més comprensible, no s'havia assolit la idea de sèrie infinita, per més que la noció intuïtiva estava en l'ambient.[5] L'ús habitual de treballar amb expressions de sèries numèriques no arribaria fins a finals del segle XVII amb l'obra de Wallis i posteriorment de forma més sistemàtica i general amb els treballs d'Euler, que és quan es pot parlar plenament del sistema de representació decimal pels nombres reals, entenent que tot nombre real es pot expressar com una successió finita o infinita de dígits compresos entre el 0 i el 9. No és casual que fos el mateix Euler qui desenvolupés els primers estudis aritmètics de les propietats de les successions de dígits corresponents a les fraccions en el sistema decimal.

5 Les fraccions continuades

El sistema de representació dels nombres reals que ha jugat un paper central tant des del punt de vista de la història com des de la perspectiva de la teoria d'aproximacions, és, sense cap mena de dubte, el sistema de les fraccions continuades. Aquest tipus de representació permet expressar tot nombre real positiu x de la manera següent:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}, \tag{6}$$

on els a_i són enters positius. Aquesta expressió es por representar simbòlicament de la forma $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$. La característica més important d'aquest sistema de representació rau en la següent propietat: si trunquem el desenvolupament en qualsevol índex n, obtenim una fracció que s'anomena *reduïda* o *convergent* d'ordre n:

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n].$$

La reduïda p_n/q_n així obtinguda és una aproximació *òptima* del nombre x en el sentit que no hi ha cap fracció més propera a x que tingui un denominador més petit que q_n. En aquest cas es diu que p_n/q_n és una *aproximació òptima*

5 El mateix Vieta en l'escrit *Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VIII*, en la recerca d'un valor aproximat de π, troba l'expressió corresponent al primer producte infinit del qual es té notícia:

$$2/\pi = \prod_{i=1}^{\infty} \cos\left(\pi/2^{i+1}\right).$$

Aquesta fórmula de Vieta té connexions molt boniques amb una altra fórmula famosa: el producte infinit de Wallis (1655),

$$2/\pi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}.$$

Vegeu [40].

de x de primera espècie[6] (per a més detalls sobre aproximacions òptimes, consulteu [11, pàg. 153–163]). És precisament la propietat esmentada la que ha fet que les fraccions continuades juguessin un paper rellevant dins la teoria de nombres i, en particular, dins l'àmbit dels sistemes de representació. Els orígens de les fraccions continuades són quelcom imprecisos. Nogensmenys, podem afirmar que, en certa forma, l'algorisme d'aproximació d'arrels quadrades presentat per Chuquet en el seu manuscrit *La triparty en la science des nombres* de 1492, [10], obté implícitament totes les reduïdes que apareixen en el desenvolupament d'un nombre en fracció continuada. El mètode de Chuquet es sustenta en les successions de Farey per aproximar un nombre, és a dir, si tenim un α irracional entre 0 i 1, en primer lloc s'afita α entre dues fraccions unitàries consecutives $\frac{1}{n+1} < \alpha < \frac{1}{n}$ i, a continuació, s'intercala el racional que resulta de sumar numeradors i denominadors. S'examina de nou entre quines dues fraccions es torna a trobar α i es reitera successivament el procediment, d'aquesta manera aproximacions òptimes de l'irracional α. Així Chuquet troba una aproximació de $\sqrt{6}$ mitjançant el trencat $2+89/198$, tal que el seu quadrat difereix de 6 en la quantitat $1/39204$, i encara deixa escrit que si es segueix el procediment es troba una aproximació més bona corresponent a $2 + 881/1960$, el quadrat de la qual difereix de 6 en $1/3841600$. Per construcció, les dues aproximacions obtingudes per Chuquet són de tal naturalesa que la fracció resultant compleix l'equació de Pell associada $x^2 - 6y^2 = \pm 1$, prenent per x el numerador i per y el denominador. No deixa de ser curiós que, amb aquest precedent, s'establís a principis del segle XX un debat entre historiadors de la matemàtica sobre la forma en què el matemàtic Juan de Ortega, en el seu llibre *Tratado subtilissimo de Arismetica y Geometria* (1512), va obtenir unes aproximacions d'arrels quadrades tals que totes, llevat de dues, complien l'equació de Pell. En aquesta polèmica van participar Paul Tannery, Eneström i Rey Pastor, [52]. L'historiador espanyol va ser qui va argumentar que l'explicació més plausible era la de pensar que el mètode d'Ortega es basava en el procediment descrit en el manuscrit de Chuquet. El primer esquema de desenvolupament en fraccions continuades no ordinàries apareix a l'*Algebra* de Rafael Bombelli (1572). La idea de Bombelli per cercar aproximacions d'arrels quadrades era la següent: Si tenim $N = a^2 + r$, amb $r < 2a + 1$, llavors $\sqrt{N} = a + h$, on $h < 1$. Per trobar el valor de h fem el següent:

$$N = a^2 + 2ah + h^2 = a^2 + h(2a + h); \qquad h = \frac{r}{2a + h}\,.$$

Substituint indefinidament el valor de h en aquesta última expressió, obtenim l'estructura:

$$\sqrt{N} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \ddots}}\,.$$

6 Es demostra fàcilment que, per a tota reduïda p_n/q_n d'un nombre x, es compleix la fitació

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Només en els casos en què $r = 1$ s'obtenen fraccions continuades ordinàries. Aquest és el cas de $N = 2$, on obtenim:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}} \,.$$

Alguns historiadors esmenten l'obra de Cataldi com l'origen de les fraccions continuades, però, de fet, en el seu treball no trobem cap afegitó a allò expressat per Bombelli, llevat potser dels elements corresponents a una teoria de les fites d'error en els diferents algorismes d'aproximació que Cataldi duu a terme. No serà fins l'obra de Leonard Euler on trobem per primera vegada l'exposició dels sistema de fraccions continuades ordinàries i les seves propietats més importants. Presentem breument algunes de les propietats més interessants de les fraccions continuades (per a una exposició completa i entenedora, vegeu [36]; per a més detalls de tipus matemàtic, vegeu [21], [25], [55]):

- Si $x = [a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$, llavors la successió de reduïdes s'obté recorrentment de la forma següent:

$$\begin{cases} p_0 = a_0; \quad p_1 = a_0 a_1 + 1; \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (n \geq 2) \\[2ex] q_0 = 1; \quad q_1 = a_1; \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n \geq 2)\,. \end{cases}$$

-

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}} \,.$$

- Si $r_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$, llavors

$$x = \frac{p_{n-1} r_n + p_{n-2}}{q_{n-1} r_n + q_{n-2}} \qquad (n \geq 2)\,.$$

- x és racional si, i sols si, el desenvolupament és finit

$$x = [a_0; a_1, \dots, a_n]\,.$$

- Es dóna la duplicitat de representació pels racionals:

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = [a_0; a_1, \dots a_n - 1, 1]\,.$$

- x és un irracional quadràtic si, i sols si, el desenvolupament és infinit i periòdic

$$x = [a_0; a_1, \dots, a_r, \overbrace{a_{r+1}, \dots, a_n}]\,.$$

6 Diverses representacions fins a Lagrange

El primer matemàtic d'occident que va emprar una mena de sistema de representació per a quantitats numèriques vinculades a quantitats monetàries va ser Leonard de Pisa, qui en el seu llibre *Liber Abacci* empra el simbolisme següent per referir-se a la quantitat de *6 oncie, 5 dramme, i 1 scrupulo*:

$$\frac{6+\dfrac{5+\dfrac{1}{3}}{8}}{12}.$$

Aquesta disposició en forma de castell *ascendent* de fraccions va ser anomenada pel mateix Fibonacci com a *Fractiones in gradibus*, i la seva representació és equivalent a l'expressió:

$$\frac{6}{12}+\frac{5}{8\cdot 12}+\frac{1}{3\cdot 8\cdot 12}.$$

Segons Brezinski, [8], diversos matemàtics es van referir a les fraccions de Leonard de Pisa en els seus llibres d'aritmètica a la darreria del segle XVI. Aquest autor esmenta Christophorus Clavius (1583), Martin Wenceslaus (1599), que també és esmentat per l'historiador D. Smith a la seva *Rara Arithmetica*, i finalment es refereix a Cataldi, que defineix les fraccions continuades ascendents com *una quantitat escrita o proposada com una fracció de fraccions*. Posteriorment, Lambert, l'any 1770, [30], exposa aproximacions de π i el seu invers, citat i comentat a [6], mitjançant l'ús de fraccions unitàries multiplicatives amb signe positiu o negatiu segons s'obtingui una millor aproximació. D'aquesta forma troba els desenvolupaments que presentem a continuació a partir d'una d'aproximació de π trobada prèviament per Ludolph Van Ceulen:

$$\pi = 3+\frac{1}{7}-\frac{1}{7\cdot 313}-\frac{1}{7\cdot 313\cdot 4739}+\frac{1}{7\cdot 313\cdot 4739\cdot 47051}+\cdots,$$

i

$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 22}+\frac{1}{3\cdot 22\cdot 118}-\frac{1}{3\cdot 22\cdot 118\cdot 384}+\cdots.$$

El primer matemàtic que fa un intent seriós d'unificar i classificar en un únic sistema les diferents representacions que havien aparegut en escena és Lagrange en una memòria titulada *Essai d'analyse numérique sur la transformations des fractions*, [29]. El matemàtic francés exposa dos desenvolupaments generals per a aconseguir una sèrie numèrica basada en fraccions simples i que pugui ser aplicable a qualsevol fracció de partida (realment els algorismes associats a cada desenvolupament són aplicables a qualsevol nombre real):

$$\frac{B}{A}=\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_1x_2}+\frac{a_3}{x_1x_2x_3}+\cdots+\frac{a_n}{x_1\cdots x_n}+\frac{B_n}{Ax_1\cdots x_n}, \tag{7}$$

i

$$\frac{B}{A}=\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_1a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_1\cdots a_n}+\frac{B_n}{a_1\cdots a_n}, \tag{8}$$

on els a_i són enters donats, positius en el cas (7), i més grans que 1 en el cas (8). En els dos casos, $x_1, \dots, x_n$ són els valors enters positius que hem de trobar com a incògnites. Les representacions del tipus (8) condueixen als desenvolupaments polinómics posicionals equivalents al sistema decimal. Per altra banda, les representacions del tipus (7) engloben les fraccions de Lambert. En particular quan tenim $a_i = 1$ s'obtenen les sèries d'Engel i, si posem $a_i = (-1)^{i+1}$, obtenim les expansions de Pierce. Fem notar que el mateix Lagrange comenta la velocitat de convergència que s'obté pel cas de les fraccions de Lambert, i ens crida l'atenció que no obstant aquesta observació ningú es preocupés d'estudiar més a fons el tema de la convergència fins una època relativament tardana com veurem més endavant. Exposem un paràgraf extret de la memòria de Lagrange a manera de resum del contingut del seu assaig:

> Hem considerat el problema de la reducció de les fraccions a d'altres més simples, d'una manera general, i hem derivat d'un mateix principi la teoria de les fraccions decimals considerades en un sistema qualsevol de numeració; la teoria d'una altra mena de fraccions poc conegudes que Lambert va, crec, ser el primer a proposar i que tenen l'avantatge singular de formar successions més convergents que no pas qualsevol sèrie geomètrica, i, finalment, la teoria de les fraccions continuades, que, fins ara, sempre havia estat tractada de manera isolada.

Després de Lagrange, no sembla haver-hi massa interès cap a les fraccions de Lambert o fraccions ascendents. Segons Brezinski, [8], és en Joseph Puzyna qui l'any 1896 torna a treballar amb les fraccions de Lambert, però no serà fins a l'any 1911 quan Sierpiński, [58], demostrarà que tot nombre irracional del segment unitari pot expressar-se de forma única mitjançant una sèrie alternada de fraccions unitàries multiplicatives, les expansions de Pierce. Bortolotti, [6], esmenta un article de Polvani, [49, pàg. 253-254], on es fa un estudi en profunditat de les fraccions de Lambert. Nogensmenys, Polvani no s'adona de la unicitat dels desenvolupaments perquè té al pensament les fraccions ascendents arbitràries i no veu que els algorismes de desenvolupament en expansió de Pierce o en expansió d'Engel porten en ells mateixos les condicions que els fan únics. És precisament la manca d'unicitat la que fa que les fraccions ascendents passin desapercebudes durant la primera meitat del segle XX. L'única referència anterior que hem estat capaços de trobar és de l'any 1951 a [50], citat a peu de pàgina a [25, pàg. 21].[7] En aquest article, l'autor es refereix a unes breus notes del professor Ostrogradski contingudes a manuscrits datats poc temps abans de la seva mort el 1862. Les sèries de de Pierce i d'Engel hi apareixen descrites sense massa detalls.

7 Sembla que ni Gnedenko, responsable de la nota a peu de pàgina al llibre de Khintchine, ni el mateix Ostrogradski coneixien els treballs de Lambert i de Lagrange.

7 Les sèries de Cantor

Cantor, l'any 1869, [9], va generalitzar el sistema decimal o, per dir-ho millor, el sistema p-àdic. La generalització de Cantor és la següent. Si $a_1, a_2, \ldots,$ és una successió d'enters positius, tots més grans que 1, qualsevol nombre real $x \in (0,1]$ es pot expressar com:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{a_1 a_2 \cdots a_n}, \tag{9}$$

on els c_n són enters que compleixen $0 \le c_n < a_n$ per a tot n. La unicitat de la representació s'assegura exigint que $c_n < a_n - 1$ infinites vegades atès que, si a partir d'un determinat n_0, $c_n = a_n - 1$, es té que:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a_n - 1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{n_0-1}}.$$

L'algorisme que condueix a la representació (9) és el següent:

$$x_1 = x; \quad c_n = [a_n x_n]; \quad x_{n+1} = a_n x_n - c_n; \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Si la representació (9) és finita, és a dir, $c_n = 0$ per a $n \ge n_0$, el nombre x és òbviament racional. Ara bé, si existeixen infinits $c_n \ne 0$, el fet de decidir si x és racional o no és més complicat. Cantor hi va aportar el teorema següent:

2 Teorema *Si a la representació (9) del nombre real x, els $c_n \ne 0$ infinites vegades i per a tot N enter positiu, existeix n tal que $N | a_1 a_2 \cdots a_n$, llavors x és irracional.*

Oppenheim, [38], estén quelcom l'abast d'aquest teorema. Un cas especialment interessant de representació en sèrie de Cantor és aquell en què $a_n = n$. Els nombres reals queden representats de la forma:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \quad \text{amb } 0 \le c_n < n.$$

Concretament $e - 2 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots +$, de manera que, pel teorema 2, e és irracional. Una descripció alhora completa i entenedora la trobareu al llibre *Irrationalzhalen*, d'Oscar Perron, [46, pàg. 111–116], publicat el 1910 i que ofereix un repàs molt complet del tema dels irracionals en l'època. Un altre text que ofereix una bona exposició d'aquests temes és el llibret més modern (1967) d'Ivan Niven *Irrational Numbers*, [35].

8 Els productes de Cantor

Cantor, al mateix lloc citat abans, [9], va donar també una interessant representació del nombres reals en forma de producte infinit. A partir de la fórmula d'Euler

$$(1-x)\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+x^{2^i}\right)=1-x^{2^n},$$

que es demostra molt fàcilment per inducció, podem passar al límit quan $n \to \infty$ si $|x| < 1$:

$$\prod_{i=0}^{\infty}\left(1+x^{2^i}\right)=\frac{1}{1-x},\qquad (|x|<1).$$

Aquest resultat indueix Cantor a conjecturar i després demostrar que tot nombre real $x > 1$ es pot representar com

$$x=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right) \tag{10}$$

on els q_n són enters positius, no tots iguals a 1 i que compleixen les desigualtats $q_{n+1} \geq q_n^2$. De fet, x és racional si a partir d'un determinat n_0 es té que $q_{n+1} = q_n^2$ i, en cas contrari, x és irracional. L'algorisme que condueix a la representació (10) és el següent (recordem que $x > 1$):

$$x_0=x;\quad q_n=\left[\frac{x_n}{x_n-1}\right];\quad x_n=\left(1+\frac{1}{q_n}\right)x_{n+1};\qquad n=0,1,2,\ldots.$$

Una aplicació bonica d'aquesta representació la trobem a Perron, [46, pàg. 127], que la cita com una fórmula d'Engel: si $q > 1$, llavors

$$\sqrt{\frac{q+1}{q-1}}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)$$

amb $q_0 = q$ i $q_n = 2q_{n-1}^2 - 1$ per a $n = 1, 2, \ldots$. La convergència és molt ràpida. Per a $q = 3$ obtenim

$$\sqrt{2}\approx\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{17}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{577}\right)=\frac{816}{577}=1.41421\ldots.$$

Escott, [16], troba, seguint les idees del producte de Cantor, un algorisme de càlcul d'arrels quadrades que va ser modificat a [43]. La fórmula d'Escott és:

$$\sqrt{\frac{q+2}{q-2}}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2}{P_n}\right)$$

on $P_1 = q$ i $P_{n+1} = P_n(P_n^2 - 3)$. Aquesta fórmula d'Escott i la representació en producte de Cantor van ser generalitzades per Sierpiński, [59], i Oppenheim,

[37], de la forma:

$$x = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + \frac{n_i}{d_i}\right),$$

on els d_i són enters positius que satisfan

$$d_{i+1} > \frac{(d_i - 1)(d_i + n_i)n_{i+1}}{n_i}.$$

Altres representacions en producte infinit, encara que basades en les mateixes línies, es poden trobar a [41], o, més recentment, a [26].

9 Les sèries de Lüroth, Sylvester i Engel

Ja hem vist com a Fibonacci, Lambert i a Lagrange es troben les llavors de diferents representacions en sèrie. De fet, algunes d'aquestes es van fer explícites en els desenvolupaments següents (el llibre de Perron, [46, pàg. 116–122], és, novament, un bon referent per a aquestes representacions):

9.1 Sylvester

En un petit article, [60], Sylvester va *redescobrir* les sèries de Fibonacci i aquestes han passat a la literatura amb el seu nom. Un nombre real $x \in (0,1]$ es pot expressar de manera única com

$$x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \cdots, \tag{11}$$

on els q_n són enters positius que compleixen $q_1 \geq 2$ i $q_{n+1} \geq q_n(q_n - 1) + 1$. L'algorisme que condueix al desenvolupament (11) és:

$$x_1 = x; \quad q_n = 1 + \left[\frac{1}{x_n}\right]; \quad x_{n+1} = x_n - \frac{1}{q_n}; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Si a l'algorisme, subtituïm $1 + [1/x_n]$ per l'enter més petit d'entre els que són més grans o iguals a $1/x_n$, que podem denotar com $\lceil 1/x_n \rceil$, per a x racional l'algorisme acaba en un nombre finit de passes. Evidentment, en aquest cas, l'algorisme de Sylvester proporciona desenvolupaments de trencats en suma de fraccions egípcies. D'aquests algorismes n'hi ha força i encara presenten conjectures obertes molt interessants, però no són l'objecte d'aquest treball. En podeu trobar molta més informació a [15] o [20]. En el nostre cas, l'algorisme no acaba mai i es pot demostrar que si, a partir d'un determinat lloc, n_0, es té que per a $n \geq n_0$, $q_{n+1} = q_n(q_n - 1) + 1$, x és racional.

9.2 Lüroth

Una altra representació clàssica és la deguda a Lüroth, [33]: Un nombre real $x \in (0,1]$ es pot expressar de manera única com

$$x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1(q_1 - 1)q_2} + \frac{1}{q_1(q_1 - 1)q_2(q_2 - 1)q_3} + \cdots, \tag{12}$$

on els q_n són enters positius que compleixen $q_n \geq 2$. L'algorisme que condueix al desenvolupament (12) és:

$$x_1 = x; \quad q_n = 1 + \left[\frac{1}{x_n}\right]; \quad x_{n+1} = (q_n - 1)(q_n x_n - 1); \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Es pot veure fàcilment que si la successió q_n, a partir d'un determinat terme, és periòdica, x és racional.

9.3 Engel

Finalment, esmentem les sèries d'Engel: Un nombre real $x \in (0, 1]$ es pot expressar de manera única com

$$x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} + \cdots, \tag{13}$$

on els q_n són enters positius que compleixen $2 \leq q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \cdots$. L'algorisme que condueix al desenvolupament (13) és:

$$x_1 = x; \quad q_n = 1 + \left[\frac{1}{x_n}\right]; \quad x_{n+1} = q_n x_n - 1; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

En les sèries d'Engel el criteri de racionalitat és molt senzill: x és racional si, i només si, la successió q_n, a partir d'un determinat lloc, es fa estacionària, és a dir, $q_{n+1} = q_n$. La sèrie d'Engel subministra novament una demostració de la irracionalitat del número e, pel fet que el desenvolupament en sèrie d'Engel d'$e - 2$ és

$$e - 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

i els $q_n = n + 1$ formen una successió estrictament creixent.

10 Les expansions d'Oppenheim

Les tres sèries descrites més amunt es poden obtenir a partir d'un esquema general. Oppenheim, [39], engloba les representacions anteriors (i alguna més) en una de més general de la manera següent. Si $x > 0$ (no cal limitar-se a $(0, 1]$), i $\{a_n/b_n\}$ és una successió (més endavant veurem com es poden definir) de nombres positius i (normalment) racionals, considerem el desenvolupament:

$$x \sim \frac{1}{q_1} + \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{1}{q_2} + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} \cdot \frac{1}{q_3} + \cdots. \tag{14}$$

L'algorisme que proporciona el desenvolupament és el següent:

$$x_1 = x; \quad q_n = 1 + \left[\frac{1}{q_n}\right]; \quad x_n = \frac{1}{q_n} + \frac{a_n}{b_n} x_{n+1}; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Observem que si $a_n = b_n = 1$ obtenim una sèrie de Sylvester; per a $a_n = 1$; $b_n = q_n(q_n - 1)$, una sèrie de Lüroth; i per a $a_n = 1$; $b_n = q_n$, una sèrie d'Engel. Si $a_n = q_n + 1$; $b_n = q_n$ obtenim el producte de Cantor (10) de $1+x$. Oppenheim planteja quatre menes de problemes al voltant del desenvolupament en sèrie (14):

a) trobar condicions que assegurin que la sèrie és convergent i suma x;
b) trobar les condicions que l'algorisme imposa sobre els dígits $q_n \geq 1$. Una que es veu ràpidament és
$$q_{n+1} \geq \frac{a_n}{b_n} \cdot q_n(q_n - 1)\,;$$
c) trobar condicions necessàries i suficients per tal que la sèrie convergent (14) sigui l'expansió d'x mitjançant l'algorisme descrit. Una tal condició seria
$$q_{n+1} - 1 \geq \frac{a_n}{b_n} \cdot q_n(q_n - 1);$$
d) trobar les representacions dels x racionals.

Oppenheim demostra que si la sèrie $\sum_n (a_1 a_2 \cdots a_n)/(b_1 b_2 \cdots b_n)$ és divergent la sèrie (14) que s'obté d'aplicar l'algorisme sempre convergeix a x. En cas que $\sum_n (a_1 a_2 \cdots a_n)/(b_1 b_2 \cdots b_n)$ sigui convergent, calen condicions addicionals. Vegeu [39] per als detalls. Les representacions dels racionals són també un tema interessant. Hi ha casos en què són fàcils de determinar (com és el cas de les sèries d'Engel, Sylvester i Lüroth), però en altres ocasions el tema condueix a algun problema obert. Oppenheim deixa plantejada la conjectura que, per al cas $a_n = 1$; $b_n = 2$ i quan x és un racional $0 < x < 2$, a la representació
$$x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q_2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{q_3} + \cdots + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{q_3} + \cdots \qquad \left(q_{n+1} \geq \frac{1}{2}\, q_n(q_n - 1)\right),$$
es té que, a partir d'un determinat n_0, $q_{n+1} = \frac{1}{2}\, q_n(q_n - 1) + 1$. La conjectura encara no està demostrada. Us remetem al llibre de Galambos, [18, capítol II], per qüestions de racionalitat i irracionalitat en les sèries d'Oppenheim.

11 Les (α, γ)-expansions

Durant la mateixa època que Oppenheim donava a conèixer els seus treballs sobre respresentació en sèrie de nombres reals, Balkema, [1] (i prèviament Berg, [2]), havia proposat uns desenvolupaments en sèrie gairebé idèntics als d'Oppenheim. Podeu trobar-ne els detalls a [61, capítol 5]. Un altre esforç seriós d'arribar una mica més lluny i unificar els diferents sistemes de representació que hem exposat, va provenir de János Galambos els anys setanta, vegeu [18]. A partir d'estudiar i analitzar les diferents representacions en sèrie de nombres reals, Galambos acaba per determinar que, en molts dels casos coneguts, una representació s'obté a partir dels elements següents:

a) Una successió de funcions, $\alpha_j(n)$, $j = 1, 2, \ldots$, de variable n enter positiu, estrictament decreixents i tals que, per a tot j, $\alpha_j(1) = 1$ i $\alpha_j(n) \to 0$ per a $n \to \infty$. (Per fixar les idees, en el cas d'Engel, $\alpha_j(n) = 1/n$, per a tot j.)

b) Una segona successió de funcions $\gamma_j(n)$, $j = 1, 2, \ldots$, positives i amb la propietat que, per a $n \geq 2$

$$\alpha_j(n-1) - \alpha_j(n) \leq \gamma_j(n)\,. \tag{15}$$

c) Un algorisme de desenvolupament. Per a $x \in (0, 1]$, trobem una successió d'enters positius $q_n = q_n(x)$ i una successió de reals, x_n, definits per:

$$x_1 = x; \quad \alpha_j(q_j) < x_j \leq \alpha_j(q_j - 1); \quad x_{j+1} = \frac{x_j - \alpha_j(q_j)}{\gamma_j(q_j)}; \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Com que, per a tot j, $0 < x_j \leq 1$, l'algorisme que acabem de descriure no acaba mai i, per a un $x \in (0, 1]$, obtenim la sèrie:

$$\begin{aligned} y(x) = {} & \alpha_1(q_1) + \gamma_1(q_1)\alpha_2(q_2) + \\ & \gamma_1(q_1)\gamma_2(q_2)\alpha_3(q_3) + \gamma_1(q_1)\gamma_2(q_2)\gamma_3(q_3)\alpha_4(q_4) + \cdots . \end{aligned} \tag{16}$$

Aquesta sèrie infinita s'anomena la (α, γ)-expansió d'x i es fàcil de veure que (16) sempre convergeix a un valor $y(x)$ tal que $0 < y(x) \leq x$. Val a dir que hi ha casos en què $y(x) < x$, [61, pàg. 101], però Galambos mostra una condició suficient prou senzilla per assegurar $y(x) = x$: que existeixi una constant $C \in (0, 1)$ tal que, per a tot j i per a tot n, $\gamma_j(n) < C$. Se'n poden trobar de menys restrictives, però més complicades. Per posar un exemple d'(α, γ)-expansió, el cas $\alpha_j(n) = 1/n$ i $\gamma_j(n) = a_n/b_n$ porta a les sèries d'Oppenheim. En totes aquestes representacions, en cas d'unicitat, un nombre real x queda representat per una successió de *dígits*, $\{q_n\}$. Ens podem preguntar el problema invers: per a un sistema de representació concret, quan un conjunt (finit o infinit) d'enters positius, $\{q_n\}$, pot correspondre al desenvolupament d'un x concret? Galambos introdueix l'interessant concepte d'***admissibilitat***. Una N-upla d'enters positius $(k_1, k_2, \ldots, k_N)$ es diu que és *admissible* respecte d'una (α, γ)-expansió quan existeixi almenys un $x \in (0, 1]$ tal que $q_i(x) = k_i$ per a $i = 1, 2, \ldots, N$. Una successió infinita $\{k_1, k_2, \ldots, k_N, \ldots\}$ és admissible quan per a tot N, $(k_1, k_2, \ldots, k_N)$ ho és. Donada una N-upla admissible de dígits, $(k_1, k_2, \ldots, k_N)$, el conjunt

$$B(k_1, \ldots, k_N) = \{x \in (0, 1] : q_1(x) = k_1, \ldots, q_N(x) = k_N\}$$

s'anomena un *cilindre d'ordre N*. Dintre un determinat sistema de representació, una N-upla de dígits, $(k_1, k_2, \ldots, k_N)$, és admissible quan el corresponent cilindre $B(k_1, \ldots, k_N)$ és diferent del buit. És fàcil demostrar que els cilindres sempre són intervals i, de fet, són la base per determinar la mesura de conjunts definits a través de les propietats dels dígits dels seus elements, en la línia dels problemes que Khintchine comentava a les cites de la pàgina 94. El problema d'esbrinar quan una successió de dígits és admissible o no per a una determinada (α, γ)-expansió, no és trivial. A més, una successió pot ser perfectament admissible per un sistema i no ser-ho per un altre. Pensem en la successió de tots els primers, $\{p_1, p_2, \ldots\}$. És una successió admissible com a sèrie d'Engel, atés que compleix la condició d'admissibilitat de les expansions d'Engel: $q_{n+1} \geq q_n$, però no és admissible com a sèrie de Sylvester, atès que no compleix $q_{n+1} \geq q_n(q_n - 1) + 1$. El problema de, donada una determinada succesió, $\{q_n\}$, arribar a deduir el sistema de representació del qual prové, no té tampoc, en general, solució fàcil, com veurem a la segona part d'aquest article.

12 f-expansions, β-expansions i altres desenvolupaments

Hem vist com hi ha hagut diversos intents de generalitzar i englobar en una única descripció els diferents sistemes de representació que fins ara hem descrit. Oppenheim, Balkema i las (α, γ)-expansions són una bona manera d'unificar les representacions en sèries de termes positius. No poden, però, englobar directament les representacions en sèries alternades ni les fraccions continuades. Un intent en aquest sentit va venir donat per les f-expansions. Everett, [17], va generalitzar les expansions decimals estudiant l'algorisme que les genera i generalitzant-lo. Donat un enter positiu $p \geq 2$, Everett considera una funció contínua estrictament creixent, $f(t)$, definida a $[0, p]$ de manera que $f(0) = 0; f(p) = 1$. Per un nombre real $x \geq 0$, construeix una successió de dígits, $c_0, c_1, \ldots$, tots ells enters no negatius complint $0 \leq c_n \leq p - 1$ a través de l'algorisme següent:

$$x_0 = x; \quad c_n = [x_n]; \quad x_{n+1} = f^{-1}(x_n - c_n).$$

Everett estudia condicions suficients per tal que la relació entre x i la successió de dígits $\{c_n\}$, sigui bijectiva. La generalització d'Everett es limita a reproduir l'algorisme que proporciona l'expansió decimal d'un nombre real substituint la funció $t/10$ per una *qualsevol*. Bissinger, [4], va fer el mateix que Everett, però intentant generalitzar les fraccions continuades. Una fracció continuada regular,

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}},$$

pot pensar-se com el resultat d'iterar indefinidament la funció $f(t) = 1/t$ de la forma

$$f(a_1 + f(a_2 + f(a_3 + \cdots))), \tag{17}$$

on els a_n són enters positius. Si subtituïm $1/t$ per una funció $f(t)$ estrictament decreixent definida per $t > 1$ de manera que $f(1) = 1$ i $f(\infty) = 0$, podem estudiar condicions sobre f que assegurin que, efectivament, (17) representarà el nombre real $x \in (0,1]$ amb un algorisme com el de les fraccions continuades:

$$x_0 = f^{-1}(x); \quad a_{n+1} = [x_n]; \quad x_{n+1} = f^{-1}(x_n - a_{n+1}); \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Ambdues generalitzacions van ser estudiades per A. Rényi, [51], que les va englobar en una sola descripció: les f-expansions. Una f-expansió d'un nombre real x és una successió d'enters positius $\{\varepsilon_n\}$ definida de la manera següent:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= [x]; & r_0(x) &= \{x\} \\ \varepsilon_{n+1}(x) &= [f^{-1}(r_n(x))]; & r_{n+1}(x) &= \{f^{-1}(r_n(x)\}; \quad n = 0,1,2,\ldots, \end{aligned}$$

on $\{z\}$ denota la part fraccionària de z. Un nombre real x es diu que té una f-expansió per una funció f donada si, o bé $r_n(x) = 0$ per a algun n de manera que la f-expansió és finita i acaba amb ε_n, o bé la successió $\{F_n(0)\}$ convergeix a x. $F_n(y)$ es defineix com segueix:

$$F_0(y) = y; \qquad F_n(y) = F_{n-1}(\varepsilon_{n-1}(x) + f(\varepsilon_n(x) + y)), \qquad n = 1,2,\ldots.$$

Aquesta última afirmació s'acostuma a escriure així:

$$x = \varepsilon_0 + f(\varepsilon_1 + f(\varepsilon_2 + f(\varepsilon_3 + \cdots)\cdots)).$$

Quan $f(t) = t/q$, la f-expansió és, òbviament, el sistema q-àdic ($q = 2,3,\ldots$). Si $f(t) = 1/t$, la f-expansió es redueix a les fraccions continuades. Parry, [45], va millorar substancialment els resultats de Rényi quant a les condicions que havia de complir la funció f per a aconseguir f-expansions vàlides. Un cas particularment interessant de f-expansió és aquell en què $f(t) = t/\beta$, on $\beta > 1$ és un nombre *real*, no necessàriament enter. Els dígits de la representació són llavors triats entre $0,1,2,\ldots,[\beta]$ i

$$x = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \frac{\varepsilon_3}{\beta^3} + \cdots$$

Aquestes representacions es coneixen com a representacions β-àdiques o també com a β-expansions. Malgrat que són generalitzacions força directes del sistema decimal, el fet que la base, β, no sigui entera, provoca situacions molt interessants. L'article d'Eggan i Vanden Eynden, [14], estudia a fons les conseqüències que β sigui o no racional i altres peculiaritats. Com a curiositat podem esmentar que, si $\beta = (1+\sqrt{5})/2$, el nombre d'or, el nombre $1/\beta$ té infinites β-expansions finites:

$$\frac{1}{\beta} = 0,1 = 0,011 = 0,01011 = \cdots.$$

En canvi, si β és racional, es pot demostrar que un nombre té, com a molt, una β-expansió periòdica, però la determinació dels nombres que tenen expansió periòdica no és gens trivial de resoldre. Com ja hem comentat abans, les qüestions de racionalitat o irracionalitat lligades als diversos sistemes de representació poden ser embolicades. Us remetem novament al capítol II del llibre de Galambos, [18]. Val a dir que els sistemes de representació que hem citat fins ara no esgoten les possibilitats de representació d'un nombre real. Ja hem vist abans com Vieta havia aconseguit representar $2/\pi$ com un producte de cosinus:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right),$$

que, malgrat que només sigui una representació puntual, obre la porta a possibilitats interessants. Concretament, un algorisme de representació basat en funcions trigonomètriques va ser proposat, el 1938, per Lehmer, [32]:

$$x = \cot\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{arcot} k_n\right),$$

on els k_n són enters positius que compleixen $k_{n+1} \geq k_n(k_n + 1) + 1$, que ens recorden molt les condicions d'admissibilitat de les sèries de Sylvester. Més endavant, a la segona part d'aquest article, veurem que això no és tanta casualitat. En el terreny de les fraccions continuades, les variants, respecte a les regulars són legió. En citem algunes tot remetent-vos al llibre de Brezinsky, [7], on trobareu, com ja hem comentat, més de sis mil referències sobre el tema.[8] Els interessats en la història de las fraccions continuades poden veure també [8]. També podem pensar a representar els nombres reals com a fraccions continuades no regulars, és a dir, de la forma

$$x = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}}$$

on $\{b_n\}$ és una succesió *donada* d'enters positius. O bé en forma d'arrel niuada:

$$x = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_1 + \sqrt[3]{a_2 + \sqrt[4]{a_3 + \ddots}}}\ .$$

Ni les (α, γ)-expansions de Galambos ni les f-expansions de Rényi, no cobreixen aquests tipus de representacions. Per estudiar-les, Krabill i Reichaw, [28], introdueixen una generalització de les f-expansions: les f_n-expansions, on la funció f no ha de ser la mateixa en cada iteració, sinó que pot anar canviant.

8 Per donar els noms d'algunes de les variants esmentades, existeixen fraccions continuades: a l'enter més pròxim; ascendents; amb quocients parcials parells o imparells; de Hirzebruch; japoneses tipus I; japoneses tipus II; λ-fraccions; etc.

13 Un enfocament interessant

En general, una manera de plantejar la qüestió de la representació d'un nombre real $x \in (0,1)$ és la següent:

$$(0,1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} \right),$$

i la unió és disjunta. Existirà, doncs, un únic enter positiu, a_1, tal que

$$\frac{1}{a_1} \leq x < \frac{1}{a_1 - 1}. \tag{18}$$

Podrem, doncs, trobar un $\lambda_1,\ 0 \leq \lambda_1 < 1$, tal que

$$x = \frac{1}{a_1} + \lambda_1 \cdot \frac{1}{a_1(a_1-1)}. \tag{19}$$

Tenint ara en compte que λ_1 torna a estar entre 0 i 1, tenim diverses possibilitats d'actuació tot iterant el procediment:

- **Lüroth** Si fem $x_1 = \lambda_1$, i apliquem a x_1 el mateix procediment, obtenim un a_2 tal que

  $$\frac{1}{a_2} \leq x_1 < \frac{1}{a_2 - 1},$$

  i, per tant, existeix un $\lambda_2,\ 0 \leq \lambda_2 < 1$, tal que

  $$x = \frac{1}{a_1} + \left(\frac{1}{a_2} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{a_2(a_2-1)} \right) \cdot \frac{1}{a_1(a_1-1)},$$

  o sigui,

  $$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1(a_1-1)a_2} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{a_1(a_1-1)a_2(a_2-1)}.$$

  Continuant la iteració obtenim, evidentment, una sèrie de Lüroth.

- **Engel** Si fem $x_1 = \dfrac{\lambda_1}{a_1 - 1}$, tenim $x_1 < \dfrac{1}{a_1 - 1}$ i trobem un $a_2 \geq a_1$ tal que

  $$\frac{1}{a_2} \leq x_1 < \frac{1}{a_2 - 1},$$

  i, com abans, existeix un $\lambda_2,\ 0 \leq \lambda_2 < 1$, tal que

  $$x = \frac{1}{a_1} + \left(\frac{1}{a_2} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{a_2(a_2-1)} \right) \cdot \frac{1}{a_1},$$

  o sigui,

  $$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{a_1 a_2(a_2-1)},$$

  que ens condueix, òbviament, a una sèrie d'Engel.

- **Sylvester** Finalment, si $x_1 = \dfrac{\lambda_1}{a_1(a_1-1)}$, tenim $x_1 < \dfrac{1}{a_1(a_1-1)}$ i trobem un $a_2 \geq a_1(a_1-1)+1$ tal que
$$\frac{1}{a_2} \leq x_1 < \frac{1}{a_2-1},$$
i un $\lambda_2,\ 0 \leq \lambda_2 < 1$, tal que
$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{a_2(a_2-1)},$$
corresponent a una sèrie de Sylvester.

Allò que té d'interessant aquest enfocament és que el mateix esquema conceptual és aplicable per a l'obtenció de desenvolupaments en sèrie alternada.

13.1 Les sèries alternades

Si a (18), en comptes d'agafar l'extrem inferior de l'interval $(1/n, 1/(n-1))$ on x s'encabeix, agafem l'extrem superior, obtenim també un desenvolupament en sèrie, en aquest cas, alternada:
$$(0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right],$$
i la unió és disjunta. Existirà, doncs, un únic enter positiu, a_1, tal que
$$\frac{1}{a_1+1} < x \leq \frac{1}{a_1}.$$
Podrem, doncs, trobar un $\lambda_1,\ 0 \leq \lambda_1 < 1$, tal que
$$x = \frac{1}{a_1} - \lambda_1 \cdot \frac{1}{a_1(a_1+1)}. \tag{20}$$
Tenint ara en compte que λ_1 torna a estar entre 0 i 1, tenim diverses possibilitats d'actuació tot iterant el procediment:

- **Lüroth alternada** Si fem $x_1 = \lambda_1$, i apliquem a x_1 el mateix procediment, obtenim un a_2 tal que
$$\frac{1}{a_2+1} \leq x_1 < \frac{1}{a_2},$$
i, per tant, existeix un $\lambda_2,\ 0 \leq \lambda_2 < 1$, tal que
$$x = \frac{1}{a_1} - \left(\frac{1}{a_2} - \lambda_2 \cdot \frac{1}{a_2(a_2+1)}\right) \cdot \frac{1}{a_1(a_1+1)},$$
o sigui,
$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)}.$$

Continuant la iteració obtenim les sèries de Lüroth alternades. Aquests desenvolupaments van ser estudiats per Kalpazidou, Knopfmacher i Knopfmacher a [24].

- **Engel alternada-modificada** Si fem $x_1 = \dfrac{\lambda_1}{a_1}$, tenim $x_1 < \dfrac{1}{a_1}$ i trobem un $a_2 \geq a_1$ tal que
$$\frac{1}{a_2+1} \leq x_1 < \frac{1}{a_2},$$
i, com abans, existeix un $\lambda_2,\ 0 \leq \lambda_2 < 1$, tal que
$$x = \frac{1}{a_1} - \left(\frac{1}{a_2} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{a_2(a_2+1)}\right) \cdot \frac{1}{a_1+1},$$
o sigui,
$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{(a_1+1)a_2} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{(a_1+1)a_2(a_2+1)},$$
desenvolupament que, novament a [24], es bateja com a sèrie d'Engel alternada-modificada.
- **Sylvester alternada** Si ara fem $x_1 = \dfrac{\lambda_1}{a_1(a_1+1)}$, tenim $x_1 < \dfrac{1}{a_1(a_1+1)}$ i trobem un $a_2 \geq a_1(a_1+1)$ tal que
$$\frac{1}{a_2+1} \leq x_1 < \frac{1}{a_2},$$
i un $\lambda_2,\ 0 \leq \lambda_2 < 1$, tal que
$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{a_2(a_2+1)},$$
que condueix a una sèrie de Sylvester alternada; vegeu novament [24].
- **Pierce** Finalment, si fem $x_1 = \dfrac{\lambda_1}{a_1+1}$, tenim $x_1 < \dfrac{1}{a_1+1}$ i trobem un $a_2 \geq a_1+1$ tal que
$$\frac{1}{a_2+1} \leq x_1 < \frac{1}{a_2},$$
i, com abans, existeix un $\lambda_2,\ 0 \leq \lambda_2 < 1$, tal que
$$x = \frac{1}{a_1} - \left(\frac{1}{a_2} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{a_2(a_2+1)}\right) \cdot \frac{1}{a_1},$$
o sigui,
$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{a_1 a_2(a_2+1)},$$
desenvolupament que es coneix com a Engel alternat o, més amb nom propi, sèrie de Pierce. Aquests desenvolupaments van ser estudiats originalment per Sierpiński, [58], i més endavant per Pierce, [47], i Shallit, [57]. Dos articles divertits, que apliquen les expansions de Pierce al problema de la determinació dels anys de traspàs i a la resolució del problema de les n portes respectivament, són [56] i [44].

14 Algunes consideracions finals

Com a punt final d'aquesta part, i com a indicació per a futures investigacions, esmentem que encara existeix una altra possibilitat en l'esquema de la secció 13. En comptes de triar sistemàticament l'extrem inferior o superior de l'interval $(1/n, 1/(n-1))$ on x_i s'encabeix, triem aquell més proper a x_i en cada iteració; obtenim tota una colla d'expansions noves, amb signes + i −, que podem anomenar *sistemes a l'enter més pròxim*. Cap d'aquests sistemes de representació està estudiat des del punt de vista mètric. Sí, però, que s'han treballat les fraccions continuades a l'enter més pròxim, [54], que poden donar una idea de les dificultats amb les quals ens podem ensopegar. Des d'un altre punt de vista, fins a quin punt els diferents sistemes de representació amaguen sorpreses pel que fa a l'anàlisi de funcions? Si prenem el sistema de fraccions continuades, llavors un x de l'interval unitari pot representar-se com una successió d'enters positius sense cap restricció, llevat de les successions finites a les quals s'exigeix que no acabin en 1 per assegurar la unicitat. Si, per altra banda, prenem les sèries alternades de Lüroth, ens trobem exactament amb la mateixa formulació: qualsevol successió d'enters positius és admissible i les successions finites se'ls exigeix que no acabin en 1. Doncs bé, podem construir una funció de $[0,1]$ en $[0,1]$ fent intervenir els dos sistemes de representació de la forma següent: si

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}},$$

definim

$$f(x) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)a_3} + \cdots.$$

Ens trobem amb el fet que la funció $f(x)$ és contínua i estrictament creixent, però la seva derivada és nul·la en un conjunt de mesura 1. Es tracta, doncs, d'una funció singular, per cert nova en la literatura sobre el tema i, per tant, amb propietats que encara no han estat analitzades amb detall. Una mostra de tot això la podeu trobar a [62] amb referència a la funció $?(x)$ de Minkowski.

Referències

[1] Balkema, A. A. *Hoofdstuk V, Seminarium Getal en Kans 1967/68*. Amsterdam: Matematisch Institut, 1968.

[2] Berg, L. «Allgemeine Kriterien zur Massbestimmung linearer Punktmengen». *Math. Nachr.*, 14 (1955), 263–285 (1956).

[3] Bernal, J. D. *Historia Social de la Ciencia*. Barcelona: Ed. Península, 1968, 2 vols. 1a edició 1954.

[4] Bissinger, B. H. «A generalization of continued fractions», *Bull. Amer. Math. Soc.* 50 (1944), 868–876.

[5] Borel, E. «Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arit-métiques». Circ. Mat. Palermo 25 (1909), 247–271.

[6] Bortolotti, E. *Il calcolo delle unità frazionarie presso gli antichi egizi e le frazioni continue ascendenti.* Bologna: Coop. Tipografica Azzoguidi, 1932. Memòria llegida a l'Academia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 10 de gener de 1932.

[7] Brezinski, C. *A bibliography on continued fractions, Padé approximation, sequence transformation and related subjects.* Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza, 1991.

[8] Brezinski, C. *History of continued fractions and Padé approximants.* Berlín: Springer-Verlag, 1991.

[9] Cantor, G. «Über die einfachen Zahlensysteme». *Zeit. für Math.*, 14 (1869), 121–128.

[10] Chuquet, N. «Le Triparty en la science des nombres». Boncompagni, Itàlia, 1880–1881. Editat per A. Marre en el *Bullettino di Bibliografia d'Historia delle Scienze Mathematiche e Fisiche*, vol. xiii (1880), 555-659, 693–814; vol. xiv (1881), 413–460.

[11] Cilleruelo, J.; Córdoba, A. *La teoría de los números*, Madrid: Mondadori, 1992.

[12] Dickson, L. E. *History of the theory of numbers.* Nova York: Chelsea Publishing Company, 1992, 1a edició de 1919.

[13] Edwards, H. M. *Fermat's last Theorem. A genetic introduction to algebraic number theory.* Nova York: Springer–Verlag, 1977.

[14] Eggan, L. C., Vanden Eyden, C. L. «Decimal expansions to nonintegral bases». *Amer. Math. Monthly*, 73 (1966), 576–582.

[15] Eppstein, D. *Ten Algorithms for Egyptian Fractions. Mathematica in Education and Research* 4 (1995), núm. 2, 5–15. Consulteu també la pàgina web http://www.ics.uci.edu/~eppstein/numth/egypt/.

[16] Escott, E. B. «Rapid method for extracting a square root». *Amer. Math. Monthly*, 44 (1937), 644–646.

[17] Everett, C. J. «Representations for real numbers». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 861–869.

[18] Galambos, J. *Representations of real numbers by infinite series.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 502. Berlín: Springer-Verlag, 1976.

[19] Guitel, G. *Histoire comparée des numérations écrites.* París: Flammarion, 1975.

[20] Guy, R. K. *Unsolved problems in number theory.* Nova York: Springer-Verlag, 2a edició, 1994.

[21] Hardy, G. H.; Wright, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford: Oxford University Press, 5a edició, 1979.

[22] Heath, T. *A history of Greek mathematics. Vol. I.* Nova York: Dover Publications Inc., 1981. From Thales to Euclid, reimpressió corregida de l'original de 1921.

[23] Heath, T. *A history of Greek mathematics. Vol. II.* Nova York: Dover Publications Inc., 1981. From Aristarchus to Diophantus, reimpressió corregida de l'original de 1921.

[24] Kalpazidou, S.; Knopfmacher, A.; Knopfmacher, J. «Lüroth-type alternating series representations for real numbers». *Acta Arith.*, 55 (1990), núm. 4, 311–322.

[25] Khinchin, A. Ya. *Continued Fractions.* Nova York: Dover Publications, Inc., Mineola, 1997 [originalment publicat el 1935 en rus.]

[26] Knopfmacher, A.; Knopfmacher, J. «A New Infinite Product Representation for Real Numbers». *Mh. Math.*, 104 (1987), 29–44.

[27] Knuth, D. E. *Seminumerical algorithms.* 2a edició, The Art of Computer Programming, vol. 2. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1981.

[28] Krabill, D., Reichaw, M. «Expansions of real numbers relative to a sequence of functions», *SIAM J. Numer. Anal.* 11 (1974), 75–86.

[29] Lagrange, J. L. «Essai d'analyse numérique sur la transformation des fractions». *Journal de l'École Polytechnique* Math Annale, volum 5è, tom II (prairial, an VI). També a *Oeuvres*, ed. J. A. Serret, tom vii, secció 4a, pàg. 291–313.

[30] Lambert, J. H. *Verwandlung der Brüche, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, vol. 2, teil I, Abschnitt, 1770.

[31] Lebesgue, H. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Nova York: Chelsea Publishing Company, 1973, 3a edició. Reimpressió de la 2a edició, París, 1928.

[32] Lehmer, D. H. «A cotangent analogue of continued fractions». *Duke Math. J.* 4 (1938), 323–340. [Hi ha una errada menor corregida a MR49:10627.]

[33] Lüroth, J. *Über eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reiche.Mathem. Annalen*, 21 (1883).

[34] Miralles de I., J. *Sobre l'evolució històrica del concepte de nombre. Impacte didàctic i algunes propostes concretes.* Tesi doctoral Universitat Autònoma de Barcelona, Dept. de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències experimentals, 2001.

[35] Niven, I. *Irrational numbers.* The Mathematical Association of America. Distribuït per John Wiley and Sons, Inc., Nova York, 1956.

[36] Olds, C. D. *Continued fractions.* Nova York: Random House, 1963.

[37] Oppenheim, A. «On the representation of real numbers by products of rational numbers». *Quart. J. Math., Oxford Ser.* (2) 4 (1953), 303–307.

[38] Oppenheim, A. «Criteria for Irrationality of Certain Classes of Numbers». *Amer. Math. Monthly*, 61 (1954), núm. 4, 235–241.

[39] Oppenheim, A. «The representation of real numbers by infinite series of rationals». *Acta Arith.*, 21 (1972), 391–398.

[40] Osler, T. J. «The union of Vieta's and Wallis's products for pi». *Amer. Math. Monthly*, 106 (1999), núm. 8, 774–776.

[41] Ostrowski, A. *Über einige Verallgemeinerungen des Eulerschen Produktes* $\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1+x^{2^\nu}\right) = 1/(1-x)$. *Verh. Naturfosch. Ges. Basel* 11 (1929), 153–214.

[42] Paradís, J. *Sobre la representación de los números reales basada en la identificación del continuo* $(0,1]$ *con las partes de* $\mathbb{N}$. Tesi doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, Dept. de Matemàtica Aplicada III, 1996.

[43] Paradís, J.; Viader, P.; Bibiloni, L. *Approximation of quadratic irrationals and their Pierce expansions. Fibonacci Quart.* 36 (1998), núm. 2, 146–153.

[44] Paradís, J.; Viader, P.; Bibiloni, L. «A mathematical excursion: from the three-door problem to a Cantor-type set». *Amer. Math. Monthly*, 106 (1999), núm. 3, 241–251.

[45] Parry, W. «Representations for real numbers». *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 15 (1964), 95–105.

[46] Perron, O. *Irrationalzahlen.* Nova York, Chelsea, 1951, 1a edició de 1910.

[47] Pierce, T. A. «On an Algorithm and Its Use in Approximating Roots of Algebraic Equations». *Amer. Math. Monthly*, 36 (1929), núm. 10, 523–525.

[48] Pla i Carrera, J. «Arquimedes i Descartes. El mètode com un canvi de llenguatge». *Butl. Soc. Catalana Mat.*, 13 (1998), núm. 2, 35–84.

[49] Polvani, G. *Supra le frazioni di Lambert. Periòdico di Matematiche* (juliol 1913).

[50] Remez, E. Ya. «On series with alternating sign which may be connected with two algorithms of M. V. Ostrogradskiĭ for the approximation of irrational numbers». *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)* 6 (1951), núm. 5(45), 33–42.

[51] Rényi, A. «Representations for real numbers and their ergodic properties». *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 8 (1957), 477–493.

[52] Rey Pastor, J. *Los matemáticos españoles del siglo* xvi. Madrid: 1926. Biblioteca Scientia.

[53] Riesz, F.; Nagy, B. Sz. *Functional Analysis.* 2a edició. Nova York: Dover Publications, Inc., 1990.

[54] Rockett, A. M. «The metrical theory of continued fractions to the nearer integer». *Acta Arith.*, 38 (1980/81), núm. 2, 97–103.

[55] Rockett, A. M.; Szüsz, P. *Continued fractions.* River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co. Inc. 1992.

[56] Shallit, J. «Pierce expansions and rules for the determination of leap years». *Fibonacci Quart.*, 32 (1994), núm. 5, 416–423.

[57] Shallit, J. O. «Metric theory of Pierce expansions». *Fibonacci Quart.*, 24 (1986), núm. 1, 22–40.

[58] Sierpiński, W. *Sur quelques algorithmes pour développer les nombres réels en séries. C. R. Soc. Sci. Varsovie* 4 (1911), 56–57, en polonès. Hi ha traducció francesa a *Oeuvres choisies*, t. I. Varsovia PWN, 1974, 236–254.

[59] Sierpiński, W. «On certain expansions of real numbers into infinite fast-converging products». *Prace Mat.*, 2 (1956), 131–138, en polonès. Hi ha un resum en anglès a MR18:888c.

[60] Sylvester, J. J. «On a Point in the Theory of Vulgar Fractions». *Amer. J. Math.*, 3 (1880), 332–335.

[61] Vervaat, W. *Success epochs in Bernoulli trials (with applications in number theory)*. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1972. Mathematical Centre Tracts, núm. 42.

[62] Viader, P.; Paradís, J.; Bibiloni, L. «A new light on Minkowski's $?(x)$ function». *J. Number Theory*, 73 (1998), núm. 2, 212–227.

[63] Vieta, F. *Vietae Opera Mathematica*. Elzevier, Leiden, 1646. Versió en llatí de les obres de Vieta a càrrec de Frans Van Schooten.

[64] Waerden, B. L. van der «Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion». *Math. Zeitschr.*, 32 (1930), 474–475.

Pelegrí Viader, Jaume Paradís, Joan Miralles de Imperial
Departament d'Economia i Empresa
Universitat Pompeu Fabra
Trias Fargas 23-25
08005 Barcelona
pelegri.viader@econ.upf.es
jaume.paradis@econ.upf.es
joan.miralles@econ.upf.es

Lluís Bibiloni
Departament de Didàctica de les Matemàtiques
i les Ciències Experimentals
Facultat de Ciències de l'Educació
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra
lluis.bibiloni@uab.es