Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 11, núm. 1, 1996. Pàgs. 0–0.

L'estructura del continu: resultats d'independència en anàlisi matemàtica

Joan Bagaria

Potser la pregunta més senzilla, i alhora fonamental, que es pot fer sobre els nombres reals és: *Quants n'hi ha?* Cantor va demostrar que els nombres reals no es poden numerar i va formular l'any 1878 la conjectura següent:

> *Donat un conjunt de nombres reals, o bé és numerable, o bé té la mateixa cardinalitat que* $\mathbb{R}$*, el conjunt de tots els nombres reals.*

Aquesta conjectura es coneix com la *hipòtesi del continu* i fou considerada per Hilbert tan important que la va posar en el primer lloc de la seva famosa llista de problemes de l'any 1900. La solució hauria d'esperar més de seixanta anys. El 1963, Paul Cohen, un jove analista de Stanford va inventar la tècnica del *forcing* per a mostrar que la hipòtesi del continu era independent dels axiomes usuals de la matemàtica, resultat pel qual rebé la medalla Fields.

Des del resultat de Cohen, la llista de problemes que s'han demostrat independents ha crescut sense parar, fins a cobrir pràcticament totes les àrees de les matemàtiques. En aquest article explicarem de manera informal què és un resultat d'independència i donarem alguns exemples de resultats d'independència en diverses àrees de l'anàlisi matemàtica. Amb això volem il·lustrar l'ús dels mètodes de teoria de conjunts, i en especial del *forcing*, per a la resolució de qüestions bàsiques sobre l'estructura del continu, com ara la hipòtesi del continu o la mesurabilitat de conjunts de nombres reals, així com de qüestions més específiques en anàlisi funcional o anàlisi complexa.

1 La independència de la hipòtesi del continu

1.1 La teoria ZFC

La teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel amb l'axioma d'elecció, abreujadament ZFC, té el seu origen en l'intent d'evitar les contradiccions en la teoria intuïtiva de conjunts aparegudes a principis de segle. ZFC consisteix en una llista (infinita numerable) d'axiomes sobre conjunts. Alguns d'aquests axiomes són *evidents*, com el que diu que si existeix un conjunt X, aleshores també existeix el conjunt que té com a elements tots els subconjunts de X. Altres, tot i que no són immediatament evidents, s'accepten per raons pràctiques, com l'axioma d'elecció, el qual és àmpliament utilitzat en totes les àrees de les matemàtiques. La importància de ZFC rau en el fet que sembla capturar totes les nostres intuïcions sobre l'univers matemàtic de tots els conjunts. A més, la seva adequació com a fonamentació de les matemàtiques és confirmada per l'experiència, ja que tots els teoremes matemàtics existents poden ser formalitzats i demostrats a partir dels axiomes de ZFC. De fet, molts matemàtics estarien d'acord que ZFC caracteritza les matemàtiques, en el sentit que un enunciat matemàtic és un teorema si i només si és demostrable a partir de ZFC.

El segon teorema d'incompletesa de Gödel ens diu que si ZFC és consistent, és a dir, cap enunciat contradictori no és demostrable a partir de ZFC, aleshores això no podem demostrar-ho partint només de ZFC. Per altra banda, ZFC es pot formular en el llenguatge de la lògica de primer ordre, i el teorema de completesa de Gödel per a aquesta lògica ens diu que si ZFC és consistent, aleshores podem construir una estructura M, o *model*, on valen els axiomes de ZFC. A més, si φ és un enunciat matemàtic que val també en M, aleshores no és possible demostrar la negació de φ a partir de ZFC. Per tant, si podem construir un model de ZFC on val φ, podem concloure que els mètodes matemàtics usuals són insuficients per a demostrar la negació de φ. El problema, però, és que no podem demostrar, en ZFC que existeixi un model de ZFC, ja que l'existència d'un model implicaria que ZFC és consistent, i, com ja hem dit, ZFC no pot demostrar la seva pròpia consistència. A pesar d'això, i per tal de simplificar el que veurem a continuació, suposarem que ZFC és consistent i, per tant, que existeix un model de ZFC. (Aquesta suposició és, de fet, innecessària, ja que en qualsevol demostració matemàtica només s'utilitzen un nombre *finit* d'axiomes, i donat un nombre finit d'axiomes, sempre podem trobar-ne un model. Per tant, el lector incòmode amb la suposició que ZFC és consistent pot substituir ZFC en el que ve a continuació per un subconjunt finit de ZFC *suficientment gran*).

1 Definició *Sigui φ un enunciat matemàtic. Si és possible construir un model de ZFC en el qual també val φ, aleshores diem que φ és consistent (amb ZFC).*

Així doncs, suposem que φ és un enunciat matemàtic i que podem construir dos models de ZFC, un en què val φ i l'altre en què val la negació de φ. Aleshores no és possible demostrar ni φ ni la seva negació amb els mètodes de què disposem habitualment en matemàtiques.

2 Definició *Sigui φ un enunciat matemàtic. Diem que φ és independent (de ZFC) si tant φ com la seva negació són consistents.*

El 1938, Gödel [8] va construir un model de ZFC, l'anomenat *model construïble L*, en el qual val la hipòtesi del continu, i va demostrar així la seva consistència i, per tant, la futilesa d'intentar demostrar la seva falsedat.

Però Cohen [4], usant el mètode del *forcing*, va demostrar que és possible estendre un model de ZFC afegint-hi tants nombres reals nous com es vulgui, i construir d'aquesta manera un altre model on val la negació de la hipòtesi del continu i demostrar així la seva independència.

1.2 L'univers construïble de Gödel

El model L de Gödel es construeix per *inducció transfinita* sobre els ordinals. Això és, per a cada nombre ordinal α, i suposant que ja s'hagi definit L_β per a cada ordinal $\beta < \alpha$, es defineix L_α. L és aleshores la reunió de tots els L_α. La idea és que a L_α pertanyin només aquells conjunts estrictament necessaris, això és, aquells que siguin definibles a partir dels conjunts que ja pertanyen a algun L_β, $\beta < \alpha$. Així doncs,

- $L_0 = \emptyset$.
- Si $\alpha = \beta + 1$, L_α és el conjunt de tots els subconjunts X de L_β tals que $X = \{x : \varphi(x, a_1, ..., a_n)\}$, on $\varphi(x, a_1, .., a_n)$ és una fórmula del llenguatge de la teoria de conjunts amb paràmetres $a_1, .., a_n \in L_\beta$.
- Si α és un ordinal límit, $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$.
- L és la unió de tots els L_α, α un ordinal.

Gödel [8] va demostrar que L és un model de ZFC, això és, tots els axiomes de ZFC són verdaders en L. També va demostrar que en L val la hipòtesi del continu, la qual cosa no és estranya atès que a L només pertanyen els nombres reals estrictament necessaris, i per tant el mínim nombre possible, encara que la demostració d'aquest fet és altament sofisticada.

1.3 Forcing

Volem construir un model de ZFC on no val la hipòtesi del continu. Suposem, doncs, que partim d'un model M de ZFC i volem afegir-hi un nombre real nou. El problema és que *potser no n'hi ha cap de nombre real que no estigui ja a M!* Per exemple, L és un model de ZFC, així no podem demostrar, en ZFC, que hi hagi un conjunt que no sigui construïble. Afortunadament, però, com que ZFC és consistent, en L podem trobar-hi un model M de ZFC. El teorema de Löwenheim-Skolem per a la lògica de primer ordre ens permet escollir M numerable i, per tant, molt petit comparat amb L. En particular, hi haurà molts nombres reals de L que no pertanyeran a M i podrem així estendre M *dins* de L.

Si s'escull M adequadament, aleshores podem suposar que és de la forma L_α, on α és un ordinal infinit i numerable, de tal manera que totes les seqüències *finites* de nombres naturals, així com el conjunt de totes aquestes seqüències, pertanyen a M. Podem suposar, doncs, que el nombre real nou que volem afegir a M és una seqüència infinita de nombres naturals. En efecte, aquest nombre real ha de ser forçosament un irracional, ja que, òbviament, tots els nombres naturals i per tant, els racionals són a M, i és ben sabut que l'espai de Baire de totes les seqüències infinites de nombres naturals és homeomòrfic als irracionals. Per tant, la idea és considerar les seqüències finites com *aproximacions* a la seqüència infinita que volem afegir. Considerem, doncs, en M, l'ordre parcial $\mathbb{P}$ de totes les seqüències finites de nombres naturals ordenades per extensió, és a dir, si p i q són seqüències, $p \leq q$ si i només si q estén p. Fixem-nos que $\mathbb{P}$ és un *arbre*. Això és, per a cada $p \in \mathbb{P}$, el conjunt de tots els $q \leq p$ és un conjunt ben ordenat. Podem veure, doncs, les seqüències infinites de nombres naturals com *branques* en aquest arbre. Fixem-nos que totes les branques de l'arbre que pertanyen a M són construïbles, ja que pertanyen a algun L_β, on $\beta < \alpha$. Així, si volem trobar una branca que no pertanyi a M, l'haurem d'escollir amb molta cura. En particular, la branca no podrà ser *definible*, això és, no hi podrà haver cap *propietat* que la defineixi. Per tant, volem evitar que la branca tingui cap de les propietats que poden ser evitades.

3 DEFINICIÓ *1. Direm que una propietat dels elements de $\mathbb{P}$ és* evitable *si, donat un $p \in \mathbb{P}$, sempre podem trobar un q que estén p tal que tot r que estén q no té la*

propietat en qüestió. Per exemple, la propietat tots els termes de la seqüència són zeros *és evitable.*

2. *Diem que un subconjunt D de $\mathbb{P}$ és* dens *si per a tot $p \in \mathbb{P}$ existeix una extensió q de p que pertany a D. D serà, a més,* obert *si tota extensió d'un element de D pertany també a D.*

És fàcil de veure que si una propietat és evitable, aleshores el conjunt de tots els $q \in \mathbb{P}$ tals que tot r que estén q no té la propietat en qüestió és un subconjunt dens i obert.

Per tant, suposem que c és una branca de $\mathbb{P}$ que interseca tots els subconjunts densos i oberts de $\mathbb{P}$ que pertanyen a M. Això és, en cada subconjunt dens i obert D de $\mathbb{P}$ que pertany a M hi ha un p que és un segment inicial de c. Quan això es compleix diem que c és *genèrica* (o *Cohen*) sobre L. Aleshores, c no té cap propietat evitable. A més,

4 Proposició *Si c és genèrica sobre M, aleshores c no pertany a M.*

Prova: Si c fos un element de M, el conjunt

$$D = \{p \in \mathbb{P} : p \text{ no és un segment inicial de } c\}$$

que és dens i obert, seria construïble en M, ja que acabem de definir-lo utilitzant c com a paràmetre. Per tant, c hauria d'intersecar D. Però això és impossible. □

Veiem, doncs, que per a obtenir una branca que no pertanyi a M n'hi ha prou amb trobar-ne una que intersequi tots els subconjunts densos i oberts de $\mathbb{P}$ que pertanyen a M. Atès que hem escollit M numerable, aquesta branca genèrica la podem trobar a L.

5 Proposició *A L existeix una branca c genèrica sobre M.*

Prova: Com que M és numerable, sigui $\langle D_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ una numeració de tots els subconjunts densos i oberts de $\mathbb{P}$ que pertanyen a M. Sigui p_0 un element qualsevol de D_0. Donat p_n en D_n, escollim p_{n+1} en D_{n+1} tal que $p_n \leq p_{n+1}$. Sigui c la unió de tots els p_n. Clarament, c interseca tots els D_n. □

El lector pot pensar que no calia treballar tant per veure que a L hi havia branques de $\mathbb{P}$ que no eren a M, ja que M és numerable i a L hi ha una quantitat no numerable de branques, tantes com irracionals. L'important aquí, però, és el fet sorprenent que si afegim c a M, és a dir, si considerem el conjunt de tots els conjunts definibles per inducció transfinita sobre els ordinals de M, agafant c com a paràmetre addicional, aleshores obtenim un model de ZFC. A més, en el model resultant $M[c]$, *c no és construïble*, ja que M i $M[c]$ contenen els mateixos ordinals. La demostració d'aquests fets és força complicada i es basa en què c és genèrica sobre M.

Podem obtenir, doncs, d'aquesta manera un model $M[c]$ de ZFC que conté un nombre real no construïble. Però si volem un model on no valgui la hipòtesi del continu, hem d'afegir a M no pas una branca, sinó almenys ω_2 branques diferents, on ω_2 és el segon cardinal no numerable. Això es pot fer agafant en M l'ordre parcial que és la suma directa de ω_2 còpies de $\mathbb{P}$. Raonant com abans, en L podem trobar-hi una seqüència $\langle c_\beta : \beta < \omega_2\rangle$ de branques diferents de $\mathbb{P}$, una per cada còpia de $\mathbb{P}$ en la suma directa, i totes genèriques sobre M. Per tant, cap d'elles no serà construïble. En el model resultant $M[\langle c_\beta : \beta < \omega_2\rangle]$, la cardinalitat del continu és ω_2 i, per tant, la hipòtesi del continu és falsa. Hi ha, però, un petit detall que cal tenir en compte. El model M és numerable.

Així doncs, el cardinal ω_2 de M és també numerable i, per tant, no és el cardinal ω_2 *de veritat*. Per tant, ens hem d'assegurar que quan afegim les noves branques a M, el ω_2 de M continua sent el ω_2 del model resultant. Si no és així, per exemple, si en el model resultant el ω_2 de M esdevingués numerable, aleshores continuaríem tenint la hipòtesi del continu i no hauríem avançat res. Afortunadament, a causa de les propietats combinatòriques o, si es vol, topològiques, de $\mathbb{P}$, això no ocorre.

Aquest mètode de construcció de models (d'una part) de ZFC és molt més general del que l'exemple presentat aquí pot fer suposar. En principi, és possible afegir a un model, no solament una seqüència infinita de nombres naturals, sinó *qualsevol* altre tipus d'objecte. Aleshores cal dissenyar un ordre parcial $\mathbb{P}$ adequat, de manera que, si G és un subconjunt de $\mathbb{P}$ *genèric*, això és, si G és un *filtre* i interseca tots els subconjunts densos i oberts de $\mathbb{P}$ que pertanyen al model del qual partim, en el model ampliat $M[G]$, hi tenim l'objecte que volíem. Les propietats de $M[G]$ vénen *forçades* pels elements de $\mathbb{P}$. El teorema de *forcing* diu precisament que un element p de $\mathbb{P}$ *força* un enunciat φ si i només si aquest enunciat val en tota extensió genèrica $M[G]$ amb $p \in G$. Com que la relació de *forcing* és definible en el model del qual partim, podem des d'aquest model controlar el que ocorrerà en l'extensió genèrica.

2 Conjunts mesurables de nombres reals

És ben sabut que no tot conjunt de nombres reals és mesurable en el sentit de Lebesgue. En efecte, l'axioma d'elecció permet construir conjunts no mesurables amb facilitat. L'exemple més conegut és possiblement el conjunt de Vitali [19]: sigui X un subconjunt de l'interval $[0, 1]$ amb les propietats següents:

1. Per a qualsevol parell de nombres distints x, y de X, $x - y$ no és racional.
2. X és maximal respecte a la propietat 1. Això és, si Y és un subconjunt de $[0, 1]$ que conté X i satisfà la propietat 1, aleshores $Y = X$.

L'existència d'un X que satisfà aquestes dues propietats és garantida pel lemma de Zorn, una forma equivalent de l'axioma d'elecció. Si X satisfà les propietats 1 i 2, aleshores no és mesurable. En efecte, per a cada nombre racional q, considerem el conjunt $X_q = \{x + q : x \in X\}$. Tots aquests conjunts són disjunts dos a dos. Sigui Z la unió de tots els X_q on q és un nombre racional de l'interval $[-1, 1]$. X no pot tenir mesura zero, ja que $[0, 1] \subseteq Z$. Però X tampoc no pot tenir mesura positiva, ja que $Z \subseteq [-1, 2]$.

Vegem un altre exemple de conjunt no mesurable en el pla. L'axioma d'elecció és equivalent al principi de bona ordenació de Zermelo [21], el qual diu que tot conjunt es pot ordenar bé, això és, es pot ordenar linealment de manera que tot subconjunt no buit té un element mínim. Per tant, l'existència d'una bona ordenació dels nombres reals n'és una conseqüència. Suposem, doncs, que $(\mathbb{R}, \leq)$ és un bon ordre. Aleshores, el conjunt de tots els punts del pla (x, y) tals que $x < y$ no és mesurable. En efecte, considerem els conjunts:

$$A = \{(x, y) : x < y\}, \qquad B = \{(x, y) : y \leq x\}.$$

Fixem-nos que per a cada y, la secció $A_y = \{x : x < y\}$ té cardinalitat menor que la cardinalitat de $\mathbb{R}$. Per tant, si A_y és mesurable, ha de tenir mesura zero. Es segueix, doncs, del teorema de Fubini que, si A és mesurable, té mesura zero. De manera similar, si B és mesurable, també ha de tenir mesura zero. Però com que el pla és la unió de A i B, i $A \cap B = \phi$, si A fos mesurable, el pla tindria mesura zero.

Tot i aquests exemples, cal remarcar que la majoria dels conjunts de nombres reals que apareixen de manera natural en anàlisi són mesurables. Això és degut al fet que són conjunts relativament simples, és a dir, són conjunts analítics.

6 Definició *Els conjunts* Borel *són aquells que es poden obtenir a partir dels conjunts oberts agafant unions numerables i complements. Un conjunt és* analític *si és la imatge contínua d'un conjunt Borel.*

L'any 1917 Lusin [13] va demostrar que tots els conjunts analítics són mesurables. Per tant, tots els conjunts coanalítics (els complements dels conjunts analítics) són també mesurables.

Els conjunts més simples que es poden construir a partir dels conjunts analítics i coanalítics són les seves imatges contínues. Atès que la imatge contínua d'un conjunt analític és també un conjunt analític i, per tant, mesurable, considerem la qüestió següent:

És la imatge contínua d'un conjunt coanalític un conjunt mesurable?

El 1925 Lusin i Sierpiński (vegeu [12] i [14]) van mostrar que si es comença amb els conjunts analítics i s'iteren les operacions d'agafar imatges contínues i complements, aleshores s'obté una nova classe de conjunts: *els conjunts projectius.* Aquests s'ordenen jeràrquicament d'acord amb la complexitat de la seva construcció:

Els conjunts projectius

$\mathbf{\Delta}^1_1$ és la classe dels conjunts Borel.
$\mathbf{\Sigma}^1_1$ és la classe dels conjunts analítics.
$\mathbf{\Pi}^1_1$ és la classe dels conjunts coanalítics.
$\mathbf{\Sigma}^1_n$ és la classe de les imatges contínues (o projeccions) de conjunts de classe $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$.
$\mathbf{\Pi}^1_n$ és la classe dels complements dels conjunts de classe $\mathbf{\Sigma}^1_n$.
$\mathbf{\Delta}^1_n$ és la classe dels conjunts que són a la vegada de classe $\mathbf{\Sigma}^1_n$ i $\mathbf{\Pi}^1_n$.

Així doncs, per a tot $n \geq 1$, $\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathbf{\Pi}^1_n \subseteq \mathbf{\Delta}^1_{n+1}$.

Per tant, podem reformular la qüestió anterior de la manera següent:

És mesurable tot conjunt $\mathbf{\Sigma}^1_2$*?*

En el model construïble de Gödel, la resposta és *no.* En L hi ha un bon ordre dels nombres reals que és un conjunt $\mathbf{\Delta}^1_2$ del pla, i ja hem vist que aquest conjunt no pot ser mesurable. Per altra banda, el 1964, en un treball extraordinari Solovay [18] va construir un model de ZFC, usant *forcing*, on tots els conjunts projectius de nombres reals són mesurables. Amb la hipòtesi que existeix un nombre cardinal *inaccessible*, i això és indemostrable en ZFC, el model de Solovay s'obté *col·lapsant* aquest cardinal inaccessible sobre L, de manera que en l'extensió genèrica el cardinal inaccessible esdevé el primer cardinal no numerable. Shelah [16] va demostrar que si volem obtenir un model on tots els conjunts $\mathbf{\Sigma}^1_3$ siguin mesurables, aleshores és necessari admetre l'existència d'un cardinal inaccessible a L i, per tant, la hipòtesi de Solovay és necessària. Però si només volem obtenir un model on tots els conjunts $\mathbf{\Sigma}^1_2$ siguin mesurables, la suposició que existeix un cardinal inaccessible en L és innecessària. N'hi ha prou amb *forçar*, partint de L, un nombre no numerable de vegades amb l'ordre parcial anomenat *Amoeba*, que consisteix en tots els subconjunts de $\mathbb{R}$ oberts i de mesura menor que $1/2$, ordenats per inclusió.

Així doncs, la mesurabilitat dels conjunts $\mathbf{\Sigma}^1_2$, i dels projectius en general, és independent de ZFC. De fet, gairebé totes les qüestions que es poden plantejar sobre els conjunts projectius resulten ser independents. Vegem-ne alguns exemples:

1. La propietat de Baire. Recordem que un conjunt de nombres reals és de *primera categoria* si el seu complementari conté una intersecció numerable de conjunts densos i oberts. Els conjunts de primera categoria formen un ideal i, per tant, són conjunts *petits* en sentit topològic. Un conjunt té la propietat de Baire si és *gairebé* un conjunt obert, en el sentit que difereix d'un conjunt obert en un conjunt de primera categoria. El 1923 Lusin i Sierpiński [14] van demostrar que tots els conjunts analítics tenen la propietat de Baire. Sorprenentment, fins al 1984, les propietats de mesurabilitat i de Baire eren considerades duals: tot el que podia demostrar-se per a una d'elles podia demostrar-se també per a l'altra (vegeu [15]). D'acord amb aquest principi de dualitat entre mesurabilitat i propietat de Baire, en L hi ha conjunts $\mathbf{\Delta}^1_2$ que no tenen la propietat de Baire, i en el model de Solovay tots els conjunts projectius la tenen. Però Shelah [16] va demostrar, usant *forcing*, que és consistent que tots els conjunts projectius tinguin la propietat de Baire i que existeixin conjunts $\mathbf{\Sigma}^1_3$ que no són mesurables, i, a la inversa, també és consistent que tots els conjunts projectius siguin mesurables, però existeixin conjunts projectius que no tenen la propietat de Baire. Aquesta asimetria entre mesurabilitat i propietat de Baire es dóna també en els nivells $\mathbf{\Delta}^1_n$ de la jerarquia projectiva, és a dir, per a cada n, és consistent que tots els conjunts $\mathbf{\Delta}^1_n$ siguin mesurables (tinguin la propietat de Baire), però que existeixi un conjunt $\mathbf{\Delta}^1_n$ que no tingui la propietat de Baire (sigui mesurable) (vegeu Bagaria-Woodin [1]).

2. Uniformització. Un altre problema fonamental, degut a Hadamard, fou exposat per Lusin [11]: suposem que P és un subconjunt del pla. Un subconjunt P^* de P uniformitza P si P^* és la gràfica d'una funció i té la mateixa projecció en $\mathbb{R}$ que P. La qüestió és si els conjunts projectius admeten una uniformització projectiva. Aquest problema apareix freqüentment, per exemple, quan cerquem solucions *canòniques* per a y en termes de x en l'equació $f(x, y) = 0$. Lusin i Sierpiński van mostrar que els conjunts Borel tenen uniformització $\mathbf{\Pi}^1_1$ i Lusin va demostrar que els conjunts analítics tenen uniformitzacions projectives. El 1938, Novikov i Kondô [9] van provar que els conjunts $\mathbf{\Pi}^1_1$ i $\mathbf{\Sigma}^1_2$ tenen uniformitzacions en la seva mateixa classe. Però la uniformització de conjunts $\mathbf{\Pi}^1_2$ o $\mathbf{\Sigma}^1_3$ amb conjunts de la seva mateixa classe és independent de ZFC. Per exemple, en L tot conjunt $\mathbf{\Sigma}^1_3$ del pla té una uniformització $\mathbf{\Sigma}^1_3$, però amb *forcing* es poden construir models on això és fals.

3. Els conjunts projectius i la hipòtesi del continu. Tot i que, com ja hem vist, la hipòtesi del continu és independent de ZFC, podem preguntar-nos si val per als conjunts projectius. Això és, *donat un conjunt projectiu, és cert que, o bé és numerable, o bé té la mateixa cardinalitat que* $\mathbb{R}$*?* Si el conjunt és analític, aleshores sí. Suslin va demostrar (vegeu Lusin [11]) que tot conjunt analític no numerable conté un conjunt perfecte i, per tant, té la mateixa cardinalitat que $\mathbb{R}$. En el model de Solovay, el mateix resultat val per a tots els conjunts projectius. En canvi, amb *forcing* es poden construir models on falla la hipòtesi del continu per a conjunts $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Tota la teoria dels conjunts projectius, així com els resultats d'independència esmentats, pot generalitzar-se a qualsevol espai polonès (homeomòrfic a un espai complet, mètric i separable). En alguns d'aquests espais, els quals ocupen un lloc central en anàlisi matemàtica, els conjunts projectius hi apareixen de manera molt natural. A la taula següent en veiem alguns exemples.

Conjunts projectius en espais polonesos

En $C[0,1]$, el conjunt de les funcions diferenciables és $\mathbf{\Pi}^1_1$. El conjunt de les funcions que satisfan el teorema del valor mitjà és $\mathbf{\Pi}^1_2$.

Sigui $(C[0,1])^\omega$ l'espai de totes les seqüències de funcions amb la topologia producte.

1. El conjunt de totes les seqüències que contenen una subseqüència que convergeix puntualment és $\mathbf{\Sigma}^1_2$.
2. El conjunt de totes les sequències $\langle f_i \rangle$ tals que per a tota funció g en $C[0,1]$ existeix una subseqüència de $\langle f_i \rangle$ que convergeix puntualment a g, és $\mathbf{\Pi}^1_3$.

En $L^p[0,2\pi]$, $p \geq 1$, el conjunt de les funcions tals que la seva sèrie de Fourier convergeix en tot punt és $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Veurem a continuació dos exemples més de resultats d'independència. El primer és en anàlisi funcional i el segon en anàlisi complexa.

3 La conjectura de Kaplanski

El problema que considerarem és un cas particular de la qüestió general següent:

Siguin A i B dues àlgebres de Banach complexes i sigui $h : A \to B$ un homomorfisme (h és lineal i multiplicativa). És contínua h?

Aquest problema es coneix com *el problema de la continuïtat automàtica.*

Per exemple, si $B = \mathbb{C}$, aleshores sí. Per altra banda, si A és l'àlgebra de Banach dels operadors acotats en un espai de Hilbert, aleshores també.

Restringim-nos al cas en què A és $C(X)$, l'àlgebra de Banach de les funcions contínues complexes sobre un espai Hausdorff compacte X, amb la norma del suprem:

$$\| f \| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

i el producte definit de la manera usual $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

En aquest cas, el problema de la continuïtat automàtica és equivalent al següent:

És equivalent a la norma del suprem tota norma (submultiplicativa) en $C(X)$?

Kaplanski (1948) va demostrar que tota norma δ domina la norma del suprem i va conjecturar que δ ha de ser contínua respecte a la norma del suprem, la qual cosa implica l'equivalència de les normes. Així, una resposta positiva a la conjectura de Kaplanski implica que l'estructura topològica de $C(X)$ és completament determinada per la seva estructura algebraica.

El 1976, Dales i Esterle (vegeu Dales-Woodin [5]), independentment, van demostrar que si val la hipòtesi del continu, per a cada espai compacte Hausdorff infinit existeix una norma (submultiplicativa) que no és equivalent a la norma del suprem. L'ús de la hipòtesi del continu fou considerat al principi com a purament accidental. Però, també el 1976, Solovay i Woodin (vegeu Woodin [20]) van construir un model de ZFC on, per a cada X, tota norma en $C(X)$ era equivalent a la norma del suprem, i van demostrar així la independència de la conjectura de Kaplanski.

4 Invariants conformes

El teorema de representació conforme de Riemann estableix que tota regió del pla complex simplement connexa i diferent de $\mathbb{C}$ és conformement equivalent al disc unitat. Així doncs, el disc unitat pot veure's com la regió *canònica* o *estàndard* per a les regions simplement connexes.

Suposem que volem introduir el concepte de regió canònica per a regions múltiplament connexes. Aleshores ens trobem amb dues dificultats. La primera és que tota aplicació conforme preserva l'ordre de connexió d'una regió. Així, la imatge conforme d'una regió doblement connexa és doblement connexa, etc. Per tant, és necessari introduir regions canòniques diferents per a cada ordre de connexió. Però hi ha una altra dificultat, i és que no és cert que tot parell de regions del mateix grau de connexió siguin conformement equivalents. En efecte, tota regió doblement connexa D és conformement equivalent a un anell $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$ i dos anells són conformement equivalents en el cas que la raó dels dos radis r_1/r_2 sigui la mateixa. Veiem així que la classe de totes les regions conformement equivalents a una regió doblement connexa D és determinada pel nombre r_1/r_2. Aquest nombre s'anomena *mòdul* de D.

Una situació semblant es dóna amb regions n-connexes. Per a $n > 2$, la classe de totes les regions conformement equivalents a una regió n-connexa D és determinada per $3n-6$ nombres reals, anomenats *mòduls de Riemann de la regió.* Els mòduls constitueixen, doncs, un sistema complet d'invariants conformes per a regions n-connexes. És a dir:

7 Definició Un *sistema complet d'invariants* (conformes) és un operador ϕ que assigna a cada regió D una seqüència $\phi(D)$ de nombres complexos, de tal manera que D i D' són conformement equivalents si i només si $\phi(D) = \phi(D')$. Es requereix, a més, que ϕ estigui explícitament definit.

La qüestió que volem considerar és la següent:

> *Existeix un sistema complet d'invariants conformes per a regions múltiplament connexes del pla complex?*

Fixem-nos que, si identifiquem cada nombre real amb una seqüència de nombres racionals, i aquests amb parells de nombres racionals mitjançant la bijecció $J : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida per $J(m, n) = 2^m(2n+1)-1$, aleshores tot nombre real $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ codifica la regió del pla consistent en la unió de tots els discs oberts de centre a_n i radi b_n. Si existeix un bon ordre dels nombres reals definible, com per exemple a L, la funció que assigna a cada regió múltiplament connexa del pla D el menor nombre real que codifica una regió conformement equivalent a D és un sistema complet d'invariants.

Becker, Henson i Rubel [2] van demostrar que en el model que resulta d'afegir un conjunt infinit d'enters a qualsevol model de ZFC utilitzant el mètode de *forcing* de Cohen, no hi pot haver *cap* sistema complet d'invariants conformes per a regions múltiplament connexes del pla complex. Convé ressaltar que les regions que no es poden classificar per cap sistema d'invariants són regions molt simples: són de la forma $\mathbb{C} \setminus S$, on S és un conjunt genèric d'enters.

Un resultat semblant s'ha obtingut recentment per a $\mathbb{C}^2$. Lempert i Rubel [10] van demostrar que el problema de l'existència d'un sistema complet d'invariants per a regions d'holomorfia simplement connexes en $\mathbb{C}^2$ també és independent.

Amb aquests exemples, i molts d'altres existents en la literatura, podem veure que un bon nombre de qüestions fonamentals sobre l'estructura del continu, i també qüestions més específiques en totes les àrees de l'anàlisi matemàtica, no poden ser resoltes en ZFC. Fruit de la recerca en teoria de conjunts durant els últims trenta anys ha estat el descobriment i la classificació de nous axiomes, els quals, afegits a ZFC, permeten resoldre moltes de les qüestions que són independents de ZFC. Entre aquests axiomes trobem els axiomes de *forcing*, el més conegut i utilitzat dels quals és l'*axioma de Martin* (vegeu Fremlin [7]), i també axiomes de *grans cardinals*, els quals afirmen l'existència de cardinals transfinits extremament grans. L'axioma de Martin implica, per exemple, la mesurabilitat de tots els conjunts $\mathbf{\Sigma}^1_2$, així com la conjectura de Kaplanski. Per altra banda, l'existència d'un nombre infinit dels anomenats *cardinals de Woodin* i d'un cardinal *mesurable* més gran que tots ells, implica la mesurabilitat, la propietat de Baire i la uniformització projectiva de tots els conjunts projectius.

L'efecte de principis purament combinatoris, com l'axioma de Martin, o d'existència de cardinals molt grans sobre l'estructura del continu és un dels descobriments matemàtics més sorprenents i apassionants dels últims anys.

Referències

[1] J. Bagaria i W. H. Woodin: $\mathbf{\Delta}^1_n$ *sets of reals*, apareixerà a The Journal of Symbolic Logic (1995).

[2] J. Becker, C. W. Henson i L. A. Rubel: *First-order conformal invariants*, Annals of Mathematics, (2), 112 (1980), 123–178.

[3] G. Cantor: *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, J. f. Math. 84 (1878), 242–258.

[4] P. J. Cohen: *The independence of the Continuum Hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 50 (1963), 1143–1148; 51 (1964), 105–110.

[5] G. Dales i W. H. Woodin: An introduction to independence for analysts, London Mathematical Society Lecture Note Series, 115.

[6] A. A. Fraenkel: *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, Math. Ann., 86 (1922), 250–273.

[7] D. H. Fremlin: *Consequences of Martin's Axiom*, Cambridge University Press (1984).

[8] K. Gödel: *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 24 (1938), 556–557.

[9] M. Kondô: *Sur l'uniformisation des complementaires analytiques et les ensembles projectifs de la seconde classe*, Jap. J. Math. 15, (1938), 197–230.

[10] L. Lempert i L. A. Rubel: *An independence result in several complex variables*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 113, 4 (1991).

[11] N. Lusin: *Sur le probleme de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensembles*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 190 (1930), 349–351.

[12] N. Lusin: *a) Sur un probleme de M. Emile Borel et les ensembles projectifs de M.Henri Lebesgue: les ensembles analitiques. b) Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue. c) Les proprietes des ensembles projectifs*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 180 (1925) 1318–1320, 1572–1574 i 1817–1819.

[13] N. LUSIN: *Sur un problème de M. Baire*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 164 (1917), 91–94.

[14] N. LUSIN i W. SIERPIŃSKI: *Sur un ensemble non-mesurable B*, J. de Math., Sér. 9, 2 (1923), 53–72.

[15] J. C. OXTOBY: Measure and category, Springer–Verlag (1970).

[16] S. SHELAH: *Can you take Solovay's inaccessible away?* Israel Journal of Mathematics, vol. 48, No. 1 (1984), 1–47.

[17] W. SIERPIŃSKI: *Sur une classe d'ensembles*, Fund. Math. 7 (1925), 237–243.

[18] R. SOLOVAY: *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Annals of Mathematics 92 (1970), 1–56.

[19] G. VITALI: Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta, Bologna, Tipografia Gamberini e Parmeggiani, (1905).

[20] W. H. WOODIN: Discontinuous Homomorphisms of $C(\Omega)$ and Set Theory. Berkeley, Ph. D. Thesis, (1984).

[21] E. ZERMELO: *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, Math. Ann., 65 (1908), 261–281.

DEPARTAMENT D'ECONOMIA
UNIVERSITAT POMPEU FABRA
BALMES, 132
08008 BARCELONA
bagaria@upf.es