Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 12, núm. 2, 1997. Pàg. 59–70.

Algunes reflexions sobre la matemàtica aplicada i l'ensenyament en general*

Carles Simó

1 Introducció

La matemàtica és una part del coneixement humà que hom considera sovint abstracta i de difícil comprensió. Crec, al contrari, que és una activitat que sorgeix, de manera ben natural, quan hom considera el món que ens envolta. S'hi «veuen+ els nombres, les figures geomètriques, certes periodicitats de moviments, patrons de formació de plantes i animals, etc. A partir d'això és fàcil treure'n estructures amb una relació lògica.

Però la matemàtica, *per se*, pot prendre el camí invers. Extreure les estructures i prescindir del substrat experimental en què se sustenta la nostra intuïció. Un cop donades les hipòtesis bàsiques (els *axiomes*) i les regles del joc, tota l'estructura queda determinada, encara que no es conegui de manera completa i moltes preguntes sobre aquesta quedin sense resposta.

A partir dels nombres enters podem construir els racionals, els reals i, de manera natural, podem introduir diverses classes de funcions. Les operacions de derivació i integració eixamplen les funcions més elementals. Naturalment, les funcions poden dependre de diverses variables. Per exemple, podem pensar en una funció, la temperatura, que depèn del punt de l'espai on es mesuri i de l'instant de temps en què es faci la mesura.

A la vegada les funcions poden ésser considerades com a «punts+ d'un espai abstracte i definir, de nou, funcions sobre aquests «punts+. Aquesta visió de no tenir por de fer *construccions abstractes* és, potser, el que diferencia el matemàtic de les persones que treballen en altres disciplines. O potser no l'en diferencia tant. En certa manera és el que fan totes les persones que es dediquen a activitats artístiques, com ara els escriptors, músics, escultors, pintors, etc. La matemàtica és una branca més de la creativitat humana. Hom la pot considerar com una branca de les activitats humanístiques. Sembla que surti purament de la ment humana i que no demani cap mena de suport físic. No és així, entre altres raons, perquè molts axiomes de la matemàtica estan basats en l'experiència dels nostres sentits. Altres motius sobre

* Lliçó inaugural del curs acadèmic 1996–1997 a la Universitat de Barcelona.

la independència de l'existència de la matemàtica respecte de la dels éssers humans es donaran més endavant.

També la majoria de les professions i els oficis tenen un destacat component matemàtic. El disseny d'un moble, d'una rentadora o la mecanització d'una peça de metall comporten una activitat matemàtica. I no cal parlar, és clar, de tota la matemàtica que hi ha al darrere de les transaccions comercials, les comunicacions, etc. El conreu d'un camp de cultiu depèn del moviment de la Terra i de la meteorologia, descrits ambdós per lleis matemàtiques ben conegudes. El simple fet de caminar, mantenint l'equilibri, avaluant les distàncies a què estan situats els diversos obstacles, és una activitat matemàtica que practiquem tots de manera inconscient.

Com a resum, la matemàtica és a l'arrel de tots els processos que veiem. Més endavant farem unes reflexions que poden explicar aquesta ubiqüitat de la matemàtica. Quina raó hi ha perquè expliqui satisfactòriament molts fets naturals? Tota la tecnologia es recolza d'una manera o altra en la matemàtica. I diria encara més: sense una estructura expressable matemàticament, crec que no seria possible la vida.

El professional de la matemàtica és aquella persona que reflexiona sobre això fent servir unes hipòtesis raonables basades en la intuïció. Cal un esperit crític, i una certa imaginació per a entendre estructures noves. Entrar en el món de la matemàtica és descobrir un camp d'una bellesa comparable a la de les més grans creacions artístiques.

2 La matemàtica i la matemàtica aplicada

Parlava abans de funcions de diverses classes. Donat un punt podem calcular el valor que pren una funció en aquest punt. És ben natural plantejar-se el problema invers. Si coneixem la funció i el valor final, podem saber de quin punt hem partit? Tenim així el concepte d'equació. Segons siguin les funcions considerades, així seran les equacions. Si considerem funcions d'una variable real podem plantejar-nos equacions algebraiques, donades per polinomis, o transcendents en un altre cas. Si apareixen relacions entre una funció i les seves derivades o integrals, parlarem d'equacions diferencials o d'equacions integrals, respectivament.

Donada una equació del tipus que sigui, el matemàtic es planteja primer si existeix una solució i si aquesta és única. També s'estudien propietats que caracteritzin les solucions. Llavors entrem en el problema de classificar les solucions. Al matemàtic li agrada tenir el seu domini endreçat: si és possible, cada objecte al calaix mental corresponent. Si la solució no és única podem preguntar-nos quina és l'estructura del conjunt de totes les solucions. És un conjunt finit, discret o continu? En el darrer cas forma, potser, una corba o una superfície? Un objecte més complicat?

Un cop assolit aquest coneixement podem considerar no una equació donada, sinó totes les d'una certa família. Podem definir equacions equivalents sota diversos criteris. Per exemple, si existeix alguna transformació que passi de les solucions de l'una a les de l'altra. Llavors podem classificar les equacions segons la classe en què estiguin.

Algunes classificacions són una mica més subtils, ja que el que hom considera no són les solucions pròpiament dites, sinó alguna propietat seva. Per exemple, podem estudiar les solucions d'una equació diferencial (que, a la vegada, serà una certa funció) i, si la solució és una funció real en dimensió 1, considerar quants zeros té en un interval prefixat. O bé, si la solució existeix per a tots els valors de la variable independent que, per entendre'ns, podem pensar que és el temps, podem associar a cada solució el conjunt a què tendeix (en un cert sentit) quan el temps tendeix a infinit. Més concretament, es considera sovint el conjunt de punts als quals la solució s'apropa infinites vegades quan el temps va creixent cap a infinit. Aquest conjunt s'anomena el *ω–límit de la solució*. *A priori* no hi ha cap garantia que aquest conjunt no sigui buit, però hi ha criteris que n'asseguren l'existència en molts casos. Llavors ens podem fer preguntes sobre la classificació de les solucions o de les equacions diferencials segons siguin els seus ω–límits. No entraré aquí en les *aplicacions pràctiques* d'aquestes idees. Sols cal esmentar que són essencials en tot procés de control.

Hem parlat una mica de solucions d'equacions. Una pregunta *delicada* pot ser: i com es calculen aquestes solucions? Sovint el raonament matemàtic per a demostrar-ne l'existència no és constructiu. No ens diu com obtenir-les. Altres vegades, encara que el raonament sigui constructiu, no hi ha cap raó per què es puguin obtenir en un nombre finit de passos. En tot cas, el que sovint hom pot fer és aproximar-les en un nombre finit de passos. Si aquest nombre és gran o bé si cada pas és llarg i feixuc, ens podrem servir dels ordinadors, escrivint, per a això, els pertinents programes (o aprofitant els que algú ja ha escrit abans). Fem un parèntesi aquí per dir que, en molts problemes, si no es coneix gran cosa de l'existència i les propietats de les solucions, és útil que el matemàtic utilitzi l'ordinador com a *eina experimental*. Sovint un estudi numèric d'un cert nombre de casos, sumat a l'experiència professional i a la intuïció, permet «descobrir+ els *teoremes que cal demostrar*.

La matemàtica aplicada fa més èmfasi en els aspectes constructius i en l'obtenció de solucions explícites. Des del punt de vista teòric no veig cap diferència entre la matemàtica en general i la matemàtica aplicada. La diferència es troba en la manera d'aproximar-se als problemes. Les persones que es dediquen a la matemàtica aplicada s'interessen, a més, per les solucions (com més explícites millor) dels problemes matemàtics que es plantegen en altres àrees del coneixement. En certa manera, la part «experimental+ pot ser molt més gran. A més, cal tenir una certa habilitat a fer successives pujades i baixades del pla concret a l'abstracte. Saber generalitzar i particularitzar. Interpretar les solucions obtingudes i la seva possible importància i aplicació al problema concret.

L'enfocament aplicat de la matemàtica es diferencia de les ciències experimentals i tecnològiques pel fet que el seu punt de partida no té una existència física. El punt de partida és un model matemàtic del problema real. Naturalment, si s'escau, el matemàtic pot col·laborar en l'elaboració d'aquest model i en la seva interpretació. Un altre punt diferencial és degut al fet que una «teoria+ física pot mostrar-se errònia com a conseqüència d'un experiment. De fet, totes ho són en un grau o altre. En canvi, un teorema correctament demostrat fa vint segles continua essent cert ara.

No creguem pas que la matemàtica aplicada consisteix a agafar una bona col·lecció de mètodes coneguts i aplicar-los a un problema concret. En efecte, els problemes que es poden resoldre emprant una metodologia coneguda i ben documentada deixen de ser-ho des del punt de vista matemàtic. El científic o tècnic que ho hagi d'aplicar trobarà com usar la «recepta+. Els *veritables* problemes (o problemes nous) presenten ja dificultats teòriques. El matemàtic (aplicat) ha de fer primer la teoria que li permeti atacar-los. Com hem dit abans, pot fer servir l'ordinador en cas que no es vegi cap manera clara de fer-ho, per tal de familiaritzar-se amb les propietats de les solucions.

3 Models matemàtics

Des de fa molts segles la humanitat s'ha preocupat dels fenòmens que apareixen davant els seus sentits. Es tracta, en primer lloc, de comprendre'ls. Una fase posterior és la de predicció. Encara més, es tracta de preveure què succeirà si s'actua sobre els fenòmens d'una manera determinada. Considero que les tres fases d'aproximació i d'interacció de l'home amb la natura són: comprensió, predicció i control. Per a les tres ens cal disposar d'un model o, si es vol, d'unes «lleis de la natura+. Per a aquesta tasca la manera de treballar ha de ser la cooperació d'experts en els diferents camps de coneixement (física, química, biologia, economia, etc.) amb matemàtics.

En principi, la matemàtica fa abstracció del món real, i per això és una ciència fàcil. Una «llei de la natura+ és sempre una aproximació. Això no vol dir que dites lleis no siguin útils, però en tot cas hem de ser conscients de les seves limitacions i no fer extrapolacions sense fonament experimental.

El primer que cal fer per a comprendre un fenomen és observar-lo i recollir-ne la màxima quantitat possible d'informació. Aquesta informació s'ha de quantificar: cal prendre mesures de magnituds rellevants en el fenomen. Això porta a dos problemes: com mesurar i deixar clar quines són les magnituds rellevants. Mesurar vol dir interaccionar amb el fenomen mitjançant un cert instrument. Possiblement la indicació d'un instrument és afectada per un cert error i la mateixa mesura modifica el fenomen. Per a mesurar cal que puguem aïllar el fenomen d'altres fenòmens paràsits que donarien informació més difícil d'analitzar. Això vol dir que hem de recórrer a l'experimentació. Si és possible, cal poder reproduir el fenomen en un laboratori on, hom ho espera, la presa de mesures serà més fàcil. Una característica de l'experimentació és la seva repetibilitat. Un experiment correctament descrit s'ha de poder reproduir. Si no és així, no se'n poden treure conclusions o bé les que se'n dedueixin (la «llei+) no seran correctes. Notem, però, que la repetibilitat pot quedar amagada i ser difícil de veure a causa de la impredictibilitat inherent a certs models, encara que siguin absolutament deterministes. Cal una fina anàlisi prèvia a la recollida de dades per a saber què cal mesurar en aquests casos.

Això lliga amb un altre problema ja esmentat: quines són les magnituds rellevants. Resoldre aquest problema és previ a la modelització adequada (la determinació de la «llei+). Saber triar les bones variables per a mesurar forma part de «l'ofici+ de l'estudiós de la matèria tractada. La intuïció representa aquí un bon paper, que caldrà confirmar amb l'anàlisi del model, les prediccions i la recollida de noves dades experimentals. És clar que observació, modelització, anàlisi i predicció no van aïllades. Les diferents fases de la comprensió són interactives entre si.

Cal dir que hi ha àrees on observació i experimentació són particularment difícils, la qual cosa farà que no se'n pugui deduir un model matemàtic o que aquest sigui molt groller. Aquest és el cas, per exemple, en moltes branques de la biologia, la medicina, l'economia, les ciències socials, etc. També pot ser que les dades obtingudes no siguin compatibles amb un model determinista o, en tot cas, que aquest hagi de ser extraordinàriament complicat. El treball en aquestes disciplines és, comparativament, més difícil que en la física o en la química, per exemple. Els seus estudiosos n'han de ser ben conscients i, així doncs, s'han de deslliurar de tot dogmatisme.

En aquest cas hom recorre sovint a emprar tests estadístics. Aquests tests poden donar informació valuosa, però no poden esbrinar les lleis que regeixen el fenomen. Un nou fàrmac, per exemple, es pot provar en un cert conjunt d'individus i se'n pot validar l'eficàcia i la fiabilitat. Però la comprensió de com produeix el seu efecte exigeix curosos experiments bioquímics per a conèixer realment com actua. Les tècniques estadístiques certament poden donar informació sobre l'existència de relació entre certes variables. Podem dir que són les que cal usar primer quan hom no coneix res del fenomen. En tot cas, cal insistir en el fet de disposar de sèries temporals de dades. La variable *temps* aporta una informació essencial sobre la dinàmica; si no es disposa d'aquesta variable, es perd una part molt important de les dades necessàries per a la comprensió.

Un cop realitzats diversos experiments i amb una idea de les variables rellevants, arribem a la fase d'escriure les equacions matemàtiques que puguin descriure el fenomen observat. Algunes vegades aquestes equacions es dedueixen d'una manera del tot lògica de «lleis+ més generals i que són prou correctes, com en problemes de mecànica, òptica, cinètica química, etc.

Per centrar idees suposarem que estudiem l'evolució temporal o espacial d'una magnitud o de diverses magnituds simultàniament. Aquestes magnituds poden ser la posició i la velocitat d'una partícula, la concentració d'una substància química en un recipient, el valor de la temperatura en una paret, el nombre d'individus de diverses espècies animals en una àrea donada, la quantitat d'eritròcits per centímetre cúbic, la intensitat de radiació electromagnètica, etc. L'estat del sistema (o fenomen) estudiat és descrit per nombres que ens indiquen la quantia de les diverses magnituds. Aquests nombres es poden prendre com les *coordenades del sistema*, de manera que aquest quedarà determinat si els coneixem en un cert moment (i, potser, en un cert punt o conjunt de punts). Admetem en aquest punt i a partir d'ara que el fenomen estudiat és *determinista*.

L'evolució del sistema a partir d'unes condicions inicials s'expressa dient com variarà al llarg del temps i/o l'espai. Per exemple, una població biològica té variacions, en un cert interval de temps, a causa de les morts produïdes (siguin causades per malaltia, per manca d'aliments, per l'acció de depredadors o per lluites internes), a causa dels naixements, i, si ens fixem en un cert indret, a causa també de les migracions. Si tenim en compte les diverses contribucions a la variació de la població, obtenim una relació que ens dóna la població en una època a partir del seu valor en una època anterior (per exemple, un mes, un dia o un any abans), a partir dels valors d'altres poblacions i a partir d'altres variables que depenen del temps (com és la meteorologia, que influirà en la disponibilitat d'aliment). Naturalment, pot ser adequat considerar la població esmentada no globalment, sinó atenent el seu repartiment en edats, si aquest varia considerablement al llarg del temps. Resumint, l'estat del sistema en un moment depèn del seu estat en una època anterior.

La formulació matemàtica es fa dient que el pas d'una època a una de posterior és una funció que depèn de l'estat inicial. Iterant el procés obtenim l'evolució del sistema en el temps. Aquest tipus d'estudi s'engloba dins de l'anomenada *teoria de la iteració*.

Continuant amb el cas d'una població, i per ser més realistes, com ja hem esmentat, pensem que en la seva expressió en una època donada no sols hi intervé la població en una època anterior (per exemple, un mes abans) sinó en diverses èpoques anteriors. En efecte, cal tenir en compte que no tota la població està en condicions de reproduir-se, i caldrà eliminar els individus massa joves o massa vells. Obtenim així un model de població amb memòria (de les poblacions en èpoques passades) o, si es vol, podem segmentar la població en diverses subpoblacions segons el sexe, l'edat, etc. A mesura que passen els intervals de temps, els individus d'una subpoblació, si no han mort i no han migrat, passen a la subpoblació d'edat superior. Els individus en edat fèrtil donen lloc a naixements d'acord amb una certa taxa de reproducció, i els nounats, que estan en el primer nivell de subpoblació, pateixen fortament l'acció de depredadors o el temps advers. Es pot descriure l'evolució de la població com el que s'anomena una *equació en diferències finites* o, més generalment, un *sistema d'equacions en diferències finites.*

Si passem al límit quan l'interval de temps entre una època i la següent tendeix a zero, tindrem una equació diferencial ordinària, en la qual la variable independent és el temps i la variable dependent és la grandària de la població (o les grandàries de les diverses subpoblacions, si s'escau). Si, al mateix temps, considerem el comportament respecte a l'espai a causa d'un procés de migració (que hom pot considerar com una difusió cap a territoris més atractius per un motiu o altre) tindrem una equació en derivades parcials, ja que cal considerar no sols la derivada de la població respecte al temps, sinó també les derivades respecte a les variables d'espai. El fet que hi hagi processos no instantanis (per exemple, la maduració dels individus o la transmissió d'informació) porta a equacions amb retard o a altres models més complicats. Les equacions en derivades parcials del tipus d'evolució tenen solucions que depenen del temps i de l'espai. És útil considerar les solucions com a funcions que depenen del temps i que per a cada valor del temps donen un «punt+ que, a la vegada, és una funció que depèn del punt de l'espai físic considerat.

Resumint, la majoria dels models d'evolució de l'estat d'un sistema donat s'escriuen com a equacions diferencials o equacions en diferències finites, en el cas que realment existeixin unes «lleis de la natura+ deterministes que regeixin aquests fenòmens. No parlarem de models en els quals intervingui un cert component aleatori. És a dir, models en què intervinguin variables de les quals no es conegui prou bé l'efecte, models massa complicats per a descriure'ls d'una manera determinista, o bé fenòmens tals que la «llei física que els regeix+ tingui caràcter probabilista. Aquests models són realment importants, però ens centrarem en els deterministes.

Vull deixar clar també que tot això s'aplica a problemes reals en què:

1. És prou correcte admetre que el sistema és determinista.
2. Hom té equacions que descriuen el comportament del fenomen.
3. Per comparació amb experiments («físics+ i no numèrics, és clar) de l'anàlisi del model matemàtic, es considera que les *prediccions* deduïdes del model són prou acurades per a poder-lo considerar útil. *No hi ha models correctes, sinó, com a màxim, models útils.*

En resum, hom no pot pretendre fer cap extrapolació cap a models «no validats+. Un cas especialment delicat apareix quan hom pretén aplicar conclusions obtingudes a partir de l'anàlisi del comportament conjunt d'un sistema amb molts elements (sigui un sistema de partícules, una població d'individus, etc). Si el sistema que es vol estudiar té pocs elements (per exemple, si en el cas de l'ecologia les poblacions que hom considera són «petites+), llavors no té cap sentit parlar d'una «dinàmica en mitjana+ i el problema és molt més difícil. És ben conegut que és molt més complicat estudiar, diguem, el problema de quatre cossos sota l'atracció newtoniana, que un problema amb 10^{24} partícules, que probablement estigui molt ben descrit, en conjunt, per les lleis de la mecànica estadística.

4 Propietats dinàmiques universals

El meu camp d'activitat s'ha centrat, bàsicament, en sistemes en dimensió baixa. Per tal cosa entenc que el nombre de variables que evoluciona no va més enllà de deu o dotze. Hi ha diversos motius per a aquesta elecció. D'una banda, hom coneix experimentalment que les dimensions dels atractors a què tendeixen els sistemes naturals no són, en la major part dels casos, superiors als valors indicats. Això succeeix malgrat que els sistemes en qüestió estiguin regits per equacions en derivades parcials i, com hem dit, tinguin la seva evolució en un espai de dimensió infinita.

Un altre bon motiu és que, fins i tot per equacions diferencials ordinàries, estem encara lluny d'entendre els sistemes en dimensió 3 de manera completa. El ben conegut problema gravitatori de tres cossos es pot reduir a un sistema en sis variables i presenta, ja, dificultats formidables.

Però sovint no ens interessa estudiar un problema aïllat, sinó una família que depèn de paràmetres. Aquests paràmetres poden significar «constants+ físiques o tenir en compte factors tant interns com externs del sistema. Més important encara, sota certes condicions és possible aproximar sistemes bastant generals per d'altres que depenen d'un nombre finit i no gaire gran de paràmetres. Això és degut a consideracions, en les quals no entrarem, que permeten veure l'evolució d'un sistema dinàmic des d'un punt de vista geomètric. Hi ha diversos objectes invariants que formen «l'esquelet+ del sistema, que evoluciona entre aquests objectes. Cadascun es pot descriure, aproximadament, amb un petit nombre de paràmetres. La manera de relacionar aquests objectes també és representable amb pocs paràmetres.

Amb tot això vull dir que és possible estudiar sistemàticament sistemes d'una certa complexitat, especialment en el cas dissipatiu. En un grau o altre tots els sistemes naturals dissipen energia. Els tipus d'evolucions que s'obtenen, malgrat ésser infinits, sembla que es poden classificar en un nombre reduït de classes. Almenys si les dinàmiques són suficientment regulars, potser després de canvis de variables convenients. També cal dir que, en diverses regions de l'espai abstracte on es representa numèricament l'evolució del sistema (l'anomenat *espai de fases*), hi ha també fenòmens d'autosimilitud. El que succeeix en una certa regió es reprodueix a més petita escala en molts altres indrets.

Bé, arribem així a uns comportaments dinàmics universals. Pot ésser difícil predir com evolucionarà un sistema a partir d'unes dades donades en un cert instant de temps (la meteorologia n'és un bon exemple). Però, per dir-ho així, no poden passar gaires coses completament diferents. (Tornem a la meteorologia: el nombre de meteors coneguts no és pas gaire gran).

Com he dit abans, l'ordinador pot ser una bona eina «experimental+ en aquest camp. La representació gràfica de les evolucions dels sistemes dinàmics permet que, després de veure un bon grapat de comportaments, en estudiar més i més sistemes es tingui la impressió d'un *déjà vu.* Naturalment, això demana una certa experiència per saber què cal mirar i com s'han d'interpretar les figures que es veuen. Exactament igual que succeeix quan mesurem en les altres ciències experimentals.

Actualment s'estan estudiant alguns *models universals* que descriuen la dinàmica en certes regions de l'espai de fase. S'intenta esbrinar el comportament prop de les distintes peces de l'esquelet i de quina manera aquestes es connecten. Més concretament, es consideren models de parts de la dinàmica. Si es vol, es pot dir que són trossos del model matemàtic d'un problema real. S'està així fent un pas dels que ens agraden tant als matemàtics: fer un model del model. Tot s'hi val si això ens ajuda a comprendre. A més, aquests models són bones aproximacions *globals* de models senzills i depenen de pocs paràmetres. Físicament corresponen a problemes que tenen caràcter dissipatiu i estan descrits per tres o quatre variables dependents del temps.

S'observa que, en el cas de tres variables, a més dels atractors clàssics (punts estacionaris i solucions periòdiques i quasiperiòdiques) hi ha un cert nombre dels anomenats *atractors estranys* que tenen unes regles de creació i destrucció absolutament clares.

La conclusió que voldria que es derivés d'això és que des del moment en què un sistema natural pot ser descrit per equacions matemàtiques, els seus tipus d'evolució queden perfectament determinats. No em refereixo al fet que donades unes dades inicials es pugui predir què succeirà. Això és, en la major part dels casos, impossible, per molt determinista que sigui el model i per molt «fiable+ que sigui. Em refereixo al fet que el nombre de coses que poden succeir és finit.

Dit això, ens podem preguntar per què la naturalesa ha de poder ser descrita per les anomenades «lleis naturals+ expressables de forma matemàtica. Sobre aquest tema presentaré unes especulacions a continuació. Fixem-nos que, en certa manera i d'acord amb el que acabem de dir, és irrellevant quines siguin en concret les lleis. El que afirmem és vàlid per a sistemes governats per equacions diferencials, en diferències, etc., i no hi fa cap mal que hi hagi un cert component probabilista.

5 El perquè de l'èxit de la matemàtica

A priori podem pensar que és sorprenent que la matemàtica sigui tan útil per a descriure el comportament de molts fets naturals. Això és una conseqüència inevitable de l'existència de lleis naturals. Aquestes, a la vegada, permeten establir els fonaments de l'ús de la natura portat a terme per la humanitat i desenvolupar la tecnologia. D'això a tenir al nostre abast totes les coses que se'ns ofereixen actualment (moltes de supèrflues) hi ha un pas. Es pot tardar més o menys a descobrir els principis físics, però són allí.

Pensem ara una mica què succeiria si no existissin unes lleis naturals de caire més o menys determinista.

Els éssers humans, i en general tots els éssers vius, tenim una estructura notablement complicada. Una quantitat enorme de cèl·lules amb missions ben diferenciades i perfectament estructurades. Tot es produeix a partir de la informació continguda en els gens. Naturalment, aquesta informació, tot i essent molt gran, és insuficient perquè es pugui considerar com el plànol detallat d'un ésser humà. Però no n'hi ha cap necessitat. La podem considerar com l'algorisme a partir del qual, i ateses les favorables circumstàncies ambientals, es produirà l'ésser de manera inevitable. Sols cal deixar que actuïn les lleis naturals d'acord amb uns valors dels paràmetres que són la informació que porten els gens.

Podem comparar els algorismes continguts en el gens amb els que s'usen per a generar una representació gràfica de l'evolució d'un sistema (tant si ho fem a mà com si ho fem amb ordinador; a mà sol prendre més temps). Un algorisme que es pot escriure en una pàgina i que es converteix en un programa de poques línies pot originar figures d'una aparença molt complicada.

Distintes condicions inicials originen evolucions lleugerament diferents, però l'atractor a què hom tendeix és essencialment el mateix, sempre que els paràmetres (o les circumstàncies ambientals) no ultrapassin uns certs valors. Si això succeeix, es diu, des del punt de vista matemàtic, que hi ha hagut una *bifurcació*. En termes biològics es parla de *mutacions*.

Aquest tendir a objectes semblants és el que permet l'organització de l'organisme complet. Sense lleis naturals possiblement no existirien ni els constituents de la matèria. Si existissin algunes «lleis+, però estiguessin lluny de tenir un caràcter determinista, no hi hauria cap formació de patrons. És a dir, no hi hauria «evolucions finals+ ni el «tendir+ cap a alguna estructura, ja que cada vegada que el sistema es trobés exactament en el mateix estat que en un instant anterior podria evolucionar de manera absolutament arbitrària.

En resum, si no existís un substrat matemàtic sota tot el que succeeix en la natura (independentment del fet que existissin éssers capaços de «fer+ matemàtiques), no existiríem tampoc nosaltres. Llavors ja no ens formularíem la pregunta que encapçala aquest apartat.

L'absència de lleis naturals significaria el «caos+ en la seva accepció més autèntica, és a dir, «el no-res+. Cal no confondre-ho en absolut amb el recent i popular (mal) ús del mot *caos*. Es tracta, simplement, de la impredictibilitat en sistemes deterministes, ben coneguda per H. Poincaré i, sorprenentment, descrita amb bastant detall en un dels llibres d'E. A. Poe.

D'altra banda, una pregunta natural és si, donades unes lleis físiques expressables en termes matemàtics com les que sembla que hi ha, és o no inevitable que es produeixin éssers amb capacitat per a pensar. I, en particular, per a fer matemàtiques. Cal un cert temps per a la producció d'organismes vius, per a viatjar on calgui i per al seu desenvolupament i evolució. A més, com he dit, es necessiten unes circumstàncies ambientals favorables. En el cas del nostre petit planeta (un gra de pols perdut a l'univers, com es diu) no n'hi ha prou d'estar a una distància del Sol que ens permeti una quantitat d'energia acceptable. A més, cal que el clima sigui suficientment estable. Per això cal que l'eix de rotació de la Terra sigui també estable. És conegut que la Lluna fa un paper essencial estabilitzant aquest eix, que, altrament, patiria fortes inestabilitats a causa d'un efecte combinat del Sol, Júpiter i Saturn.

Quina és la freqüència espacial i temporal amb què totes les condicions per a l'existència i el desenvolupament d'éssers pensants són satisfetes, em sembla una pregunta difícil. Bàsicament per la manca de dades, ja que moltes «teories+ cosmogòniques són un exemple de les «extrapolacions+ de què he parlat anteriorment.

6 La matemàtica en les carreres universitàries

Sembla que la matemàtica (especialment amb l'esperit de la matemàtica aplicada) hauria d'estar present en moltes de les carreres que hi ha actualment. Vull aclarir que no em mou cap interès personal. Vaig impartir, fa anys, diversos cursos de matemàtiques a facultats diferents de la de matemàtiques i vaig tenir el goig de trobar-me amb alumnes excel·lents. Simplement crec que els seria útil. No sols pels coneixements en concret que se'ls exposessin, sinó també per l'esperit crític que té, per a ajudar a desenvolupar la capacitat de pensar correctament, d'analitzar tots els casos, etc.

Em diran que ja hi és. És cert, però en gran part dels casos apareix d'una manera extraordinàriament reduïda. L'argument ha estat, a la nostra Universitat i en d'altres, la reducció de la durada de les carreres. Analitzem-ho una mica. Aquí hi tenim dos punts: quin ha de ser el contingut d'una carrera i quina durada ha de tenir. Òbviament estan relacionats. Crec que cap dels dos és la qüestió primordial. La pregunta bàsica és, parlant en termes comercials, quin «producte cal produir+. Un cop tinguem la resposta els altres dos punts en seran un coroŀlari.

Bé, continuem la nostra anàlisi de les paraules entre cometes. El producte és clar: l'alumne que acaba els seus estudis. Per produir entenem formar i informar (amb un repartiment adequat entre ambdues coses, depenent de la carrera i del nivell). Ens queda, així, que la clau està en el mot *cal*. Cal formar persones amb una sòlida base de coneixements, que potser no coneixeran res d'un tema concret però que, amb els fonaments adquirits, el podran dominar en poc temps, o calen persones amb una formació molt més concreta que els permeti incorporar-se immediatament al món professional? En tot cas, considero les persones que estudien en universitats i deixo de banda la formació que pugui impartir-se en escoles professionals.

Tot això va adobat, a més, amb el fet que tota persona *amb les aptituds necessàries* té dret a rebre una educació superior. Aquestes *aptituds* es «demostren+ ara superant l'examen de selectivitat. A la vista dels resultats és clar que aquest examen

1. No selecciona i no s'ha pres cap mesura per a compensar els possibles biaixos que hi hagi entre les qualificacions prèvies i les que s'obtenen en l'examen.
2. No té en compte els estudis que vol seguir l'alumne i les seves aptituds *específiques*.

Crec que si no compleix els seus objectius (si és que en té!) hauria de desaparèixer. En el seu lloc cada ensenyament podria establir, si ho creu necessari per a assolir la qualitat desitjada, o bé un examen específic, o bé un primer curs al nivell convenient.

Tornant a la qüestió anterior, el meu punt de vista és que cal formar ambdós tipus de persones. Em semblen necessàries per al correcte funcionament de la societat. I, en tot cas, s'ha de procurar que el nivell de formació bàsica sigui al més alt possible, d'acord amb les aptituds dels estudiants. En efecte, una característica del món actual és la demanda de persones amb una notable flexibilitat i que puguin fer front, satisfactòriament, a diferents situacions de treball. Aquesta flexibilitat serà més gran (en general) si la seva base és més àmplia.

Uns continguts matemàtics més elevats en moltes carreres crec que poden afavorir una formació més sòlida. Possiblement els alumnes de disciplines diferents de les matemàtiques han de tenir una certa part «d'informació+ matemàtica. És a dir, un cop familiaritzats amb certs principis i havent-se exercitat suficientment, se'ls pot informar d'altres resultats que puguin ésser usats sense necessitat de seguir tot el raonament.

7 Algunes reflexions sobre l'ensenyament en general

Els darrers trenta-tres anys he estat lligat, com a estudiant o com a professor, a la universitat, i la major part d'aquest temps, a la de Barcelona. Per diverses circumstàncies conec bastants universitats d'arreu. Això i la meva convicció que l'ensenyament és una clau essencial per a l'evolució futura de la societat fa que vulgui presentar ara algunes reflexions.

1. La reducció en moltes universitats de la durada de les llicenciatures de cinc a quatre anys ha estat forçada per motius aliens a l'estudi dels objectius que es volen assolir. S'ha de «guanyar+ un any, ja que se n'ha «perdut+ un abans. Un pot tenir la impressió que realment «s'ha perdut+, és a dir, que la relació qualitat/preu dels estudis previs a la universitat no sigui suficient. I en parlar de *preu* no em refereixo a l'econòmic, naturalment.
2. Crec que hi ha un nombre excessiu de carreres. Sovint es diu que els darrers anys s'ha incrementat notablement el nombre de carreres que s'ofereixen als estudiants. Estimo correcte que hi hagi diverses carreres de cicle curt (tres anys) amb una orientació més concreta i que permetin la incorporació ràpida al món professional sense una base àmplia. Diguem-ne diplomatures, per posar-hi un nom. Però les llicenciatures, que representen el nivell més alt d'ensenyament general, haurien de formar de manera més completa. Si es vol es poden oferir distintes opcions de segon cicle, com a especialitats a què es pugui accedir des de primers cicles diferents. Hi ha llavors el dubte de si dos anys són suficients per a un primer cicle que tingui tota la formació bàsica. Una solució podria ser que l'especialització s'oferís en un any.
3. Estimo molt convenient fer un «control de qualitat+ a la sortida. Quins coneixements tenen realment els alumnes que reben el títol? Es corresponen amb els objectius proposats? Compleixen el que demanen les persones que els han de donar feina? Naturalment, aquesta avaluació l'han de fer *exclusivament* professionals de la disciplina en qüestió (incloent-t'hi, potser, professionals d'altres universitats) i persones lligades al món laboral.
4. Establint un examen d'entrada propi de cada ensenyament, o un primer curs amb el nivell que calgui, s'hauria de procurar
   - Que una fracció important dels alumnes que superin el primer curs acabi la carrera. Altrament hi ha una pèrdua d'energia i recursos de professorat i alumnat.
   - Que l'esforç demanat a l'alumnat fos constant durant la carrera. Si un curs no costa cap esforç a l'alumne, no hi guanya res i no cal que el faci. O en altres paraules: no s'està aprofitant tot el potencial de l'alumnat.
5. S'han d'oferir nivells d'ensenyament assequibles a una part important de la societat. Diguem-ne, per exemple, «certificats d'estudis universitaris+. Pot ser bo que molta gent conegui la universitat des de dins.

8 Conclusió

L'ensenyament és un tema cabdal per al futur de la humanitat. És tan important que no es pot deixar sols a les mans dels polítics, o sols dels ensenyants, o sols de la societat que rebrà els alumnes formats i els resultats de la recerca que s'hi faci. Les tres parts han de coŀlaborar per a planificar a un termini de quinze o vint anys sense fer successives marxes endavant i enrere. De manera periòdica (no al cap de vint anys, sinó cada any) s'ha de revisar el compliment dels objectius i la conveniència de variar-los lleugerament.

Que ningú es miri els anys de l'ensenyament com un còmode aparcament dels joves. Ans al contrari, han de ser decisius per a la seva vida futura.

A tots els nivells d'ensenyament la matemàtica hi té alguna cosa a dir. La formació amb un esperit reflexiu i crític ha de fer els éssers humans més lliures. Hem de mirar la matemàtica no com una cosa abstracta i inintel·ligible, sinó com a absolutament natural i viva.

Per cloure aquesta lliçó voldria proposar uns exercicis per a fer a casa. El primer consisteix a reflexionar sobre què pot fer cadascú per millorar l'ensenyament al nostre país, i intentar posar-ho en pràctica. El segon és més especulatiu (encara). Un dels orígens de la matemàtica, com a disciplina de la ment humana, va ser l'observació de la regularitat dels moviments del Sol i la Lluna. Quin hauria estat l'efecte en l'evolució de la humanitat, des del punt de vista intel·lectual, si la nostra Terra fos un planeta al voltant d'un estel doble i amb una dotzena de llunes?

Agrairé les respostes que em facin arribar.

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes, 585
08007 Barcelona
simo@cerber.mat.ub.es